

方法 · 能力 · 技巧

METHOD-ABILITY-TECHNIQUE

朱德祥 著



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

方法 · 能力 · 技巧

METHOD-ABILITY-TECHNIQUE

朱德祥 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书主要探讨初等数学的解题方法和技巧. 全书共 10 章: 谈谈实数, 闲话初等几何, 运用重心概念处理几何问题, 参数的运用, 立体解析几何大要, 求和, 多项式的恒等变形, 根式和无理式, 解方程, 不等量. 每章都针对内容列举了典型的例题, 特别注重这些例题的解题方法的分析和引导, 一些例题还有多种解法.

本书适用于中学师生、数学教育方向的研究生和广大数学爱好者参阅.

图书在版编目(CIP)数据

方法·能力·技巧/朱德祥著. ——哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2016. 1

ISBN 978-7-5603-5636-5

I. ①方… II. ①朱… III. ①数学方法—普及读物
IV. ①O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 237416 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 张永文

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 17.25 字数 290 千字

版 次 2016 年 1 月第 1 版 2016 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-5636-5

定 价 38.00 元

(如因印装质量问题影响阅读, 我社负责调换)

作者简介

朱德祥教授是我国著名几何学家、数学教育家。他于1911年出生在江苏省南通县。1934年考取清华大学“清寒公费生”，师从著名数学家熊庆来、陈省身、杨武之、华罗庚、赵访熊等。1938年以优异成绩毕业于“国立”清华大学算学系，毕业后在云南大学、国立西南联合大学及昆明师范学院（1983年更名为云南师范大学）任教，从事高等教育工作50余年。新中国成立以来，先后担任过昆明师范学院数学系系主任、副院长；全国理科教材编审委员会委员，中国数学会理事，云南省数学会副理事长、名誉理事长，全国高师院校《高等几何》学术教学研究会名誉理事长，全国高师院校数学教育研究会名誉理事长，1957年被评为云南省先进生产者，1983年被评为云南省劳动模范，1989年获全国普通高校优秀教学成果奖，1990年被评为云南省优秀共产党员。

主要译著有：《初等数学复习及研究（立体几何）》（1960），《初等数学教程·几何》上、下册（1964），《初等数学教程·理论和实用算术》（1982），《高等几何》（1983），《初等几何研究》（1985）和《新编解析几何学》（1989，与朱维宗合著）。

序

我国著名数学教育家朱德祥先生的又一本遗著即将出版,朱先生之子朱维宗教授 2015 年 11 月 8 日发来一封信,他是这样写的:

“自从认识刘培杰老师以来,十分欣赏刘老师的才智和文笔.我想恳请刘老师为这本书写个序,哪怕短短几行也行.因为这本书也是我父亲多年来对初等数学研究与教学的心血结晶.”

由于工作关系写序、跋、前言、后记之事常有,但给如此重量级人物的作品写序还是第一次.诚惶诚恐之时看到李尚志教授与吴康教授在微信中都表示他们虽学数学但文笔更优,遂生自信,恭敬不如从命.

在这个每年出版新书 44 万余种的出版大国里,任何一本新书的问世都不会掀起太大的波澜,更何况是一本专讲中学数学解题方法的老书新版.但笔者以为朱德祥先生作为一位逝去的老者在今日之中国其榜样力量不可小觑.

记得在毛泽东时代对一个人的最高评价是:一个高尚的人,一个纯粹的人,一个脱离了低级趣味的人.余以为那样的圣人在现实中并不存在.如果非要仿此评价朱老先生,笔者以为似可这样说:一个杰出的人,一个具有奉献精神的人,一个淡泊名利的人.一个人要做到其一已实属不易,同时三项兼备距圣人不远矣.

不论在哪个时代朱老都称得上杰出人士,有我国数学家卫念祖教授的回忆为证:

1965 年末到 1966 年初华罗庚先生受国家科委委托支持贵昆、成昆铁路的修建,率队到云南推广统筹法,并首次做了关于优选法的报告.我当时参加接待工作.华先生在一次交谈中对我说:“我与老朱(指朱德祥)是三个一的关系.他是我第一次登上清华大学数学系讲坛讲授微积分时的那个班上成绩第一的学生,可是我仅只大老朱一岁.”

朱先生读书时勤奋好学,思路敏捷,成绩优异,深受熊庆来、杨武之、赵访熊、华罗庚诸先生的赏识.

一个人要想成为杰出之人,有两个必要条件:一是聪明,二是勤奋.求学时代能得到这几位大家的认可,聪明自不必提,因为这几位大家眼界极高,绝不是随便赏识他人之人.1934年朱先生在南京中央大学余介石先生的鼓励下报考大学,竟同时被清华大学、南开大学和中央大学所录取,轰动一时.

一位数学教育家安身立命的东西有两个:一个是著作等身,一个是桃李天下.这两项非勤奋无以做到.而朱老都做到了完美.先看著作共9部:

(1)《初等数学复习及研究——立体几何》

1960年印2万册

1979年印32万册,累计至少34万册

(2)《高等几何》

1983年,1985年,1986年,1987年共印四次,累计24.4万册

(3)《初等几何研究》

1985~1990年共印四次,累计11.5万册

(4)阿达玛(J. Hadamard)著《几何教材平面部分》1953~1954年由俄文译作教材,1964年上海科学技术出版社出版.1964年,1965年,1980年,1983年印刷四次,共计印21.4万册.

(5)阿达玛著《几何教材立体部分》由法文译出,1966年由上海科学技术出版社出版.1966年,1980年,1983年印刷三次,共印5.89万册.

(6)唐乃尔(J. Tannery)著《理论和实用算术》,1982年上海科学技术出版社出版.1982年,1984年印刷两次,共印2.3万册.

北京、上海出版的六本书共计185.3万字,到1991年4月止,共计印99.49万册.

(7)《新编解析几何学》与朱维宗合作写出,1989年西南师大出版社出版,初印2600册.

(8)《数学园地——方法·能力·技巧》云南教育出版社出版,1990年印2000册.

(9)《射影几何条目》(中国大百科全书——数学,第561~567页)与吴大任先生合作,1988年.

(除了(9),前8部作品我社都已出版或计划出版.)

再说教学.据云南师大余嘉华撰写的朱先生事迹中,谈及朱先生的教学工作始于在清华读书时.“那时的清华算学系,学生少,师生接触比较方便.课余,朱德祥常到杨武之先生家,四年级到昆明后在文化巷宿舍常是两把椅子、两杯清茶,对坐聊

天,时局、学业,无所不谈.时间久,便熟悉了.一次,杨先生说:“我的几个孩子很聪明,你是学师范的,帮我指点辅导一下.”于是,朱德祥又成了杨振宁的弟弟和妹妹的家庭教师.”而后来到云南师大(当时叫昆明师院)时,由于数学系教师少,缺什么课他就教什么课,上课门类较多;后来,随着学校的发展,专业分工比较细致明确,才将重点转到几何教学上来.几十年来,他先后担任过《微积分》《微分方程》《高等微积分》《高等数学》《复变函数》《综合几何》《近世几何》《几何轨迹与作图》《三角》《平面几何》《立体几何》《初等几何》《高等几何》《射影几何》《偏微分方程》《空间解析几何》《代数》《教材教法》等十余门课程,为中学、先修班、大学专科、本科、进修生、研究生等各种不同层次的学生上过课,多次带学生到中学教育实习.新中国成立前为生活所迫,还在昆明一些中学兼课,最多时,每周上课达三十一学时.他上课,深受学生欢迎,有时听者除师生外,机关干部和工程技术人员都来听,课堂坐不下,走道、院坝里都有听众.

朱先生讲课,心里总装着学生.他说:“家长把子女送来上学,我们就要对学生负责,既要教书又要育人,让他们成才出去,否则就是误人子弟,对不起党和人民.”为此他认真备课,一丝不苟.上一次课备一次课,上十次课备十次课,每一次都要重新准备.他把备课的重点放在熟悉教材,分析难点,理清思路,列出教学步骤;课堂上要示范的题、要布置的练习,都一一重新做过.他认为不断的反复,才能熟悉教材,不断的解题才能熟悉技巧,并发现新的解题方法,在课堂才会出口成章,应付自如.讲授中,他要点突出,逐层阐发,深入浅出,富于逻辑性和启发性;内容求精、求准;语调较缓而抑扬起伏,严肃中带几分幽默,不仅便于笔记,而且常使人发出会心的微笑.即使板书,也经过认真的思考,细心的学生听他的课不久,常常会发现:朱先生讲授中推演出的一些结论或重要的定理,往往会用红笔写在黑板的右上角,而且不轻易擦去,于是照样记下,待复习时顿然省悟,这就是要点.”

每个人都不是圣人,如果他做出了某些常人所难以企及的贡献或工作时,总会有一些特别的心路历程.朱老在他的“八旬回顾”中讲述了两件对他感触颇深的事情.

“1969~1970年前后七月,我院组织了先后两个教育革命小分队,从小学教师中培训附设初中班的教师.下乡调查研究知道有的老太婆把棺材板捐出来做桌凳,让孙子上学;大理洱海大队学生上初中,要到海东大队,遇逆风时,学生要把书包和衣服一只手举在头上,另一只手划水到东岸.中国农村这些艰难求学的事例深深地印在我的脑海里.有一名教过20年书的学员说,到现在才晓得做教师.其实做教师是一种学问,一种技术,一种艺术,是没有止境的.”

在回顾的最后，朱老感言：

“我唯一的菲薄贡献是在祖国西南边疆民族地区，率妻子儿女全部从事我一生热爱并为之艰苦奋斗的教育事业，力求不辜负云南人民养育之恩。”

有一阵子，笔者差一点就同意了韩寒的一个极端说法：方圆百里之内竟无一个可以学习的榜样。但通过对朱老的越来越多的了解，笔者越来越清楚地知道朱老就是我们学习的榜样，就是我们最可爱的人。他的精神就是我们时代所最需要提倡的。一般来说，一个社会所大力提倡的就是它所稀缺的。在微信朋友圈中最近盛传一则似乎很有道理的所谓“对话”：

有人问：你是搞教育的？我回答：不，我只是名老师！有人问：你是人类灵魂的工程师？我回答：不，我只是名老师！有人问：你的工作是天底下最光辉的职业？我回答：不，我只是名老师！有人问：你是吐丝的春蚕，你是化泪的蜡烛？我回答：不，我只是名老师！可是，对不起，真的对不起，我不知道大家所描述的到底是谁？我，只是名老师！

有人说：老师应该把自己的所有都奉献给祖国的教育事业！我回答：不，我只是名老师！我要休息，我有自己的家庭，我有自己的孩子，我有自己的爱好，我希望能够心安理得地像其他行业的人一样享受自己的生活，我希望自己的劳动能够得到社会的认可，我同样希望自己付出的劳动能得到应有的回报。仅此而已，错了吗？

有人说：你是老师？那你应该能把所有的学生都培养成祖国的栋梁！我回答：不，我只是名老师！我是个平凡的人。我承认学生的成功并不是我的功劳，他们靠自己的聪颖和勤奋成就自己；同样有些学生的失败也不是我所能左右的，我用尽了全力，可是还是一无所获。当家长放弃了，学生自己放弃了，只剩下老师还在努力想改变点什么的时候，这些老师们显得多么的无助，真不知道那点成绩的提高到底能给自己带来什么。

有人说：你应该明白：只有不会教的老师，没有学不懂的学生！对不起，我不知道这是“专家”还是“砖家”说的，是“教授”还是“禽兽”说的。我只是名老师，我只知道要尽力去教好学生，做好自己的工作，其余的我真不知道该做什么了。

这几则对话乍一看似乎没什么不妥，但当你将它与朱老的事迹对比起来看就知道什么叫境界，什么叫诲人不倦，什么是教育家。曲靖师专的马立教授曾撰文讲述了朱老当年的两则小故事：

在大理办培训班时，有一位学员名叫赵德芳，他曾是大理洱海东边某生产大队党支部书记，由于当时他们生产队办的附设初中班急需教师，组织决定抽调他来参

加培训。他为人老实憨厚，学习异常刻苦，但文化基础太差，上课老跟不上，一度失去了学习的信心，悲观地认为自己笨，学不会了。朱先生发现了这一情况，在赵德芳身上花了不少心血。每天吃完饭后，休息时，经常对他进行耐心的个别辅导，启发他的自信心。朱先生鼓励他说：“你并不笨，你会爬树，我就不会；你会划船、会打鱼，我就不会。你基础差是因为过去没有机会学文化。你要坚持下去好好学，不把你教会，我们决不走。”赵德芳非常感动。后来，朱先生因参加人大代表集中学习而提前离开培训班时，赵德芳抱住朱先生痛哭，对他一生中能遇到这样好的老师感到难舍难分。

马立教授讲的第二个小故事是：

1970年在大理时，朱先生曾多次跟我讲过宋一先的事。物理系宋文麟老师的儿子宋一先当时是师院附中的一个“老三届”中学生。朱先生当时就发现他是一个人才，在数学方面天资聪明，很有发展前途。他还没有跨进大学门槛就能用傅里叶（Fourier）级数解决某一问题，还自学了英语、德语，能读懂厚厚的德文专著。但在那个动乱年代里，大学停止招生，中学生上山下乡。宋一先下乡后因病回家，别说没进大学深造，就连个工作都没有，只好闲在家里。朱先生当时曾对我说过：“宋一先的水平不下于年轻时候的华罗庚。”朱先生感叹地说：“我的老师熊庆来先生当年发现了华罗庚，可以把华罗庚培养成才，而今宋一先如此有才华，我却无能为力。吾不如吾师也！”一句话，既表达了朱先生谦虚和责任感，又道出了朱先生对“文革”中糟蹋科技，埋没人才的深沉忧愤。

1983年5月10日中共昆明师院委员会专门发了一个002号文件“关于向朱德祥同志学习的通知”，在文件后附有一篇记述朱老先进事迹的文章，题目是“甘当人民老黄牛”。在文章中这样写道：

朱德祥同志在国内外有较高的声望，不少人慕名信函或登门求教，有周围的同志，也有中、小学生和工人，他总是有求必应。有的当面解答，有的解答完毕后函复或亲自送到家里当面讲解。素不相识的人来信要书或求改稿件，他都一视同仁，热情帮助，尽量满足别人的要求。一次，巧家县一名工人给他来信说：“我过去被批判为走白专道路，现在头脑里空空的。我需要数学书。”朱德祥立即给他回信，又不辞辛苦，一次又一次上街为他买书，并配成套寄去。安徽当涂师范一位青年，写信向朱德祥请教问题。朱德祥从信里看到小伙子钻研的是大学难度较大的题目，十分高兴，来信每次必复，热情辅导。1983年前后，浙江金华丝厂一女工来信说她正在自学法语和数学，希望朱老师送给他一本法文数学书。家中无适当的书，朱德祥同志专程到云南师大一教授家找，结果也没找到。后来和云南师大那位教授专门到一家

外文书店查阅,终于买到了一本适合初学法语的人使用的数学书籍寄去。

家里人同朱德祥同志开玩笑,说他办了一所函授学校。确实,朱德祥同志收到的来信中,相当一部分是请教解答问题的。但除了“函授”外,朱德祥同志还给数不清的大、中学师生、青年工人作过面授。1982年,陕西师专一名教师带着问题来找朱老师,院领导考虑到朱德祥工作很忙,给来人提出了不超过一个小时的时间限制。朱德祥说:“人家这么远来,怎能让人家把问题带回去?”朱德祥放下手头的工作,和他谈了两个半天,使这名教师带着满意和感激的心情而去。这就是朱德祥同志常说的“人同此心,心同此理”。他就是这样,像一支越点越明的红烛,无私地燃烧着自己,把光明留给别人。

如何看待名利是判断一个人在骨子里是市井之徒还是精神圣徒的分水岭。云南师大数学系曾这样评价朱先生:

朱先生一向重奉献,不慕名利;重实际,不尚空谈。1954年领导要他出来负责数学系,他说:“人要各尽其才,我适于教书,不适合当领导。”苦辞不就。数学系主任一职空缺达两年之久。后来领导再三动员,不得已才于1956~1958年,1978~1981年当了两届系主任。1979年,上级又任命他为副院长,他又再三恳辞不准,后来答应他可以不住办公室,不批文,才勉强接受。在20世纪50年代和80年代,有关部门发来专家登记表,他觉得自己只是教员,不是专家,未填。后来,各类“名人辞典”多次征稿,均未应命。由于工作需要,他的一些学生相继走上领导岗位,他不仅鼓励他们做好工作,而且在行动上尽力支持。他说:“不愿当官,却要做一名好群众。要正确认识自己,找到恰当的位置,才能更好地发热发光!”

无独有偶,在纪念胡耀邦诞辰100周年之际有文章讲述早在1980年胡耀邦同志就指出“要让他们(中科院某研究所领导)向‘家’发展,不要向‘官’发展,要做‘家’迷,不要做‘官’迷。”

联想到当前在一些院士评选、科技奖项评选和重大课题申报之时出现校长挂帅,院长当先,主任领衔,赢者通吃,学、官、商一体化的不正常现象。正是这样的社会氛围才使得我们格外怀念那些早已逝去的老先生和他们在时所营造出来的令人向往的高校氛围。更令人敬佩的是朱老诚挚朴素的为人与丰富宽广的内心世界。

据朱老的同事回忆,与朱德祥先生相处日久,许多人都感到他是一位很重感情的人。他待人亲切,随和,诚挚。对他的师长历来十分尊重,每次谈及总是一往情深,他小学恩师王缉之,对他学习生活很关心,朱德祥上师范前,王师知道他困难,给他一个小脸盆,他铭记在心。虽然那个小盆早坏了,但朱先生以后用的脸盆都买当年那个大小。当有人访问时,朱先生还特意端出来给其看,他说:“我之所以要用这种

小盆,是因为一洗脸,就会想起我的老师,想到他对我的帮助和期望!”说着,眼睛也湿润了。王先生晚年生活较苦,朱德祥饮水思源,不时寄钱补贴,直到王老师和师母先后去世,前后达十余年。对大学时的恩师熊庆来,他怀有深厚的感情,熊先生不仅学习上引导他,而且在他的清寒公费生资格遇到意外时曾出面帮他解决。熊先生也把朱德祥当作自家人。1938年8月,朱德祥受聘到云南大学作助教,熊庆来先生对他说:“助教月薪本为80元,你是‘自家人’,给72元,因经费困难,云南师大教师凡50元以上的部分只发80%。”当年11月,疏散在路南的云南师大附中一数学教师被学生罢教,校长向校部求援,熊庆来先生要朱德祥去任课三个月。他走后,受到学生欢迎。熊庆来认为要搞好大学,必须先办好中学,去信叫朱德祥再帮助一个时期,“你是‘自家人’,再辛苦一下!”这样,他在路南呆了14个月。

后来,熊先生对别人说:“别看朱德祥没有留过学,他教书比留洋回来的还教得好!”从路南回来后,因家里人口增加,住房挤,要求增加一间,熊先生对他说:“学校房子紧,你是‘自家人’,你在中学代课,先在那里住着。”朱德祥觉得熊先生这样处理很对,“于亲不严,诸事难成”,这都是为国家、为学校着想,自己应克服困难,做好工作,以实际行动支持恩师办好学校。杨武之先生对他知遇极深,1946年重病托孤,使朱德祥留在昆明,未能再返清华,他虽失去更好的机遇,亦终生无悔。1949年杨先生去北京,又托朱德祥照顾家里,形同亲人。其后杨先生决定去上海,朱德祥破例地请假前往机场送行。此后,他每次到沪,必去拜望。记得1973年,上海复旦大学来电,告之住院多年的杨先生去世,当朱先生知道此事时浑身为之一震,被这突来的噩耗惊得好一阵说不出话来,随即发唁电。近年来有关部门约他写回忆录,他说:“要写,就写我的老师,可以写一部内容极为丰富的书。”

有人说挣钱看一个人的能力而花钱则看一个人的品质。在今天有多少海归回国捞金,教授四处兼职,领导编书摊派。当我们将这些习以为常时,我们再看看朱老的所为便知这有多么荒唐。

多年来,他省吃俭用,积攒了一万三千多元,从1978年起,他多次表示要把这笔钱捐给学校,用于发展教育事业。从1960年教育部批准将他的工资晋升为二级教授以后,他一直认为国家经济困难,人民生活水平不高,自己不该拿这么高的工资。他时时感到在天平的两边,自己的贡献太轻太轻,党和人民给自己的太多太多,受之有愧。所以一遇机会,他就解囊捐献,以期稍微缩小一点这个差距。他不同意将钱留给孩子,他说:“不能让孩子做金钱的继承人、争夺者;要让他们成为知识的继承者、求知的进取者。”20世纪80年代,他捐献一万三千余元,经院党委研究并报请上级批准,用作师院学生奖学金基金。

朱德祥同志捐款万元办教育的消息见报后,师院党委又收到一封上海科学技术出版社的来信,来信回顾了朱德祥教授多年来与该社不平常的关系,并将他原来捐献的和最近捐献的稿酬与印数稿酬六千零四十五元二角三分寄来师院,建议在征得朱德祥教授同意后,将此款作为奖学金的一部分。

看了朱先生的事迹使人想到了顾颉刚先生曾撰的一副联语自况其个性:“只会开山,未能善后;但求立业,不望兴家”。其后两句用以形容朱先生倒也贴切。其实想一想我们为什么要读大学?梅校长的是大师而非大楼论大家已经接受。但什么是大师,是那些不顾祖国危难,远避他乡,国盛时回来享福的精明人吗?是那些只顾自己的SCI论文与课题经费而置学生于不顾的学术大佬吗?是那些满脑子学而优则仕,对功名汲汲以求的学术明星吗?(最近华东理工大学张荣明教授以竺可桢教授日记为依据,从中钩沉出竺可桢与陈寅恪近半个多世纪的交往故事,写就《竺可桢与陈寅恪》一书。其中有陈寅恪对昔日领袖级数学家的一点评述,引起广泛关注。)

有些人死了,但他还活着,有些人活着,但他已经死了。我们今天再版朱老的这些著作与其说是这些知识今天还有用不如说是向其高尚的人格与精神致敬。学什么并不重要,向谁学至关重要。数学虽然是一门客观性很强的学科,但数学书的写法却因人而异,有些人投机,以多赚取版税为目的。市场上什么题材好卖就写什么,什么内容取巧就写什么,结果是风头一过便一落千丈。而朱老的作品文如其人,平实无华,给读者以数学中最重要的技巧,平实中见功力,例题虽不花哨但见真知识。叙述虽不华美但见底蕴,故其影响至深久远。

小说家郁达夫在写给杭州四大美女之首的王映霞的一首诗的结尾是这样的:

欲撰西泠才女传,苦无椽笔写兰亭。

笔者不才,为大家作序实在是力所不逮,廖廖数语是为序。

刘培杰

2016年1月1日于

哈工大

前 言

本书是笔者在给中学师生、大专师生讲课材料的基础上,加以充实、提炼、系统化后而形成的.希望它仍然能对广大中学、中专师生和爱好数学的社会青年有或多或少的帮助.

书中内容注意到深浅适度,不同基础的读者都可以从中受益.一些较难的题材,能促使我们善于思考,化难为易.全书共分十章,各章节之间的相互依赖性较小,可以前后跳动着参阅.在分析问题时注重逻辑思维和一定的技巧性,读者可各取所需.

所有例题都配有解法,一些例题还配有多种解法.请读者首先自己动脑加以解决,不得已时再参考书中的解法.经验告诉我们,这样做有助于独立工作能力的培养,从自我努力中取得成果、信心和乐趣.这样学,学得有后劲.

书上不仅指出正面的知识,也指出一些内容让我们审慎从事,力求避免陷于片面或错误.例如第2章就有这方面的论述,尤其是9.3节中例5特别能引起警惕,鼓励我们养成谦虚谨慎、认真负责的治学精神.

我们重视数学与其他学科以及数学中各个科目之间的相互促进和综合运用.某些命题的处理挑选了具有构造性的简单而漂亮的解法,如10.3定理1.

谨在此感谢哈尔滨工业大学出版社的盛情,没有他们的敦促和照顾就不会有这本书.

限于本人的水平,疏漏之处必多,恳请读者指教,以便更正提高.

目 录

第 1 章 谈谈实数	(1)
1.1 线段的度量和度量数	(1)
1.2 循环小数和分数的关系	(2)
1.3 可公度(有公度)线段	(4)
1.4 不可公度(无公度)的线段存在	(5)
1.5 有理数在实数中的地位	(6)
1.6 无理数的另一种表达形式	(10)
第 2 章 闲话初等几何	(11)
2.1 初等几何轻视不得	(11)
2.2 缜密思考、克服片面性、谨防出错	(12)
2.3 一些例题和问题	(19)
2.4 一些代数题用几何法处理反而简便	(26)
2.5 学者谈几何学习	(28)
第 3 章 运用重心概念处理几何问题	(30)
3.1 两点的重心	(30)
3.2 共线点的重心	(31)
3.3 任意质点系的重心	(32)
3.4 三角形的重心	(33)
3.5 三角形的重心到它平面上一条直线的距离	(34)
3.6 应用重心概念证明几何命题	(35)
3.7 应用重心概念求 $1^2+2^2+\cdots+n^2$ 的和	(37)
3.8 塞瓦(Ceva)定理	(39)
3.9 塞瓦定理应用之例	(40)
3.10 巧妙运用重心概念	(41)
3.11 凸图形	(43)
3.12 柯西(Cauchy)不等式及其应用	(45)
3.13 质点系关于一点的惯性矩的定义	(47)
3.14 拉格朗日定理	(47)
3.15 拉格朗日定理应用举例	(49)

3.16	利用拉格朗日定理证明不等式	(52)
3.17	曲线的重心	(55)
3.18	平面区域的重心	(57)
3.19	帕普斯—古尔丁(Pappus—Guldin)定理	(58)
第4章	参数的运用	(63)
4.1	有向线段的概念	(63)
4.2	直线的参数表示	(66)
4.3	曲线的参数表示	(67)
4.4	参数应用举例	(69)
4.5	直线系、曲线系的概念	(73)
4.6	关于圆的幂、等幂轴(根轴)	(75)
4.7	向量(矢量)	(79)
第5章	立体解析几何大要	(86)
5.1	向量	(86)
5.2	数乘向量	(87)
5.3	空间直角坐标系	(88)
5.4	向量的分解	(89)
5.5	向量的数量积(数积、内积)	(91)
5.6	向量的向量积(矢积、外积)	(93)
5.7	向量的混合积	(96)
5.8	空间坐标变换	(98)
5.9	平面的方程式	(99)
5.10	平面到空间一点的距离	(101)
5.11	直线的方程式	(102)
5.12	例题1	(104)
5.13	二次曲面	(110)
5.14	例题2	(117)
第6章	求和	(120)
6.1	数列求和	(120)
6.2	多项式、分式求和	(136)
6.3	三角函数求和	(140)
6.4	二项系数求和	(145)

第 7 章 多项式的恒等变形	(151)
7.1 余数定理及其应用	(151)
7.2 对称式和轮换对称式	(151)
7.3 一个乘法公式及其应用	(153)
7.4 轮换对称式的变形	(156)
7.5 有条件的等式	(160)
7.6 因式分解或解方程	(169)
第 8 章 根式和无理式	(175)
8.1 恒等变形	(175)
8.2 无理方程求解	(179)
第 9 章 解方程	(185)
9.1 一元方程和不等式	(185)
9.2 用代数解决几何问题	(189)
9.3 可以化为一次、二次方程解的方程	(191)
9.4 反商方程	(194)
9.5 联立方程	(196)
9.6 方程的变形、变数的代换	(199)
9.7 解方程组的一些范例	(205)
第 10 章 不等量	(217)
10.1 不等量的基本性质	(217)
10.2 关于分数的两个定理	(218)
10.3 n 个正数的等差中项(算术中项)和等比中项(几何中项)	(219)
10.4 已知 $a+b+c+\cdots$ 为定常数 s , 求 $a^m b^m c^p \cdots$ 的最大值	(221)
10.5 不等量例题	(223)
10.6 三角形中的不等量及推论	(236)
10.7 三角不等量	(247)

第1章 谈谈实数

为读者能更好地理解实数的理论,这一章用通俗的语言,借助度量、可公度、不可公度的概念,介绍实数的基本理论.这一章所介绍的内容,对初、高中数学教师的教学会有所帮助.

1.1 线段的度量和度量数

数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系,数学是从人类的实际需要中产生的,从丈量土地和测量容积,从计算时间和制造器皿产生的.人类就在这一类实践活动中逐步建立并发展了数的概念,首先是整数,然后是分数和小数,这个过程经历了漫长的岁月,直到15,16世纪,负数的知识才比较完整.

无理数的发现虽在远古,而对推广了的实数系统的完备认识则是从19世纪开始的.

可以说,正是为了各种量的度量,才建立了数的概念的.具体说,例如测量线段就引入了度量数,按情况的不同,有下述四种场合,即量数是:

(1) 整数;(2) 有限小数;(3) 无限循环小数;(4) 无限不循环小数.

我们知道,整数可以看作分数,例如 $5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2}$;有限小数也是分数,例如

$1.24 = \frac{124}{100} = \frac{31}{25} = 1\frac{6}{25}$.长1尺2寸4分的线段 l ,用尺做单位去量,它的量数是1.24;

如果用分做单位,量数就变为124,把1尺记为 u ,我们写作

$$l = 1.24u \quad \text{或} \quad \frac{l}{u} = 1.24$$

我们说, l 是 u 的1.24倍,或者 l 与 u 的比等于1.24.

可见,线段的量数就是这条线段和单位线段的比值.

再看第三种场合,即量数是循环小数的情况.设 $l = 5$ 尺,用米尺去量, $u = 3$ 尺,则量数是 $\frac{l}{u} = \frac{5}{3} = 1.666\cdots$,或 $l = 1.666\cdots \cdot u$.这样,用米做单位,量5尺的线