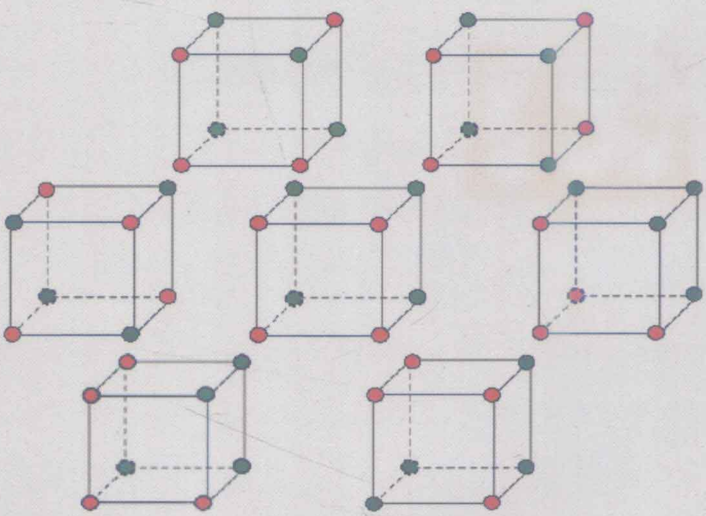
研究生精品丛书
云南大学研究生教学用书

组合数学原理与方法

蒋慕蓉　编著



云南大学出版社

研 究 生 精 品 丛 书
云 南 大 学 研 究 生 教 学 用 书

本教材由
云南大学研究生教材建设基金资助
云南省中青年学术和技术带头人后备人才项目资助
云南大学国家级特色专业“计算机科学与技术”建设项目资助

组合数学原理与方法

蒋慕蓉 编著

云南大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

组合数学原理与方法/蒋慕蓉编著．—昆明：云南大学出版社，2011
（研究生精品丛书）
ISBN 978-7-5482-0562-3

Ⅰ.①组…　Ⅱ.①蒋…　Ⅲ.①组合数学—研究生—教材　Ⅳ.①O157

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 171203 号

组合数学原理与方法

蒋慕蓉　编著

策划编辑：张丽华
责任编辑：张丽华　谢　程　潘　芮
装帧设计：丁群亚
出版发行：云南大学出版社
印　　装：云南大学出版社印刷厂
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：13
字　　数：250 千
版　　次：2011 年 9 月第 1 版
印　　次：2011 年 9 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5482-0562-3
定　　价：25.00 元

地　　址：昆明市翠湖北路 2 号云南大学英华园内
发行电话：0871-5031071　5033244
邮　　编：650091
E-mail：market@ynup.com

引　言

组合数学也称为组合学，是以代数、数论、拓扑、代数几何、概率论等为主要研究工具，以计算机科学和信息科学中的问题为研究背景，以离散结构为主要研究对象的一门数学分支.

组合数学涉及的问题相当广泛，它起源于数学娱乐和游戏. 随着计算机科学的飞速发展，组合数学技术已在计算机科学、信息处理、规划设计、实验设计、编码等方面有着广泛而重要的应用. 组合数学的思想和方法，特别是组合算法的设计，对学习者开拓思维、提高分析问题和解决问题的能力，可以起到十分重要的作用. 如果能了解和掌握组合数学的基础知识，学会利用组合数学的基本原理解决各种计数问题，指导计算机编程中的算法设计，并用于算法的运行效率和存储需求的分析，可为提高编程技巧和从事算法及计算理论的进一步研究打下坚实的基础.

组合数学研究的问题是：对象在给定模式下的配置，这种配置的存在性，所有可能配置的计数和分类，以及配置的各种性质等. 具体表现为：

(1) 存在性问题——判定某问题有解或无解，对哪一类数据是无解的；

(2) 计数问题——已知一个组合问题的解存在，有多少不同的解；

(3) 构造问题——如何构造求解算法；

(4) 优化问题——对应多个构造性算法，如何择优，使得答案尽快得到.

以下我们列举几个著名的组合数学问题，从中感受组合数学的魅力.

一、幻方的构造

幻方也称为纵横图. 一个 n 阶幻方是指将 $1,2,\cdots,n^2$ 共 n^2 个整数填入到 $n\times n$ 的棋盘中，使得每行、每列以及两条对角线上的元素之和均相等. 例如 3 阶幻方和 4 阶幻方如图 1 所示：

4	9	2
3	5	7
8	1	6

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

图 1　3 阶幻方和 4 阶幻方

在一个 n 阶幻方中，所有的整数之和为 $1+2+\cdots+n^2=\frac{n^2(n^2+1)}{2}$. 因为每行、每列的元素之和是相等的，一共有 n 行和 n 列，所以每行或每列的元素之和均为 $\frac{n(n^2+1)}{2}$.

在组合学中，幻方讨论的问题是：n 取何值时 n 阶幻方存在？不同的 n 阶幻方有多少种？并给出构造 n 阶幻方的一般方法.

显然，2 阶幻方是不存在的(其行和列的元素之和应该是 5). 对于其他的 n，都可以用某种方式(如拉丁方)构造幻方，因此 $n(n\geqslant 3)$ 阶幻方都是存在的. 3 阶幻方只有 1 种，4 阶幻方有 880 种(Frénicle de Bessy，1963)，5 阶幻方有 275 305 224 种(Richard Schroeppel，1973)，6 阶幻方的精确数目至今未知，Pinn 和 Wieczerkowski 在 1998 年利用 Monte Carlo 模拟和统计学方法估计得出 6 阶幻方的数目约在 $1.7743\times10^{19}\sim1.7766\times10^{19}$ 之间.

最简单的幻方是平面幻方. 平面幻方的构造，分为奇数和偶数情况.

对于一般的奇数阶幻方构造方法，最著名是 1687 年由法国驻泰国大使 de la Loubère 从泰国带回法国从而传播开来的，称为暹罗法(Siamese Method)或连续摆数法，其法则如下：①

把 1 放在第一行正中间格内，从它开始，按对角线方向(例如从左下到右上的方向)把其他数按从小到大的顺序放入各方格中，如果碰到顶，则折向底；如果到达右侧，则转向左侧；如果进行中轮到的方格已经有数或到达右上角，则退至前一格的下方.

按照该法则，我们很容易得到 5 阶和 7 阶幻方的构造，如图 2 所示.

① 见吴鹤龄编著《幻方及其它》，科学出版社，2004 年.

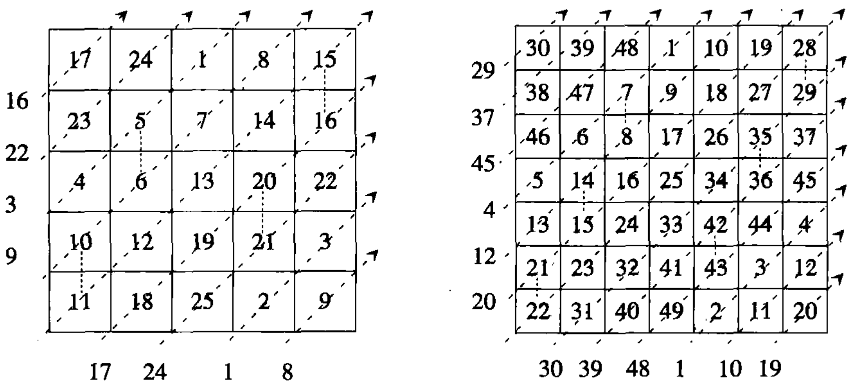


图2　5 阶和 7 阶幻方的构造

对于偶数阶幻方的构造方法，分为单偶数和双偶数两种情形：

（1）双偶数阶幻方，即 $n=4k, k=1,2,\cdots$，采用对角线元素交换法，由我国南宋数学家杨辉于 1275 年给出．先按照从左到右、从上到下的次序把 $1,2,\cdots,n^2$ 填入到方格中，将方格分成若干 4×4 的小方格，在每一个小方格中，按中心对称原则交换两条主对角线上的元素，然后在整个方格中把同一折对角线上下两部分互相交换位置，即可得到双偶数阶幻方的构造．如图 3 的 4 阶幻方和图 4 的 8 阶幻方构造．

（2）单偶数阶幻方，即 $n=4k+2, k=1,2,\cdots$，其构造方法由 Ralph Strachey 在 1918 年给出，步骤如下：

①把方阵顺序分为 A，B，C，D 四个区域，每一个区域都是奇数阶，先按照连续摆数法依次在 A，D，B，C 按奇数阶幻方的填法填数；

②在 A 区的中间行、中间格开始，按自左向右的方向标出 k 格，A 区的其他行则标出最左边的 k 格，将这些格和 C 区相对位置上的数互换位置；

③在 B 区任一行的中间格，自右向左标出 $k-1$ 列，将这些格和 D 区相对位置上的数进行交换，就形成幻方．图 5 给出 6 阶幻方的构造过程．

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

图3　4 阶幻方的构造

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

图 4　8 阶幻方的构造

8	1	6	26	19	24
3	5	7	21	23	25
4	9	2	22	27	20
35	28	33	17	10	15
30	32	34	12	14	16
31	36	29	13	18	11

A B C D

35	1	6	26	19	24
3	32	7	21	23	25
31	9	2	22	27	20
8	28	33	17	10	15
30	5	34	12	14	16
4	36	29	13	18	11

图 5　6 阶幻方的构造

20 世纪 90 年代，Allen Adler 发明了一种任意阶幻方的构造方法，即利用两个低阶幻方“相乘”产生一个高阶幻方，并证明该方法满足结合律，以此获得更高阶的幻方．

除了自然数构成的幻方外，还有 C. Planck 在 1919 年提出的“普朗克幻方”，H. E. Dudeney 在 1900 年提出的“素数幻方”和“合数幻方”等．

目前，幻方在人工智能、图论、对称论、控制、信息安全、网络结构等方面都有广泛的应用．

二、四色问题的证明

四色问题又称四色猜想，它的证明是世界近代三大数学难题之一(另两个数学难题是：费马定理和哥德巴赫猜想)．

四色问题的内容是：在一张世界地图上，如果用一种颜色对一个国家着色，只需要四种颜色就能保证每两个相邻的国家的颜色不同.

四色问题的提出来自英国.1852 年，毕业于伦敦大学的 Francis Guthrie 到一家科研单位做地图着色工作，发现有趣的现象："每幅地图都可以用四种颜色着色，使得有共同边界的国家都被着以不同的颜色."这个现象能否从数学上加以严格证明呢？他和他在大学读书的弟弟决心试一试，但没进展.1852 年 10 月 23 日，他的弟弟就这个问题的证明请教了他的老师——著名的数学家 De Morgan，De Morgan 也没找到解决问题的途径，于是写信向自己的好友——著名数学家 Hamilton 爵士请教.Hamilton 接到信后，对四色问题进行研究，但直到 1865 年去世时也没能解决.1872 年，英国当时最著名的数学家 Cayley 正式向伦敦数学会提出了这个问题，于是四色问题成为全世界数学界关注的问题，世界上许多一流的数学家都纷纷参加了四色猜想的大会战.1890 年，在牛津大学读书的年仅 29 岁的 Heawood 证明了用 5 种颜色可以对地图着色.1976 年 6 月，美国伊利诺大学的教授 Haken 和 Appel 在两台不同的电子计算机上，用了 1200 个小时和 100 亿个分离的逻辑判断，完成了四色定理的证明，轰动了世界，成为机器证明最著名的典范.1997 年，Haken 的证明被美国四名科学家 N. Robertson、D. P. Sanders、P. D. Seymour 和 R. Thomas 简化，但简化的证明仍需要大量的计算机检验.

目前许多数学家还在寻找更为简单的书面证明方法.

四色问题不仅丰富了图论的内容，在有效设计航空班机日程表、设计计算机编码程序上都起到了推动作用.

三、棋盘的完美覆盖

考虑一张普通的国际象棋棋盘，它被分成 8×8 的 64 个方格.设有形状一样的多米诺牌（1×2 或 2×1），每张牌恰好覆盖棋盘上相邻的两个方格.如果能把 32 张多米诺牌摆放到棋盘上，使得任何两张多米诺牌均不重叠，每张多米诺牌覆盖两个方格，并且棋盘上所有的方格都被覆盖住，称为棋盘的完美覆盖.

组合学讨论的问题是：(1)如果存在完美覆盖，那么有多少种不同的完美覆盖？(2)对于一般的 $m\times n$ 棋盘，当 m 和 n 取何值时，存在完美覆盖？若棋盘去掉一副对角上的两个方格，是否还存在完美覆盖？

1961 年，M. E. Fischer 证明了国际象棋棋盘共有 $2^4\times 901^2=12\,988\,816$ 种不同的完美覆盖.

对于一般的 $m\times n$ 棋盘，当且仅当 m 和 n 中至少有一个是偶数时，$m\times n$ 棋盘

存在完美覆盖.

若去掉棋盘一副对角上的两个方格，就不存在完美覆盖了．因为若将棋盘中的方格交替地着成黑色和白色，则两副对角上的方格颜色是一样的，去掉其中一副对角上的两个方格，就相当于去掉同样颜色的两个方格(图6)，此时有

31 ■□ ≠ 32 ■ + 30 □ 或者 31 ■□ ≠ 30 ■ + 32 □

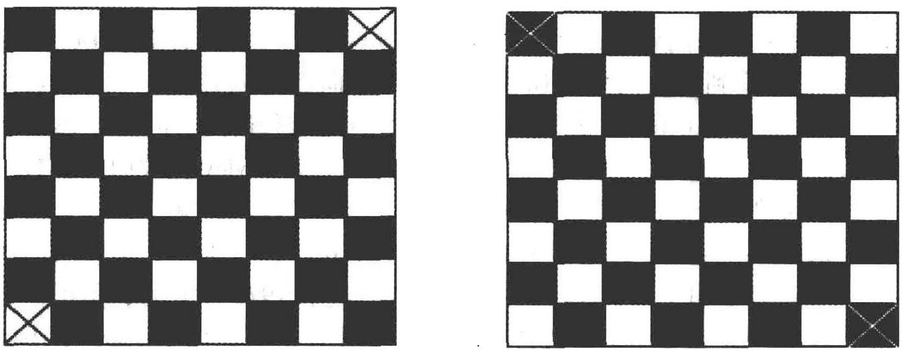


图6　国际象棋棋盘

更一般的，若用 b 个 1×1 的方格并排连接成 $1\times b$ 的方格条代替多米诺牌，称这些方格条为 b - 牌．则一张 $m\times n$ 棋盘有一个 b - 牌的完美覆盖，当且仅当 b 是 m 或 n 的一个因子.

棋盘覆盖问题，对于学习和研究经典算法、设计网络优化、处理加密文件等有重要的帮助.

组合数学的基本求解方法大致可以分为两类：一是从组合学基本概念、基本原理出发的常规方法，如容斥原理、鸽巢原理、递归方法、生成函数等，该类方法通常比较刻板，适用于求解标准类型的问题；另一类是与组合数学概念无关的非常规方法，如数学归纳法、一一对应技术、殊途同归方法、数论方法等，适用于求解那些需要独立思考、创新分析的非标准类型问题求解.

云南大学计算机专业自从开始招收研究生以来，就确定"组合数学"是本专业的学位基础课程．近年来，又在全校本科生中开设选修课程．在教学过程中，我们发现现有国内外同类教材内容丰富但难以掌握，有的章节内容过多但讲解简单，学生在学习过程中不仅感到课程难学、习题难做，而且不知如何运用，需要购买相关的习题解答来辅助学习和完成作业．由于组合数学讲究思想方法，注重解题技巧，为此，我们采用问题提出、逐步深入的教学模式，按照问题分析、原理介绍、计算求解、拓展应用等步骤，逐步深入地介绍组合数学的基本

原理、思想方法及解题技巧，并附以大量的例题讲解，使学生在每一章节的学习中能很快了解和掌握本章知识点，顺利完成作业．经过多年的教学经验积累，我们在不断补充和完善授课教案的基础上，形成本书体系．

全书共分为 9 章：

第一章：排列与组合．介绍两个基本的计数原理、排列与组合的定义及其生成算法，通过例题讲解计数问题的实际应用．

第二章：二项式系数．介绍与组合数有关的二项式定理和二项式系数的基本性质，然后给出多项式定理和牛顿二项式定理，最后进行例题讲解．

第三章：容斥原理及其应用．介绍容斥原理和广义容斥原理，然后介绍容斥原理求解错排问题和有限制的排列问题中的方法，最后通过例题讲解说明容斥原理的实际应用.

第四章：递推关系．介绍递推关系的建立和递推关系的求解方法，然后介绍常系数线性齐次递推关系的求解与常系数线性非齐次递推关系的求解，最后通过例题讲解介绍递推关系的应用．

第五章：生成函数．介绍生成函数的定义和性质，然后介绍生成函数在计数中的应用——正整数的拆分、分配问题、指数型生成函数、集合的划分与第二类 Stirling 数，通过例题讲解如何利用生成函数求解递推关系．

第六章：鸽巢原理与 Ramsey 数．介绍鸽巢原理和 Ramsey 数与 Ramsey 定理，然后通过例题讲解，阐述鸽巢原理的应用．

第七章：Burnside 引理和 Pólya 定理．介绍群的基本概念，然后引入置换群，随后解释 Burnside 引理和 Pólya 定理的含义，最后通过例题讲解，说明 Burnside 引理和 Pólya 定理的应用．

第八章：组合设计．通过组合学中两个著名问题——Kirkman 女生问题和 36 名军官问题，介绍 Steiner 三元系和拉丁方的概念与性质．

第九章：组合算法在程序设计中的应用．

本书在编写过程中，原理和方法部分参阅了国内外许多优秀教材及其习题解答，许多例题的解答方法也直接出自于这些教材中，如卢开澄老师的《组合数学》(第三、四版)，徐胤龙老师的《组合数学引论》(第一、二版)，王元元老师的《组合数学理论与题解》，徐利治老师的《计算组合数学》，陈景润老师的《组合数学简介》，国外原版教材《组合数学》(Brualdi 著)和《应用组合数学》(Roberts 等著)，曹汝成老师的《组合数学习题解答》以及匡正老师的《组合数学习题精解》等，在程序设计方面参阅了(美)J. Richard 的《离散数学》(第五版)，吴文虎老师的《组合数学的算法与程序设计》以及吴文虎老师主编孙贺编著的《程

序设计中的组合数学》等，还有一些网络上收集到的部分高校课程教案，在此对他们一并表示感谢，前辈们渊博的知识、缜密的思维以及流畅的文笔都是作者深深敬重和仰慕的.

同时，本书在完成过程中还得到云南大学信息学院、云南大学研究生部、云南大学出版社的大力支持，更得到云南大学研究生教材建设基金和云南大学国家级特色专业“计算机科学与技术”建设项目以及云南省中青年学术和技术带头人后备人才项目的大力资助，研究生周军、陈林、康俊芳、郭晓洁、常葆稷、郭瑞林、张则宪等为本书的排版和打印做了大量的工作，在此也一并表达深深的谢意.

最后，作者也深深感谢家人的支持和鼓励.

由于作者水平有限，书中难免存在缺点和错误，恳求读者批评指正.

作　者

2011 年 05 月于云南大学

目　　录

第 1 章 排列与组合

排列与组合统称为计数问题，是组合学中最基本的问题之一，它是求解满足某些特定性质的对象个数并将其完全列举出来．例如，在 n 个数中取 r ($r \leqslant n$) 个数，有多少种选取方式？当限制其中有 $q(q \leqslant r)$ 个数不能取时，又有多少种选取方式？并把这些方式都列举出来．

使用计算机求解计数问题的意义是：

(1) 对于运算量或数据量较大的计数，计算机编程运算比手工计算要精确和简捷得多；

(2) 计算机既能够依据公式计算出具有某种特性的对象有多少，又能够把它们完全列举出来．

本章主要介绍两个基本计数原理——加法原理和乘法原理、排列(线排列、圆排列、重排列)与组合(单组合、重组合)的定义、性质及其生成算法，通过例题讲解计数问题的实际应用．

1.1 加法原理与乘法原理

加法原理和乘法原理是两个既浅显又十分重要的问题．应用加法原理的技巧是将计数的集合划分成几个子集合；应用乘法原理的关键是设计计数的步骤．

加法原理： 若具有性质 A 的对象有 m 个，具有性质 B 的对象有 n 个，则具有性质 A 或性质 B 的对象有 $m+n$ 个．

用集合语言描述加法原理则可叙述如下：

若 n 个有限集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，满足 $A_i \cap A_j = \Phi$， $(1 \leqslant i \neq j \leqslant n)$，则

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

【例题 1.1.1】 某学生希望选修一门数学课程或者一门生物课程，但不能两者都选．如果有 4 门数学课程和 3 门生物课程可供选择，则该学生共有 4 +3 =7 种选择方式．

【**例题** 1.1.2】 在所有六位二进制字符串中，至少有四位连续是 1 的二进制数有多少个？

解：将所有满足条件的二进制字符串分成 3 类：

(1) 恰有四位连续的 1，它们可能是 ×01111，011110，11110×，其中"×"表示数为 0 或者为 1. 在这种情况下，共有 5 个不同的六位二进制字符串 .

(2) 恰有五位连续的 1，它们可能是 011111，111110，只有 2 个不同的六位二进制字符串 .

(3) 恰有六位连续的 1，为 111111，只有 1 个六位二进制字符串 .

由加法原理知，共有 5 +2 +1 =8 个满足题意要求的六位二进制字符串 .

需要注意的是：在运用加法原理时，必须考虑集合 A_i 与 $A_j(i \neq j)$ 的相互独立性，即 $A_i \cap A_j = \Phi$. 当该条件不满足时是不能使用的，例如：小于 10 的偶数有 4 个，为 2，4，6，8；小于 10 的素数也有 4 个，为 2，3，5，7；但是小于 10 或是偶数或是素数的整数不是 8 个而只有 7 个，即 2，3，4，5，6，7，8.

乘法原理：若具有性质 A 的对象有 m 个，具有性质 B 的对象有 n 个，则具有性质 A 与性质 B 的对象有 $m \times n$ 个 .

用集合语言描述乘法原理则可叙述如下：

若 n 个有限集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，则 $\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| = \prod_{i=1}^{n} A_i$.

【**例题** 1.1.3】 若计算机密码是由数字 0,1,…,9 和小写字母 $a, b, c, \cdots, z$ 构成的六位字符串，则允许字符重复的密码有多少个？

解：设 A 为可出现重复字符的密码集合，U 为六位字符构成的密码集合，则 $\bar{A}$ 为不能出现重复字符的密码集合 . 由乘法原理可知

$$|U| = 36^6 = 2\ 176\ 782\ 336$$

$$|\bar{A}| = 36 \times 35 \times 34 \times 33 \times 32 \times 31 = 1\ 402\ 410\ 240$$

于是有 $|A| = |U| - |\bar{A}| = 2\ 176\ 782\ 336 - 1\ 402\ 410\ 240 = 774\ 372\ 096$.

【**例题** 1.1.4】 从 1 000 到 9 999 的整数中，问：(1) 含有 5 的数有多少个？(2) 含有多少个百位和十位数字均为奇数的偶数？(3) 各位数字都不相同的奇数有多少个？

解：(1) 方法一：当第四位数为 5 时，有 $9 \times 10 \times 10 \times 1 = 900$ 个 . 当第四位数非 5 而第三位数是 5 时，有 $9 \times 10 \times 1 \times 9 = 810$ 个；当第三、四位数非 5 而第二位数为 5 时，有 $9 \times 1 \times 9 \times 9 = 729$ 个；只有第一位数是 5 而其他数非 5 时，有 $1 \times 9 \times 9 \times 9 = 729$ 个 . 由加法原理得知，满足要求的数共有 $900 + 810 + 729 + 729 = 3\ 168$ 个 .