高等院校计算机教材

Discrete Mathematics and Its Applications

离散数学及其应用

张清华　蒲兴成　尹邦勇　刘　勇　编

清华大学出版社

Discrete Mathematics and Its Applications

离散数学及其应用

张清华 蒲兴成 尹邦勇 刘 勇 编

清华大学出版社
北 京

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签，无标签者不得销售。
版权所有，侵权必究。侵权举报电话：010-62782989　13701121933

图书在版编目(CIP)数据

离散数学及其应用/张清华等编. --北京：清华大学出版社，2016
ISBN 978-7-302-41805-4

Ⅰ.①离…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①离散数学－高等学校－教材　Ⅳ.①O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 247972 号

责任编辑：陈　明
封面设计：傅瑞学
责任校对：王淑云
责任印制：何　芊

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　邮　　编：100084
　　社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京密云胶印厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　印　张：14.25　　字　　数：343 千字
版　　次：2016 年 7 月第 1 版　　印　　次：2016 年 7 月第1 次印刷
印　　数：1～2500
定　　价：29.00 元

产品编号：065006-01

前　言

离散数学是现代数学的一个重要分支。离散数学课程是计算机专业的核心课程、信息类专业的必修课程以及部分工科类专业的选修课程。该课程以研究离散量的结构和相互间的关系为主要目标，其研究对象一般是有限个或可数个元素，因此它充分描述了计算机科学离散性的特点。离散数学是随着计算机科学的发展而逐步建立的，它形成于 20 世纪 70 年代初期，是一门新兴的工具性学科。近年来，计算机科学与技术正在以惊人的速度发展，对人类社会的各个领域产生着日益广泛和深入的影响。离散数学，作为计算机科学与技术的数学基础，也因此更加显示出其重要性。计算机科学之所以能取得这样辉煌的成就，与其具有雄厚的理论基础——离散数学是分不开的。离散数学不仅是计算机科学基础理论的核心课程，也是人工智能的数学基础之一。该课程与计算机科学中的数据结构、操作系统、编译理论、数据库、算法的分析与设计、人工智能、计算机网络、算法分析、电路分析与逻辑设计等理论课程联系紧密，是这些课程的先修课程。通过离散数学的学习，不但可以掌握处理离散结构的描述工具和方法，为后续课程的学习创造条件；而且可以提高抽象思维和严格的逻辑推理能力，为将来参与创新性的研究和开发工作打下坚实的基础。

多数工科专业的离散数学课程主要内容包括 4 个部分：数理逻辑、集合论、代数系统、图论初步。(1)数理逻辑是逻辑学的一个核心内容，它是研究思维形式及思维规律的基础，也就是研究推理过程的规律的科学。数理逻辑是用数学方法来研究推理的规律，这里所指的数学方法，就是引进一套符号体系，在其中表达和研究推理的规律。(2)集合论的起源可以追溯到 19 世纪末期，29 岁的德国数学家康托尔在数学杂志发表了关于无穷集合论的第一篇革命性文章，奠定了集合论的基础。集合不仅可以用来表示数及其运算，更可以用于非数值信息的表示和处理。集合论在程序语言、数据结构、编译原理、数据库与知识库、形式语言和人工智能等领域中得到了广泛的应用，并且理论本身还得到了进一步发展，如 Zadeh 提出的模糊集理论和 Pawlak 提出的粗糙集理论。(3) 代数系统是抽象代数中的一个重要内容，除了数理逻辑外，对计算科学最有用的数学分支就是代数，特别是抽象代数，在许多实际问题的研究中都需要用某种数学结构来构造数学模型。代数系统就是一种很重要的数学结构，主要包括半群、群、格与布尔代数等。半群理论在自动机理论和形式语言中发挥了重要作用；有限域理论是编码理论的数学基础，在通信中起着重要的作用；格和布尔代数是电子线路设计、电子计算机硬件设计和通信系统设计的重要工具。(4)图论是离散数学的重要组成部分，是近代应用数学的重要分支。1736 年瑞士数学家欧拉发表了图论的首篇论文——《哥尼斯堡七桥问题无解》，标志着图论诞生。作为描述事务之间关系的手段或称工具，图论在许多领域，诸如计算机科学、物理学、化学、运筹学、信息论、控制论、网络通信、社

会科学以及经济管理、军事、国防、工农业生产等方面都得到广泛的应用。也正是在众多方面的应用中,图论自身才得到了非常迅速的发展。

本书根据工科学生特别是计算科学与技术专业学生的特点,选取离散数学的重要内容,结合编者多年离散数学教学经验,在学校离散数学重点课程建设的支持下,基于此前出版的《离散数学》(机械工业出版社,2010 年)教材,博采国内众多其他教材的长处并借鉴国外教材的特色,结合教学团队在教学和科研方面的成果编写而成。本书力求在介绍离散数学基础知识的前提下,简明扼要、通俗易懂地介绍相关内容,注重理论联系实际,融入启发式教学理念,使得教师教学和学生自学浑然一体,着重培养学生的创新能力和自学能力。本书的特点如下:内容深入浅出,知识点脉络清晰,通俗易懂;基础理论与实际问题相结合,变抽象思维为形象思维,提高学生创新能力和自学能力;重点突出知识的逻辑结构,注重培养学生的数学思维能力;编写内容普适性强,便于工科学生考研复习;书后附习题参考答案,便于学生掌握自己的学习情况。

全书共分为 4 个部分。第一部分由张清华编写,第二部分由尹邦勇和张清华编写,第三部分由刘勇编写,第四部分由蒲兴成和张清华编写。第一部分是数理逻辑,分为两章,第 1 章介绍命题逻辑,第 2 章介绍一阶谓词逻辑;第二部分是集合论初步,分为两章,第 3 章介绍集合初步,第 4 章介绍二元关系与函数初步;第三部分是代数结构,分为两章,第 5 章介绍代数系统,第 6 章介绍几个典型的代数系统;第四部分是图论,主要介绍图论的基础知识和几种典型的图。

本书的出版得到重庆邮电大学教材建设项目(JC2014-13)、重庆市高等教育教学改革研究重点项目(No. 1202033)和重庆市“三特行动计划”信息与计算科学专业建设项目等的资助。全书的内容修改和出版还得到杨春德、胡学刚、郑继明、李红刚、陈六新、李永红、刘显全、何承春等老师和部分研究生同学(谢秦、杨陈陈、夏德友等)的支持和帮助。特别感谢吴慧莲老师为本书提出的宝贵修改意见和建议。感谢为本书出版作出积极贡献和支持的同志们!最后,还要特别感谢清华大学出版社的大力支持,使得本书得以顺利出版。

本书主要内容在重庆邮电大学等多所高校多次讲授,反复修改,但由于水平所限,加之时间仓促,书中难免有不妥或错误之处,恳请广大读者批评指正。

作 者

2016 年 1 月于重庆

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

目　　录

第三部分 代数结构

第四部分 图 论

第一部分 数理逻辑

数理逻辑又称符号逻辑、理论逻辑，它是数学的一个分支，是用数学方法研究逻辑或形式逻辑的学科，其研究对象是对证明和计算这两个直观概念进行符号化以后的形式系统。数理逻辑是数学基础的一个不可缺少的组成部分。虽然名称中有逻辑两字，但数理逻辑并不属于单纯逻辑学范畴。数理逻辑近年来发展特别迅速，主要原因是这门学科对于数学其他分支，如集合论、数论、代数、拓扑学等的发展有重大的影响，特别是对计算机科学的发展起了推动作用。反过来，其他学科的发展也推动了数理逻辑的发展。数理逻辑与计算机科学关系密切，在计算机科学的许多领域，如逻辑设计、人工智能、语言理论、程序正确性证明、可信计算理论等方面有着重要作用。这部分介绍计算机科学中数理逻辑基础知识——命题逻辑和谓词逻辑。

第1章 命题逻辑

命题逻辑也称命题演算或语句演算，它研究以命题为基本单位构成的前提和结论之间的推导关系。命题逻辑是知识形式化表达和推理的基础框架。如何利用形式化的命题推导出新的命题在人工智能领域是一个重要内容。本章主要介绍命题逻辑的基本知识、基本思想和基本方法。主要内容包括命题及联结词、命题公式、命题等值演算、命题公式的范式和推理理论。

1.1 命题及联结词

1. 命题及其表示

命题是命题逻辑中最为基础的概念。所谓命题，是指具有确定真值的陈述句，即陈述句是真是假二者必居其一，也只居其一。也就是说，凡是能分辨其真假的陈述句就是命题，无所谓是非的句子，如感叹句、疑问句、祈使句等都不能作为命题。作为命题的陈述句所表达的判断结果称为命题的真值，真值只取两个值：真或假。真值为真的命题称为真命题，真值为假的命题称为假命题。任何命题的真值都是唯一的。下面举出一些例子。

(1) 重庆是直辖市。

(2) 教师是人类灵魂的工程师。

(3) 4 是素数。

(4) $1+2=3$。

(5) 2100 年的春节是晴天。

(6) 火星上有生物。

(7) 请安静！

(8) 今天天气多好啊！

(9) 现在是几点钟？

(10) 我正在说谎。

(11) $x-y=3$。

在这些例子中，(1)～(6)都是命题。其中(1)、(2)、(4)是真命题，(3)是假命题。至于(5)和(6)，其真假值是确定的，只是现在无法知道，因此它们都是命题。(7)～(11)都不是命题。原因在于(7)是祈使句，(8)是感叹句，(9)是疑问句，而(10)是悖论。若(10)的真值为真，即“我正在说假话”为真，也就是我说的是假话，因此(10)又是错误的；反之，若(10)的真

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

值为假，即“我正在说谎”为假，也就是我在说真话，因此(10)的真值应为真。像(10)这样既不为真又不为假的陈述句不是命题，这种陈述句称为悖论。凡是悖论都不是命题。(11)中的 x,y 的值不确定，某些 x,y 使 $x-y=3$ 为真，某些 x,y 使 $x-y=3$ 为假，即 $x-y=3$ 的真假随 x,y 的变化而变化。因此，$x-y=3$ 的真假无法确定，所以 $x-y=3$ 不是命题。

命题的“真”和“假”称为命题的“真值”，分别用 T(True)和 F(False)来表示，有时用 1 和 0 来分别表示真和假。换句话说，命题的值域为{T,F}或{1,0}。没有特别说明，T 和 1 可以通用，F 和 0 也可以通用。

一般来说，用字母 P,Q,R 等表示命题，称为命题标识符，也可以用[1]，[2]等来表示命题。例如：

P：今天是星期一。

[1]：2008 年北京举办奥运会。

命题标识符分为命题变量(命题变元)和命题常量。命题变量可以表示任何命题，相当于圆柱的体积公式 $V=\pi r^2 h$ 中的 r 和 h，命题常量表示一个固定的命题，相当于圆柱体积公式中的字母 π。

命题分为简单命题和复合命题。简单命题(又称为原子命题)是指不能分解为更简单的命题。复合命题是指由联结词、标点符号把几个原子命题联结起来的命题。如命题“如果 2 是素数，则 3 也是素数”这个命题中通过“如果……，则……”这个联接词组合而成，是复合命题，而“2 是素数”和“3 是素数”是简单命题。

2. 命题联结词

在日常语言中，一些简单的陈述句，可以通过某些联结词联结起来，组成较为复杂的语句。例如可以说：“如果下星期日是晴天，那么我就去春游。”这里就是用“如果……，那么……”把两个陈述句“下星期日是晴天”和“我去春游”联结起来组成的一个新复合命题。在日常语言中还有许多联结词，如“不”、“并且”、“或者”、“当且仅当”、“只要……就……”、“除非……否则……”等都是联结词。使用它们可以将一个命题加以否定或将两个命题联结起来得到新的复合命题。但是，在日常语言中，这些联结词的使用一般没有严格的定义，有时就显得不很准确，常常带有二义性。在数理逻辑中，也引入联结词，这些联结词是从日常生活所使用的联结词抽象出来的，它有严格的意义。因此，与日常生活中所使用的联结词含义并不完全相同，需要仔细区分和识别。

下面介绍数理逻辑中常用的 5 种常用的联结词。

(1)“否定”联结词，记做“$\neg$”，它是一元运算。相当于“非”、“不”、“否定”等词。给定一个命题 P，它的否定记为“$\neg P$”，读作“非 P”，它的真值情况如表 1-1 所示。

表 1-1 否定的真值

P	$\neg P$
1	0
0	1

由 $\neg P$ 的真值表可知，$\neg P$ 的真值是 1，当且仅当 P 的真值是 0。$\neg P$ 的真值是 0，当且仅当 P 的真值是 1。

(2)"合取"联结词，记作"$\wedge$"，它是二元运算。相当于"且"、"和"、"与"，也称为"与"。设 P 和 Q 是命题，利用"合取"联结词可将 P 和 Q 联结起来，组成命题"$P \wedge Q$"，读作"P 与 Q 的合取"或"P 与 Q"。$P \wedge Q$ 的真值如表 1-2 所示。

表 1-2 合取的真值

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

例 1.1 小刚和小明都是大学生。

解 设 P：小刚是大学生，Q：小明是大学生，则原命题符号化为 $P \wedge Q$。

例 1.2 小丽既聪明，又能干。

解 设 P：小丽聪明，Q：小丽能干，则原命题符号化为 $P \wedge Q$。

例 1.3 小刚聪明但不努力。

解 设 P：小刚聪明，Q：小刚努力，则原命题符号化为 $P \wedge \neg Q$。

例 1.4 小刚和小明是同学。

解 这是一个原子命题，不能分解为更细的命题。

(3)"析取"联结词，记作"$\vee$"，它是二元运算。相当于"或"、"或者"。利用此联结词可将命题 P 和 Q 联结起来，组成命题"$P \vee Q$"，读作"P 和 Q 的析取"或者"P 或 Q"。它的真值如表 1-3 所示。

表 1-3 析取的真值

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

联结词析取的意义与日常生活中所使用的"或"意思并不完全相同。在日常生活中，"或"实际上分为"排斥或"和"可兼或"，还有一种是描述模糊数据。这里析取表示"可兼或"。

例 1.5 今天晚上我在家看电视或听音乐。

解 设 P: 今天晚上我在家看电视,Q: 今天晚上我在家听音乐,则原命题符号化为 $P \vee Q$。

例 1.6 从重庆到北京的 T10 次列车是中午 1 点或 1 点 30 分开。

解 该命题中的“或”不是“可兼或”,我们用一种等价形式来代替。

设 P: 重庆到北京的 T10 次列车是中午 1 点开,Q: 重庆到北京的 T10 次列车是中午 1 点 30 分开,则原命题符号化为 $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$。

例 1.7 小刚是山东人或山西人。

解 设 P: 小刚是山东人,Q: 小刚是山西人,则原命题符号化为 $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$。该命题中的“或”不是“可兼或”,不能直接用析取联结词。

例 1.8 小刚是有 20 岁或 30 岁。

这是一个原子命题,这里的“或”表示一个模糊数据。

在遇到含有“或”的命题符号化时,要仔细分清它是“可兼或”、“排斥或”还是表示模糊数的“或”,本书中析取联结词表示“可兼或”。

(4) “单条件”联结词,记作“$\rightarrow$”,它是二元运算。相当于“如果……那么……”、“因为……所以……”、“只要……就……”等。也可称为“蕴涵”。“$P \rightarrow Q$”读作“如果 P,那么 Q”,其中 P 称为前件,Q 称为后件。其真值如表 1-4 所示。

表 1-4 单条件的真值

P	Q	$P \rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

例 1.9 如果天下雨,那么我们在室内活动。

解 设 P: 天下雨,Q: 我们在室内活动,则原命题符号化为 $P \rightarrow Q$。

例 1.10 只要天下雨,我们就在室内活动。

解 设 P: 天下雨,Q: 我们在室内活动,则原命题符号化为 $P \rightarrow Q$。

例 1.11 因为天下雨,所以我们在室内活动。

解 设 P: 天下雨,Q: 我们在室内活动,则原命题符号化为 $P \rightarrow Q$。

在实际的语言中，很多联结词可以转化为用单条件，但是要注意前件和后件的关系。

例 1.12 只有天下雨，我们才在室内活动。

解 设 P：天下雨，Q：我们在室内活动，则原命题符号化为 $Q \to P$。

例 1.13 仅当天下雨，我们在室内活动。

解 设 P：天下雨，Q：我们在室内活动，则原命题符号化为 $Q \to P$。

例 1.14 除非天下雨，否则我们不在室内活动。

解 设 P：天下雨，Q：我们在室内活动，则原命题符号化为 $\neg P \to \neg Q$，或者 $Q \to P$。

(5)"双条件"联结词，记作"$\leftrightarrow$"，它是二元运算。相当于"当且仅当"、"充要条件"等。记为"$P \leftrightarrow Q$"，读作"P 当且仅当 Q"。它的真值如表 1-5 所示。

表 1-5 双条件的真值

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

例 1.15 $1+1=2$ 当且太阳从东边升起。

解 设 P：$1+1=2$，Q：太阳从东边升起，则原命题符号化为 $P \leftrightarrow Q$。

例 1.16 秋天到了，燕子南飞。

解 设 P：秋天到了，Q：燕子南飞，则原命题符号化为 $P \leftrightarrow Q$。

1.2 命题公式与真值表

命题变量和联结词构成复合命题的形式化描述，为了能够更加准确地描述命题，本节主要讨论命题公式及命题公式的赋值。

1. 命题公式

定义 1.1 命题合式公式，又称为命题公式（简称公式），可按下列规则生成：

(1) 命题变量是命题公式；

(2) 如果 A 是公式，则 $\neg A$ 是命题公式；

(3) 如果 A 和 B 是公式，那么 $(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \to B)$ 和 $(A \leftrightarrow B)$ 都是命题公式；

(4) 当且仅当有限次地应用(1)、(2)、(3)所得到的包含命题变量、联结词和圆括号的符号串是命题公式。

命题公式的定义是一个递归形式的定义。命题公式本身不是命题，没有真值，只有对其命题变量进行赋值后，命题公式才有真值。这如同圆柱的体积公式 $V=\pi r^2 h$ 一样，没有给半径和高赋值时，公式没有值；一旦给半径和高赋值后，公式就能计算出一个具体的体积。圆柱的体积公式刻画了变量(体积与半径、高)之间的关系。

例 1.17　判定下列式子是否是命题公式？

(1) $((R\vee\neg Q)\to R)$；　　(2) $((P\leftrightarrow\neg Q)\wedge((Q\to R)\leftrightarrow(R\vee Q)))$；

(3) $(P,Q)\to R$；　　(4) $(P\vee\to Q)$；

(5) $(P\vee Q)\to R\leftrightarrow Q)$；　　(6) $(P\vee Q)\to R$。

解　根据命题公式的定义可知，(1)、(2)、(6)是命题公式，而(3)、(4)、(5)不是命题公式。(3)中的两个命题变量之间不能用逗号；(4)中的析取联结词后面应该是变量或公式；(5)中的括号不配对。命题公式最外层括号可以省略。

有了命题公式的定义后，很多复合命题可以符号化为命题公式。

例 1.18　给定命题：“如果明天天晴，且我有空，我就去踢球。”用命题公式符号化该命题。

解　设 P：明天天晴，Q：我有空，R：我去踢球，则原命题符号化为 $(P\wedge Q)\to R$。

这里需要强调，联结词之间的运算有不同的优先级，联结词运算的优先次序为 $\neg,\wedge,\vee,\to,\leftrightarrow$，如果有括号，则先进行括号内的运算。

定义 1.2　设 A 是一个命题公式，$P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是出现在 A 中的所有命题变元，对 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 这些命题变元赋予一个确定的真值称为对命题公式进行一种赋值。

不同的赋值，命题公式有不同真值情况。将命题公式在所有的赋值下的真值情况汇成一个表，这个表就称为真值表。如果一个命题公式有 n 个命题变元，每个命题变元有两种真值情况，则共有 2^n 种不同的赋值情况。为了不遗漏每种赋值情况，一般从 $\underbrace{000\cdots0}_{n个0}$ 到 $\underbrace{111\cdots1}_{n个1}$，或者从 $\underbrace{111\cdots1}_{n个1}$ 到 $\underbrace{000\cdots0}_{n个0}$ 进行列表。

例 1.19　求下列公式的真值表。

(1) $P\to Q$；　(2) $(P\wedge\neg Q)\to R$；　(3) $\neg P\vee Q$；　(4) $\neg P\leftrightarrow Q$；

(5) $\neg(P\leftrightarrow Q)$；(6) $(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$。

解　它们的真值表分别见表 1-6～表 1-11。

表 1-6　$P \to Q$ 的真值表

P	Q	$P \to Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

表 1-7　$(P \wedge \neg Q) \to R$ 的真值表

P	Q	R	$(P \wedge \neg Q) \to R$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

表 1-8　$\neg P \vee Q$ 的真值表

P	Q	$\neg P \vee Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

表 1-9　$\neg P \leftrightarrow Q$ 的真值表

P	Q	$\neg P \leftrightarrow Q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

表 1-10　$\neg(P \leftrightarrow Q)$ 的真值表

P	Q	$\neg(P \leftrightarrow Q)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com