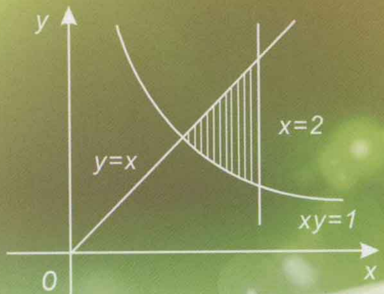
高等学校经典教材“三点”丛书

高等数学

（同济·第六版）下册

重点 难点 考点辅导与精析

主编 王香柯



西北工業大學出版社

高等学校经典教材“三点”辅导与精析丛书

高 等 数 学

（同济·第六版）下册

重点　难点　考点　辅导与精析

主　编　王香柯

编　者　郑　青

苟　素

王香柯

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是与同济大学数学系主编的《高等数学》(第六版)教材相配套，并依据国家教育部颁布的工科类本科数学基础课程教学要求和全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲编写的高等数学课程的辅导书。本书分上、下两册出版。下册内容为空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等5章。每章均由重点及知识点辅导与精析、难点及典型例题辅导与精析、考点及考研真题辅导与精析、课后习题解答等4个部分组成，具有概念清晰、方法多样、综合性强等特点，可帮助读者掌握高等数学的知识要点，学会解题的技巧与一般规律，提高分析问题和解决问题的能力。

本书可作为高等院校工科本科生学习高等数学课程的辅导书，也可供从事高等数学教学的教师、报考硕士研究生或自学高等数学的广大读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学重点难点考点辅导与精析/王香柯主编. —西安:西北工业大学出版社，2011.1

(高等学校经典教材"三点"丛书)

ISBN 978-7-5612-2958-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王… Ⅲ.①高等数学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第230488号

出版发行： 西北工业大学出版社
通信地址： 西安市友谊西路127号 邮编:710072
电　　话： (029)88493844 88491757
网　　址： www.nwpup.com
印 刷 者： 陕西向阳印务有限公司
开　　本： 727 mm×960 mm 1/16
印　　张： 52.875
字　　数： 906千字
版　　次： 2011年1月第1版 2011年1月第1次印刷
定　　价： 72.00元(本册:33.00元)

前　　言

高等数学是高等学校理工科专业的一门重要的理论基础课程，同时也是全国硕士研究生入学考试的一门统考科目。为了帮助广大读者牢固掌握高等数学的精髓和解题技巧，提高解答各种题型的能力，我们根据多年的教学经验，依据我国工科类本科数学基础课程教学要求和最新全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲（高等数学部分），与国内高校广泛采用的由同济大学数学系编写的《高等数学》（第六版）教材配套，编写了《高等数学重点难点考点辅导与精析》（上、下册）。

本书结合教材按章同步编写，各章内容按 4 个部分展开，具有以下特点。

1. 重点及知识点辅导与精析

本部分指出各章的重点概念、重点理论和方法，帮助读者理顺各章核心知识和内容，使读者对各章重点一目了然。

2. 难点及典型例题辅导与精析

本部分就本章的学习难点及学生容易出错的知识点，选取具有代表性的典型例题，通过“分析”讲述解题思路的源头，给出详细的解题过程及解题技巧，部分题目列举了多种解法，并以“注”的形式，指出容易出错的知识点，归纳总结具有共性题目的解题方法。旨在引导读者思考问题、拓展思路，使读者思路畅达，所学知识融会贯通。

3. 考点及考研真题辅导与精析

本部分精选了近 5 年部分重点高校的高等数学课程考试和考研真题，这些题目反映了不同层次高等数学的教学要求及考核水平。我们对这些题目进行分类、分析和讲解，帮助读者掌握本课程考试和考研的常见知识点和题型。

试题按先本科题后考研题的顺序编排。每道试题后面标注了试题的年份、学校或类型，如“2009年武汉大学”表示该题是2009年武汉大学本科期末考试题，“2009年数学一”表示该题目是2009年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题。

4.课后习题解答

教材中课后习题层次多、内容丰富、难易适度，比较准确地反映了学习高等数学课程应达到的水平。我们对课后习题给出解题过程或提示，难度较大的习题给出详细的解题步骤，帮助读者理解掌握每一知识点，有效地提高解题能力。

参加本书编写的教师均来自高等数学教学第一线，有着丰富的教学实践经验。下册第8章由郑青编写，第9,12章由苟素编写，第10,11章由王香柯编写，全书由王香柯统稿主编。

本书在编写过程中，参阅了大量的相关教材、教学参考书以及部分高校本科、考研试题，在此谨向各位作者及试题的命题人表示衷心的感谢。

限于水平，疏漏和不足之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

2010年4月

目　　录

第 8 章

空间解析几何与向量代数

8.1 重点及知识点辅导与精析

一、向量

1. 基本概念

(1) 向量:既有大小又有方向的量.

(2) 空间直角坐标系:在空间取定一点 O 和 3 个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$,就确定了 3 条都以 O 为原点的两两垂直的数轴,依次记为 x,y,z 轴,它们构成空间直角坐标系.

(3) 空间点 M 的坐标:(x,y,z).

(4) 两点 $M_1=(x_1,y_1,z_1)$,$M_2=(x_2,y_2,z_2)$ 的距离:

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

(5) 向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标:(x,y,z).

(6) 向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标分解式:$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

(7) 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)=(a_x,a_y,a_z)$.

(8) 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模:$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

(9) 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向余弦:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

且$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

2. 向量的坐标运算

(1) 加、减：$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$.

(2) 数乘：$\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$.

(3) 数量积：$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = |\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

(4) 向量积：$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$.

(5) 向量积的模：$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，几何上表示以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

(6) 混合积：$[\boldsymbol{abc}] = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b},\boldsymbol{c}}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$，其绝对值几何上表示以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱构成的平行六面体的体积.

3. 向量垂直、平行、共面的充分必要条件

(1)$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

(2)$\boldsymbol{a} // \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$；$\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$；存在数 λ 使 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}\ (\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0})$.

(3)$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow [\boldsymbol{abc}] = 0$.

二、平面与直线

1. 平面方程的各种形式

(1) 点法式：
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$
其中，$M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为平面上一点，$\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ 为平面的法向量.

(2) 一般式：
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

其中，$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为平面的法向量．

(3) 截距式：
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$
其中，a,b,c 分别为平面在 x 轴、y 轴、z 轴上的截距．

(4) 平面束方程：通过直线 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ 的平面束方程为
$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$
表示除 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 以外的过直线的所有平面.

2. 直线方程的各种形式

(1) 一般式(两平面交线)：
$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 为
$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\A_1&B_1&C_1\\A_2&B_2&C_2\end{vmatrix}$$

(2) 对称式(点向式方程)：
$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$
其中，$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为直线上一点，$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 为直线的方向向量.

(3) 两点式：
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$
其中，$M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为直线上的两点.

(4) 参数式：
$$\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}$$
其中，$M(x_0,y_0,z_0)$ 为直线上的已知点，$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 为直线的方向向量.

3. 平面与平面、直线与直线、平面与直线的位置关系

(1) 平面与平面：设平面

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

1) $\cos\theta = |\cos(\boldsymbol{n}_1\hat{,}\boldsymbol{n}_2)| = \dfrac{|\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|} = \dfrac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$，$\theta$ 为 π_1 与 π_2 的夹角.

2) $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2$，即 $\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

3) $\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 // \boldsymbol{n}_2$，即存在 $\lambda \neq 0$，使 $\boldsymbol{n}_1 = \lambda\boldsymbol{n}_2$，$D_1 \neq \lambda D_2$，也即 $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$；特别当 $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$ 时，π_1 与 π_2 重合.

(2) 直线与直线：设两直线 L_1 与 L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$，$\boldsymbol{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ 且 M_1，M_2 分别为 L_1 与 L_2 上的点.

1) L_1 与 L_2 异面 $\Leftrightarrow (\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2) \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$.

2) L_1 与 L_2 共面 $\Leftrightarrow (\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2) \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = 0$.

3) $\cos\theta = |\cos(\boldsymbol{s}_1\hat{,}\boldsymbol{s}_2)| = \dfrac{|\boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2|}{|\boldsymbol{s}_1||\boldsymbol{s}_2|} = \dfrac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$，$\theta$ 为 L_1 与 L_2 的夹角.

4) $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1 \perp \boldsymbol{s}_2$，即 $\boldsymbol{s}_1 \cdot \boldsymbol{s}_2 = m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$.

5) $L_1 // L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{s}_1 // \boldsymbol{s}_2$，即 $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$.

(3) 平面与直线：设直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s} = (m, n, p)$，平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$.

1) $\sin\varphi = |\cos(\boldsymbol{n}\hat{,}\boldsymbol{s})| = \dfrac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$，$\varphi$ 为 L 与 π 的夹角.

2) $L \perp \pi \Leftrightarrow \boldsymbol{s} // \boldsymbol{n}$，即 $\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$.

3) $L // \pi \Leftrightarrow \boldsymbol{s} \perp \boldsymbol{n}$，即 $Am + Bn + Cp = 0$.

4. 距离公式

(1) 点与平面的距离公式：点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

(2) 点与直线的距离公式：点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 到直线 $L:\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ 的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}$$

(3) 两异面直线间距离：两异面直线 $L_1:\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ 与 $L_2:\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ 的公垂线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2$，则 L_1 与 L_2 间的距离为

$$d=|\mathrm{Prj}_s\overrightarrow{M_1M_2}|$$

三、空间曲线及曲面

1. 曲面方程

(1) 一般式方程：$F(x,y,z)=0$.

(2) 显式方程：$z=f(x,y)$.

(3) 参数式方程：$\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}$.

2. 柱面、旋转曲面、二次曲面

(1) 柱面方程.

母线平行于 z 轴的柱面方程 $F(x,y)=0$；

母线平行于 x 轴的柱面方程 $G(y,z)=0$；

母线平行于 y 轴的柱面方程 $H(x,z)=0$.

(2) 旋转曲面方程.

设 $C:f(y,z)=0$ 为 yOz 面上的曲线，则 C 绕 y 轴旋转一周而生成的旋转曲面方程为 $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$；绕 z 轴旋转一周而生成的旋转曲面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.

(3) 二次曲面方程.

球面：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$；

椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$；

椭圆抛物面：$z=\pm\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$ 或 $y=\pm\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\right)$ 或 $x=\pm\left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\right)$；

双曲抛物面：$z=\pm\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$ 或 $y=\pm\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}\right)$ 或 $x=\pm\left(\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}\right)$；

单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 或 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 或 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$；

双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ 或 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ 或 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$.

3. 曲线方程

(1) 一般式方程：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$.

(2) 参数式方程：$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t).\\z=z(t)\end{cases}$

4. 投影柱面、投影曲线

空间曲线 C：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 消去 z 得方程 $H(x,y)=0$ 为 C 关于 xOy 面的投影柱面；$\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}$ 为 C 在 xOy 面的投影曲线. 同理也有另两个坐标面的投影.

8.2 难点及典型例题辅导与精析

例 1 已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$ 和 $M_2(3,0,2)$，计算 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 x 轴上的投影、在 y 轴上的分向量、$\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦及方向角.

分析 先计算 $\overrightarrow{M_1M_2}$，再按模、方向余弦及方向角的公式计算.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(3,0,2)-(4,\sqrt{2},1)=(-1,-\sqrt{2},1)$，它在 x 轴上的投影为数值 -1. 在 y 轴上的分向量为 $(0,-\sqrt{2},0)$ 或 $-\sqrt{2}\boldsymbol{j}$.

$\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模为 $|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{4}=2$. 故其单位向量为

$$\overrightarrow{M_1M_2}^0=\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{|\overrightarrow{M_1M_2}|}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$$

方向余弦为 $\cos\alpha=-\frac{1}{2},\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=\frac{1}{2}$.

方向角为 $\alpha=\frac{2\pi}{3},\beta=\frac{3\pi}{4},\gamma=\frac{\pi}{3}$.

例2 已知 $\boldsymbol{a}=(2,-3,6)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2,-2)$，且向量 $\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的角平分线上，$|\boldsymbol{c}|=3\sqrt{42}$，求向量 $\boldsymbol{c}$ 的坐标.

分析 由平面几何学知，菱形的角平分线与对角线重合，因此，若能求得两个模相等且分别与向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向的向量，则可用向量的加法求得 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角平分线上的向量.

解 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向的单位向量分别为

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{7}(2,-3,6),\quad \boldsymbol{b}^0=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{3}(-1,2,-2)$$

则 $\boldsymbol{a}^0+\boldsymbol{b}^0=\frac{1}{21}(-1,5,4)$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的角平分线上的向量，故

$$\boldsymbol{c}=\pm\boldsymbol{c}^0|\boldsymbol{c}|=\pm\frac{\boldsymbol{a}^0+\boldsymbol{b}^0}{|\boldsymbol{a}^0+\boldsymbol{b}^0|}|\boldsymbol{c}|=\pm\frac{(-1,5,4)}{\sqrt{42}}\times 3\sqrt{42}=\pm 3(-1,5,4)$$

例3 证明：

(1) 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面；

(2) 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$，则向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 共线.

分析 (1) 因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面 $\Leftrightarrow[\boldsymbol{abc}]=0$，所以只要考虑 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 的数量积即可；(2) 因为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 共线 $\Leftrightarrow(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$，所以通过计算 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 的向量积为零向量来证明结论.

证明 (1) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=$

$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=$

$0+\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+0=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$

又 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=0$，得 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=0$，即 $[\boldsymbol{bca}]=0$，故向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

(2) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c}$，因为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d},\quad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$$

所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}-\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，故向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$

共线.

例 4 设 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=1$, $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{3}$,求:

(1)$\cos(\widehat{\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}})$;(2)$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{c}$.

分析 利用数量积公式 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{d}|\cos(\widehat{\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}})=|\boldsymbol{d}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{c}$.

解 (1)$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}=(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=4|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=4\times4-1=15$

$$|\boldsymbol{c}|^2=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=4|\boldsymbol{a}|^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=$$

$$4|\boldsymbol{a}|^2+4|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})+|\boldsymbol{b}|^2=$$

$$4\times2^2+4\times2\times1\times\frac{1}{2}+1=21$$

故 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{21}$. 同理

$$|\boldsymbol{d}|^2=\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{d}=(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=4|\boldsymbol{a}|^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=13$$

故 $|\boldsymbol{d}|=\sqrt{13}$. 于是由向量间的夹角公式得

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}})=\frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}}{|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{d}|}=\frac{15}{\sqrt{21}\sqrt{13}}=\frac{15}{273}\sqrt{273}$$

(2)$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{c}=\dfrac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d}}{|\boldsymbol{d}|}=\dfrac{15}{13}\sqrt{13}$.

例 5 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为非零向量,且 $|\boldsymbol{b}|=1$, $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{4}$,求

$$\lim_{x\to0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|}{x}$$

分析 这是"$\dfrac{0}{0}$"型未定式,利用数量积公式消去零因式.

解 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|}{x}=$

$$\lim_{x\to0}\frac{(|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|)(|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|)}{x(|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|)}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2}{x(|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|)}=\lim_{x\to0}\frac{(\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}{x(|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|)}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+x\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}|}=\frac{2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{2|\boldsymbol{a}|}=|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=$$

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

例 6 写出下列各平面的方程.

(1) 过点 $P(-2,3,-1)$ 和直线 $\begin{cases}3x-2y+z=1\\2x-y=0\end{cases}$;

(2) 过点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$ 且与平面 $x+y+z=0$ 垂直;

(3) 过点 $M_1(0,0,4)$ 和 $M_2(1,1,5)$ 且与平面 $x+y-2z-1=0$ 成 $\frac{\pi}{6}$ 角;

(4) 过平面 $\pi_1: 2x-3y-z+1=0$ 与平面 $\pi_2: x+y+z=0$ 的交线且与平面 π_2 垂直.

分析 根据题设条件,利用平面束方程解题会更方便.

解 (1) 利用平面束方程,设所求平面 π 为

$$3x-2y+z-1+\lambda(2x-y)=0$$

由题意,点 $P(-2,3,-1)$ 在平面 π 上,因此满足平面束方程,得 $\lambda=-2$,于是所求平面方程为

$$x-z+1=0$$

(2) 过点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$ 的直线方程为

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+1}{2} \text{ 或 } \begin{cases}2x-z-1=0\\y-1=0\end{cases}$$

设过点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$ 的直线的平面束方程为

$$2x-z-1+\lambda(y-1)=0$$

其法向量与已知平面的法向量垂直,即 $(2,\lambda,-1)\cdot(1,1,1)=\lambda+1=0$,得 $\lambda=-1$,故所求平面方程为

$$2x-y-z=0$$

(3) 过点 $M_1(0,0,4)$ 和 $M_2(1,1,5)$ 的直线方程为

$$x=y=z-4 \text{ 或 } \begin{cases}x-y=0\\y-z+4=0\end{cases}$$

设所求平面方程为

$$x-y+\lambda(y-z+4)=0$$

由题意有

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{(1,\lambda-1,-\lambda)\cdot(1,1,-2)}{\sqrt{1^2+(\lambda-1)^2+(-\lambda)^2}\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}=$$

$$\frac{3\lambda}{\sqrt{12}\sqrt{\lambda^2-\lambda+1}}$$

解得 $\lambda=1$,故所求平面方程为

$$x-z+4=0$$

通过空间想象，所求平面应有两个，这里只求出一平面，应还有一个. 注意到平面束方程并未包括过该直线的所有平面方程，其漏掉了 λ 后面的平面 $y-z+4=0$，设其法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,1,-1)$，容易验证它与已知平面的夹角为 $\frac{\pi}{6}$. 即 $y-z+4=0$ 也为所求.

(4) 设过交线 L 的平面方程为

$$2x-3y-z+1+\lambda(x+y+z)=0$$

则由题意，所求平面与平面 $x+y+z=0$ 垂直，有

$$(2+\lambda,\lambda-3,\lambda-1)\cdot(1,1,1)=(2+\lambda)+(\lambda-3)+(\lambda-1)=0$$

解得 $\lambda=\frac{2}{3}$，代入所设方程，得所求平面方程为

$$8x-7y-z+3=0$$

注 本题意在突出平面束方程在解题中的应用. 实际任何平面方程都可以通过求法向量得到. 例如(4)，设已知平面 π_1 和 π_2 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$，由题意知，所求平面方程的法向量 $\boldsymbol{n}$ 同时垂直于 π_1 和 π_2 的交线 L 和 $\boldsymbol{n}_2$，而交线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 为

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=(2,-3,-1)\times(1,1,1)=(-2,-3,5)$$

则 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}_2=(-2,-3,5)\times(1,1,1)=(-8,7,1)$，在交线 L 上任取点 $\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，于是所求平面方程为

$$8x-7y-z+3=0$$

例 7 设一平面平行于 z 轴，且通过从点 $M_0(1,-1,1)$ 到直线 $\begin{cases}y-z+1=0\\x=0\end{cases}$ 的垂线，求该平面的方程.

分析 设所求平面的方程为 $Ax+By+Cz+D=0$. 由①平面与 z 轴平行；②平面过点 $M_0(1,-1,1)$；③平面过点 $M_0(1,-1,1)$ 到直线 $\begin{cases}y-z+1=0\\x=0\end{cases}$ 的垂线，即平面过其垂足这 3 个条件得出 A,B,C,D 关系的方程组.

解 先求垂足. 设 π_0 为过 $M_0(1,-1,1)$ 并垂直于直线 $\begin{cases}y-z+1=0\\x=0\end{cases}$ 的平面. 直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=(0,1,-1)\times(1,0,0)=(0,-1,-1)$ 即为 π_0 的法向量，故平面 π_0 的方程为 $0\times(x-1)+(-1)\times(y+1)+(-1)\times(z-1)=0$，即