高考决胜要诀：★高考大纲例释★题型解法研究★学科能力突破

丛书主编　郭建设

准备做一个大学生

橡树林工作室

挑战名牌大学

高考数学考纲例释与能力测试

学科主编

卞清胜（黄冈中学）

华中师范大学出版社

高考决胜要诀：★高考大纲例释★题型解法研究★学科能力突破

丛书主编　郭建设

准备做一个大学生

高考数学考纲例释与能力测试

主　编　卞清胜（黄冈中学）
副主编　王昕昉
编　委　王昕昉　王宪生　王秋
卞清胜　方牡丹　李
吴莫林　肖平安
陈体国　涂庆元
曾建民

华中师范大学出版社

(鄂)新登字 11 号

图书在版编目(CIQ)数据

高考数学考纲例释与能力测试/卞清胜　主编.
—武汉:华中师范大学出版社,2002.6
(准备做一个大学生:挑战名牌大学系列:2/郭建设主编)
ISBN 7-5622-1798-X/G·838
Ⅰ.高…　Ⅱ.卞…　Ⅲ.数学课－高中－升学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 025772 号

准备做一个大学生
高考数学考纲例释与能力测试
© 卞清胜　主编

华中师范大学出版社出版发行
(武昌桂子山　电话:(027)87876240　邮编:430079)
新华书店湖北发行所经销　　文字六〇三厂印刷

责任编辑:尹寿全　曾太贵　　封面设计:新视点
责任校对:黎圆成　　督　　印:方汉江

开本:880mm×1230mm　1/32　　印张:12.5　字数:423 千字
2002 年 6 月第 2 次印刷
印数:10 100－20 100　　定价:14.00 元

本书如有印装质量问题,可向承印厂调换。

目　录

第一编　高考考纲能力测试例释

成功从现在开始

第二编　能力立意题型解法研究

第三编　综合能力测试

第一编

高考考纲能力测试例释

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

集　　合　　考点1

一、考点导析

集合、子集、交集、并集、补集、空集、全集等概念. 集合中元素的三个特性：确定性、互异性和无序性. 重点是互异性. 集合的表示法，属于、包含、相等的意义. 集合中有关术语、符号的使用. 集合的交、并、补的运算，集合的性质的应用，如 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$，$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$，$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

每年高考对集合都有考查，多以选择题形式出现. 一般在第一题，属于容易题，体现了集合在中学数学的基础性和工具性的作用. 解答这部分试题首先应明确集合元素的意义，作好文字语言与符合语言、图形语言的转化，注意数形结合，充分利用韦恩图或数轴的直观性来帮助解题.

集合问题多与函数、方程、不等式有关，要注意各类知识的融汇贯通.

二、考点能力测试例释

【例1】　设全集 $I = R$，集合 $A = \{x \mid |x| > 1\}$，$B = \{x \mid x^2 + 4x + 3 < 0\}$，求集合 C 同时满足①$C \subseteq (\overline{A} \cup B) \cap Z$；②$C \cap B \neq \phi$；③集合 C 中有2个元素.

解析　对于集合的交、并、补必须遵循分节处理，否则将会出现混乱，同时对题中的若干条件也必须逐个加以满足，以免出现重复或疏漏. 本题先表示出集合 A、B，进而表示出 $(\overline{A} \cup B) \cap Z$，问题就明朗了，结合给定的三个条件逐一或同时运用，就可写出集合 C. 此题是集合与不等式的结合题.

解　集合 $A=\{x\mid x>1$ 或 $x<-1\}$，$B=\{x\mid -3<x<-1\}$，$\therefore(\bar{A}\cup B)=\{x\mid -3<x\leqslant 1\}$，又 x 为整数，$\therefore(\bar{A}\cup B)\cap \mathbf{Z}=\{-2,-1,0,1\}$.

由①$C\subseteq(\bar{A}\cup B)\cap \mathbf{Z}$ 与②$C\cap B\neq\phi$ 可知 $-2\in B$，由③C 中有 2 个元素，$\therefore$ 同时满足①、②、③的集合 $C=\{-2,-1\},\{-2,0\},\{-2,1\}$.

【例2】　若集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-ax+(a-1)=0\}$，$C=\{x\mid x^2-mx+2=0\}$，且 $A\cup B=A$，$A\cap C=C$，求 a 与 m 值.

解析　本题考查方程与集合的关系，对于 $A\cup B=A$，$A\cap C=C$ 要正确理解，尤其是对于集合 B 的各种可能性要全面考虑，同时不要忘记集合中元素的互异性，否则会漏解. 注意空集是任何非空集合的真子集.

解　由 $A\cup B=A$，即 $B\subseteq A$，求出 $A=\{1,2\}$，故 B 有四种可能性：$\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}$，而方程 $x^2-ax+(a-1)=0$ 的根分别是 1 和 $a-1$，这样 B 的可能性只有 $a-1=2$ 或 $a-1=1$，$\therefore a=3$ 或 $a=2$. 由 $A\cap C\subseteq C$，即 $C\subseteq A$，得知当 $m=3$ 时，$A=C$，另一种情况是 $C=\phi$，即 $m^2-8<0$，$\therefore -2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$，综上：$a=2$ 或 $a=3$，$-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$ 或 $m=3$.

【例3】　设两复数集 $M=\{z\mid z=m+\mathrm{i}(4-m^2),m\in\mathbf{R}\}$，$N=\{z\mid z=2\cos\theta+\mathrm{i}(\lambda+3\sin\theta),\theta\in\mathbf{R}\}$，且 $M\cap N\neq\phi$，求实数 λ 的取值范围.

解析　本题是在复数与三角的交汇点处命题，$M\cap N\neq\phi$ 构成了结合的桥梁，注意三角函数的值域.

解　$\because M\cap N\neq\phi$，$\therefore$ 必有 z 满足 $m+\mathrm{i}(4-m^2)=2\cos\theta+\mathrm{i}(\lambda+3\sin\theta)$. 由复数相等的定义，得 $\begin{cases}m=2\cos\theta,\\ \lambda+3\sin\theta=4-m^2.\end{cases}$

$$\begin{aligned}\therefore \lambda&=4-m^2-3\sin\theta\\&=4-4\cos^2\theta-3\sin\theta\\&=4(\sin\theta-\frac{3}{8})^2-\frac{9}{16}\end{aligned}$$

$\because -1\leqslant\sin\theta\leqslant 1$，

$\therefore$ 当 $\sin\theta=\frac{3}{8}$ 时，$\lambda_{\text{最小值}}=-\frac{9}{16}$；当 $\sin\theta=-1$ 时，$\lambda_{\text{最大值}}=7$，$\therefore\lambda$ 的取值范围是 $[-\frac{9}{16},7]$.

【例4】　设集合 $A=\{(x,y)\mid y^2=x+1\}$，集合 $B=\{(x,y)\mid 4x^2+2x-2y+5=0\}$，集合 $C=\{(x,y)\mid y=kx+b\}$，问是否存在自然数 k,b，使 $(A\cup B)\cap C=\phi$？证明你的结论.

解析　本题是在代数与解析几何的交汇点处命题，属开放题型，考查学生的观察、联想、推理、判断、探索能力，要使 $(A\cup B)\cap C=\phi$，须有 $A\cap C=\phi$ 且 $B\cap$

$C=\phi$,由集合 A、B、C 的元素特征知,直线 $y=kx+b$ 与抛物线 $y^2=x+1$,$4x^2+2x-2y+5=0$ 均无公共点,于是方程联立,化为关于 x 的一元二次方程,它们的判别式均小于零,这样就建立了关于 k,b 的不等式组,然后再求解.

解　假设存在自然数 k、b 满足 $(A\cup B)\cap C=\phi$,则 $A\cap C=\phi$ 且 $B\cap C=\phi$,故,由

$$\begin{cases}y^2=x+1\\y=kx+b\end{cases}$$

可得　$k^2x^2+(2kb-1)x+b^2-1=0$.

当 $k=0$ 时,有解 $x=b^2-1$,不合题设要求.

当 $k\neq0$ 时,$\triangle_1=(2kb-1)^2-4k^2(b^2-1)<0$,从而 $b>\dfrac{4k^2+1}{4k}$　①

由 $\begin{cases}4x^2+2x-2y+5=0\\y=kx+b\end{cases}$　可得

$4x^2+2(1-k)x+5-2b=0$,

$\triangle_2=4(1-k)^2-16(5-2b)<0$,$\therefore b<\dfrac{20-(k-1)^2}{8}$　②

由①、②得 $\dfrac{4k^2+1}{4k}<b<\dfrac{20-(k-1)^2}{8}$,

但 $\dfrac{4k^2+1}{4k}=k+\dfrac{1}{4k}>1$,$\dfrac{20-(k-1)^2}{8}\leqslant\dfrac{20}{8}$,又 $b\in N$,

$\therefore b=2$,代入①,②得

$$\begin{cases}\dfrac{4k^2+1}{4k}<2\\\dfrac{20-(k-1)^2}{8}>2\end{cases},\quad\therefore\begin{cases}1-\dfrac{\sqrt3}{2}<k<1+\dfrac{\sqrt3}{2},\\-1<k<3\end{cases}$$

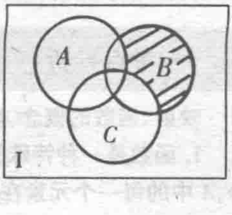
$\therefore 1-\dfrac{\sqrt3}{2}<k<1+\dfrac{\sqrt3}{2}$,又 $k\in N$,$\therefore k=1$.

故存在自然数 $k=1$,$b=2$ 满足题设.

三、考点新视角能力测试

一、选择题

1. 如图,I 是全集,A、B、C 是 I 的3个子集,则阴影部分所表示的集合是　(　)



A. $(\overline{A\cup C})\cup B$　B. $(\overline{A}\cap\overline{C})\cup B$

C. $(\overline{A}\cap\overline{C})\cap B$　D. $(A\cup C)\cap\overline{B}$

2. 非空集合 $S\subseteq\{1,2,3,4,5\}$,若 $a\in S$,必有 $6-a\in S$,

则所有这样的集合 S 共有 (　　)

A. 5 个　　B. 6 个　　C. 7 个　　D. 8 个

3. 已知集合 $M=\{x\mid x^2+14x+48<0\}$, $S=\{x\mid 2a^2+ax-x^2<0\}$, 若 $M\subset S$, 则实数 $a\in$ (　　)

A. $[-3,0)$　　B. $[-3,6]$　　C. $[-3,0)\cup(0,6]$　　D. $(0,6]$

4. 设全集 $I=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$, 集合 $M=\{(x,y)\mid \frac{y-3}{x-2}=1\}$, $N=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$, 那么 $\overline{M\cup N}$ 等于 (　　)

A. ϕ　　B. $\{(2,3)\}$　　C. $(2,3)$　　D. $\{(x,y)\mid y=x+1\}$

二、填空题

5. 设 $A=\{0,1\}$, 且 $B=\{x\mid \phi\subset x\subseteq A\}$, 集合 $B=$ ________.

6. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$, $B=\{x\mid mx+1=0\}$, 且 $A\cup B=A$, 则实数 m 组成的集合是________.

三、解答题

7. 三个实数既可用集合 $\{a,a+d,a+2d\}$ 表示, 又可用集合 $\{a,aq,aq^2\}$ 表示, 求 q 的值.

8. 已知 $A=\{x\mid x^2-7x+10\leqslant 0\}$, $B=\{x\mid x^2+ax+b<0\}$, 且 $A\cap B\neq\phi$, $A\cup B=\{x\mid |x-3|<4\leqslant 2x\}$, 写出集合 $S=\{x\mid x=a+b\}$.

9. 已知集合 $A=\{x\mid \frac{6}{x+1}\geqslant 1, x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x\mid x^2-2x+2m<0, x\in\mathbf{R}\}$.

(1) 若 $A\cap B=\{x\mid -1<x<4\}$, 求 m 的值;

(2) 若 $A\cup B=A$, 求实数 m 的取值范围.

10. 集合 $A=\{(x,y)\mid x=m, y=3m+1, m\in\mathbf{N}\}$, $B=\{(x,y)\mid x=n, y=a(n^2-n+1), n\in\mathbf{N}\}$, 是否存在非零整数 a, 使 $A\cap B\neq\phi$, 并证明你的结论.

映射与函数　考点 2

一、考点导析

映射、函数的概念, 反函数的求法, 互为反函数的函数图像间的关系.

1. 函数是一种特殊的映射, 它的主要特性是: 集合 A 和 B 都是非空的实数集合, A 中的每一个元素在 B 中有唯一的元素与之对应, 则称这种映射关系为函数,

A 为函数的定义域. A 中元素象的集合称为函数的值域. 这里要特别注意,对于自变量的每一个确定的值,函数的值是唯一确定的.

2. 判定两个函数是否为同一函数的依据有三条:看函数表达式定义域、值域和对应法则是否相同,而与用什么字母表示自变量和因变量无关.

3. 反函数的定义是:如果函数 $y = f(x)$ 的映射 $f:A \to B$ 是 $f(x)$ 的定义域 A 到值域 B 的一一映射(即 $x_1 \neq x_2$,则 $f(x_1) \neq f(x_2)$),那么这个映射的逆映射 f^{-1}: $B \to A$ 所确定的函数 $x = f^{-1}(y)$ 叫做 $y = f(x)$ 的反函数,记为 $y = f^{-1}(x)$. 一个函数不一定存在反函数,例如函数 $y = x^2$, $(x \in \mathbf{R})$,就不存在反函数,因为这个函数从定义域到值域的映射不是一一映射,例如,$x = \pm 2$ 都与 $y = 4$ 对应.

4. 由 $y = f(x)$ 求 $y = f^{-1}(x)$ 的步骤:(1) 确定 $y = f(x)$ 是定义域 A 到值域 B 的一一映射;(2) 求 $y = f(x)$ 的定义域和值域;(3) 由 $y = f(x)$ 解出 $x = f^{-1}(y)$;(4) 把 $x = f^{-1}(y)$ 改写为 $y = f^{-1}(x)$;(5) 写出反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的定义域.

二、考点能力测试例释

【例1】　已知集合 $A = \{1,2,3,k\}$, $B = \{4,7,a^4,a^2+3a\}$,且 $a \in \mathbf{N}$, $k \in \mathbf{N}$, $x \in A$, $y \in B$,映射 $f:A \to B$,使 B 中元素 $y = 3x+1$ 与 A 中元素 x 对应,求 a 及 k 的值.

解析　此题考查映射概念,集合 A 到集合 B 的对应是否为映射,只考虑 A 中每一个元素在 B 中是否有唯一元素与之对应,故 A 中 1,2 分别与 B 中 4,7 对应.

解　A 中元素 1 的象是 4,2 的象是 7,3 的象是 10. 即 $a^4 = 10$ 或 $a^2 + 3a = 10$, $\because a \in \mathbf{N}$, $\therefore a^4 = 10$ 舍去,由 $a^2 + 3a = 10$,解得 $a = 2$, $\because k$ 的象是 a^4, $\therefore 3k + 1 = 2^4$, $\therefore k = 5$.

【例2】　某人沿边长为 100 米的正方形场地 $ABCD$ 的边缘跑步(图 2 - 1),从顶点 A 出发,依次经过 B,C,D 再返回到 A,设 x 表示该人在一圈内的行程,y 表示该人到起点 A 的距离,试将 y 表示成 x 的函数.

图 2-1

解析　本题考查函数概念,函数的实质取决于定义域和对应法则,表示一个函数关系的解析式可以不止一个,对于用几个式子表示的分段函数,不能误认为是几个函数,本题就是分段函数.

解　把该人记作动点 P,分 P 在 AB,BC,CD,DA 上四种情况考虑,所求函数表达式为

$$y = \begin{cases} x & (0 \leqslant x \leqslant 100) \\ \sqrt{x^2 - 200x + 20000} & (100 < x \leqslant 200) \\ \sqrt{x^2 - 600x + 100000} & (200 < x \leqslant 300) \\ 400 - x & (300 < x \leqslant 400) \end{cases}$$

【例3】 已知函数$f(x)=\lg(x^2+ax+b)$的定义域为集合A,函数$g(x)=\sqrt{kx^2+4x+k+3}$的定义域为集合B,若$\overline{A}\cap B=B,\overline{A}\cup B=\{x|-2\leqslant x\leqslant 3\}$,求实数$a,b$的值及实数$k$的取值范围.

解析　先必须确定集合A,然后求出a,b.函数的定义域为非空数集,再确定实数k.

解　$A=\{x\mid x^2+ax+b>0\}$,$B=\{x\mid kx^2+4x+k+3\geqslant 0,k\in\mathbf{R}\}$,$\because\overline{A}\cap B=B$,$\therefore B\subseteq\overline{A}$,又$\overline{A}\cup B=\{x|-2\leqslant x\leqslant 3\}$,$\therefore\overline{A}=\{x|-2\leqslant x\leqslant 3\}$,$\therefore A=\{x\mid x<-2$或$x>3\}$,即不等式$x^2+ax+b>0$的解集为$\{x\mid x<-2$或$x>3\}$,$\therefore a=-1,b=-6$.若$k\geqslant 0$,显然$B\not\subseteq\overline{A}$,故$k<0$,由$B\neq\phi\subseteq\overline{A}$知,方程$F(x)=kx^2+4x+k+3=0$两实根都在区间$[-2,3]$内,因此有

$$\begin{cases}k<0\\ \Delta=16-4k(k+3)\geqslant 0\\ F(-2)=5k-5\leqslant 0\\ F(3)=10k+15\leqslant 0\\ -2\leqslant-\dfrac{2}{k}\leqslant 3,\end{cases}$$

解得$-4\leqslant k\leqslant-\dfrac{3}{2}$,$\therefore$所求$k$的取值范围是$[-4,-\dfrac{3}{2}]$.

【例4】 求证:函数$y=\dfrac{x-1}{ax-1}(a\in\mathbf{R}$,且$a\neq 0,a\neq 1,x\in\mathbf{R}$且$x\neq\dfrac{1}{a})$的图像关于直线$y=x$对称.

解析　只要证明函数的反函数是它自身,其图像即关于直线$y=x$对称.

证明　由$y=\dfrac{x-1}{ax-1}$得$(ay-1)x=y-1$.

(1) 当$ay-1=0$时,$\because a\neq 0$,$\therefore y=\dfrac{1}{a}$,又$y-1=0$,$\therefore y=1$.于是得到$\dfrac{1}{a}=1$,即$a=1$,此与$a\neq 1$矛盾,$\therefore$只能$ay-1\neq 0$.

(2) 当$ay-1\neq 0$时,$x=\dfrac{y-1}{ay-1}$,于是$y=\dfrac{x-1}{ax-1}$的反函数为$y=\dfrac{x-1}{ax-1}(x\neq\dfrac{1}{a})$,即$y=\dfrac{x-1}{ax-1}$的反函数是它自身.

$\therefore y=\dfrac{x-1}{ax-1}$的图像关于$y=x$对称.

三、考点新视角能力测试

一、选择题

成功从现在开始

1. 下列各组函数中,表示同一函数的是 (　　)

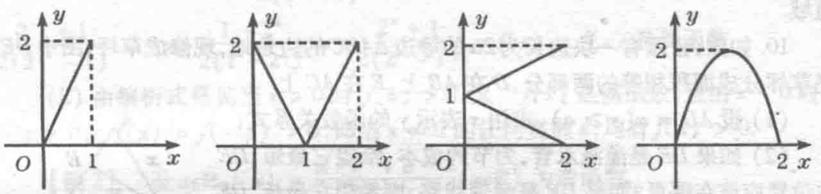
A. $y=\sqrt[3]{x^3}$ 与 $y=\sqrt{x^2}$

B. $y=\ln e^x$ 与 $y=e^{\ln x}$

C. $y=\dfrac{(x-1)(x+3)}{x-1}$ 与 $y=x+3$

D. $y=x^0$ 与 $y=\dfrac{1}{x^0}$

2. 设 $M=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$, $N=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 2\}$,给出如下四个图形,其中能表示集合 M 到集合 N 的函数关系的有 (　　)



第2题图

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

3. 设集合 A 和 B 都是自然数集合 N,映射 $f:A\to B$ 把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中的元素 2^n+n,则在映射 f 下,象 20 的原象是 (　　)

A. 3　　B. 2　　C. 5　　D. 4

4. 若函数 $f(x)=\sqrt{mx^2+mx+1}$ 的定义域是一切实数,则 m 的取值范围是 (　　)

A. $0<m<4$　　B. $0\leqslant m\leqslant 4$　　C. $m\geqslant 4$　　D. $0\leqslant m<4$

二、填空题

5. 设函数 $f(x)$ 的反函数为 $h(x)$,函数 $g(x)$ 的反函数为 $h(x+1)$,已知 $f(2)=5$, $f(5)=-2$, $f(-2)=8$,那么 $g(2)$, $g(5)$, $g(8)$, $g(-2)$ 中,一定能求出具体数值的是________.

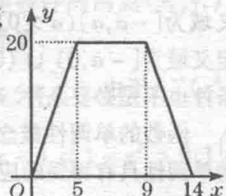
6. $ABCD$ 是四边形,动点 P 沿折线 $BCDA$ 由 B 点向 A 点运动,设 P 点移动的路程为 x, $\triangle ABP$ 的面积为 S,函数 $S=f(x)$ 的图像如图所示,给出以下四个结论:

①$ABCD$ 是等腰梯形且 $AB\parallel CD$;

②$ABCD$ 是平行四边形;

③Q 是 AD 的中点, ΔABQ 的面积为 10;

④ 当 $10\leqslant x\leqslant 14$ 时,函数 $S=f(x)$ 的解析式是



第6题图

$f(x)=56-4x$. 其中正确命题的序号是________.

三、解答题

7. 已知$f(x)=ax+\frac{1-x}{a}(a>0)$在$[0,1]$上最小值为$g(a)$,写出$y=g(a)$的解析式,作出$g(a)$的图像,并指出$a$为何值时,$g(a)$的最大值为多少.

8. 求函数$y=\log_a(x-ka)\cdot\log_{a^2}(x^2-a^2)(a>0$且$a\neq1)$的定义域.

9. 已知函数$y=\sqrt{kx^2-6kx+k+8}$的定义域是R.

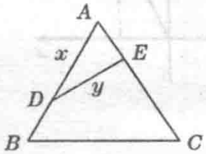
(1) 求实数是k的取值范围;

(2) 设k变化时,已知函数的最小值为$f(k)$,求$f(k)$的表达式及函数$f(k)$的值域.

10. 如图,公园有一块边长为$2a$的等边ΔABC的边角地,现修成草坪,图中DE把草坪分成面积相等的两部分,D在AB上,E在AC上.

(1) 设$AD=x(x\geqslant a)$,求用x表示y的函数关系式;

(2) 如果DE是灌溉水管,为节约成本,希望它最短,DE的位置应该在哪里?如果DE是参观线路,则希望它最长,DE的位置又应该在哪里?请予以证明.



第10题图

函数的奇偶性与单调性　考点3

一、考点导析

函数的奇偶性概念和判别方法以及奇偶函数的图像特征. 函数的定义域关于原点对称是函数具备奇偶性的必要条件,为便于判断,常应用定义的等价形式:$f(-x)=\pm f(x)\Leftrightarrow f(-x)\mp f(x)=0\Leftrightarrow\frac{f(-x)}{f(x)}=\pm1(f(x)\neq0)$,若函数的定义域为$[-a,a](a>0)$,则"$f(0)=0$"是$f(x)$为奇函数的必要而非充分条件;若定义域为$[-a,0)\cup(0,a](a>0)$,则"$f(0)=0$"即不是$f(x)$为奇函数的充分条件也不是必要条件. 奇函数图像关于原点对称,偶函数图像关于y轴对称.

函数的单调性概念、单调性的判断及证明,简单函数单调区间的求法. 函数的单调性具有很强的应用性,如函数值大小的比较可转化为自变量大小的比较,求函数的值域、最大值、最小值等等,在研究函数的单调性时,常将函数变形化简转化为讨论一些熟悉函数的单调性,某些复合函数单调性的讨论及单调性与奇

偶性问题的综合是近年来高考命题的热点问题.

二、考点能力测试例释

【例1】　已知$f(x)=x(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2})$.

(1) 指出$f(x)$的奇偶性,并予以证明;

(2) 证明:$f(x)>0$.

解析　对于(1)用定义去判定,对于(2)利用(1)问结论.

解　(1)$f(x)=x\cdot\frac{2^x+1}{2(2^x-1)}$,其定义域为$x\neq0$的实数,又$f(-x)=-x\cdot\frac{2^{-x}+1}{2(2^{-x}-1)}=-x\cdot\frac{1+2^x}{2(1-2^x)}=x\frac{2^x+1}{2(2^x-1)}=f(x)$,$\therefore f(x)$是偶函数.

(2) 由解析式易见当$x>0$时,$f(x)>0$,又$\because f(x)$是偶函数,且当$x<0$时,$-x>0$,$\therefore f(x)=f(-x)>0$,即当$x\neq0$的任何实数x,均有$f(x)>0$.

【例2】　设$a\in\mathbf{R}$,$f(x)=\frac{a\cdot2^x+a-2}{2^x+1}(x\in\mathbf{R})$为奇函数.

(1) 确定a的值;

(2) 在$f(x)$的图像上是否存在不同的两点,使得这两点连线与x轴平行?

(3) 解方程$f^{-1}(x^2)=\log_2(1+x)$.

解析　(1)由$f(x)$为奇函数,恒有$f(-x)=-f(x)$. (2)是结论探索性问题,转化为研究$f(x)$的单调性问题. (3)注意定义域.

解　(1)$\because f(x)=a-\frac{2}{2^x+1}$为奇函数,$\therefore f(-x)=a-\frac{2}{2^{-x}+1}=a-\frac{2^{x+1}}{2^x+1}=-f(x)$.　$\therefore 2a-\frac{2^{x+1}+2}{2^x+1}=0$,$\therefore a=1$.

(2)$\because f(x)=1-\frac{2}{2^x+1}$,对$x_1<x_2$有$0<2^{x_1}<2^{x_2}$,$\therefore 1<2^{x_1}+1<2^{x_2}+1$,$\frac{2}{2^{x_1}+1}>\frac{2}{2^{x_2}+1}$,$\therefore 1-\frac{2}{2^{x}1+1}<1-\frac{2}{2^{x_2}+1}$,即$f(x_1)<f(x_2)$,$\therefore f(x)$为增函数,故不存在满足条件的两点. 这是因为若存在满足条件的两点(x_1,y_1),(x_2,y_2),则$x_1\neq x_2$,有$y_1=y_2$,这与$f(x)$是单调增函数矛盾.

(3) 由$f(x)=1-\frac{2}{2^x+1}$,得$f^{-1}(x)=\log_2\frac{1+x}{1-x}$,$-1<x<1$,由于$f^{-1}(x^2)=\log_2(1+x)$,得$\log_2\frac{1+x^2}{1-x^2}=\log_2(1+x)$,其中$-1<x<1$且$1-x^2>0$,$1+x>0$,$\therefore -1<x<1$. 由此有$\frac{1+x^2}{1-x^2}=1+x$,$\therefore x^3+2x^2-x=0$,$\therefore x=0$或$x=$

$-1\pm\sqrt{2}$,经检验知方程的解为 $x=0$ 或 $x=\sqrt{2}-1$.

【例3】　已知 $f(x)=(\frac{x-1}{x+1})^2\quad(x>1)$.

(1) 求 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 及其定义域;

(2) 判定 $f^{-1}(x)$ 在其定义域内的单调性.

解析　(1) 因为反函数的定义域就是原函数的值域,所以应先求原函数的值域,并由原函数的解析式解出 x,之后再改写,不然仍为原函数.

(2) 根据单调函数的定义,对于 $f^{-1}(x)$ 定义域内的任意两个不同的值 x_1 和 x_2,先把 $f^{-1}(x_2)-f^{-1}(x_1)$ 变型,再确定其符号.

解　(1) $f(x)=(\frac{x-1}{x+1})^2=(1-\frac{2}{x+1})^2$,　　$\because x>1,\therefore x+1>2$,

$\therefore -1<-\frac{2}{x+1}<0,\therefore 0<\frac{x-1}{x+1}<1,\therefore f(x)$ 的值域为 $(0,1)$,令 $y=(\frac{x-1}{x+1})^2$,则 $(\sqrt{y}-1)x=-\sqrt{y}-1.\therefore x=\frac{1+\sqrt{y}}{1-\sqrt{y}},\therefore f^{-1}(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$,其定义域为 $(0,1)$.

(2) 任取 $x_1,x_2\in(0,1)$ 且 $x_1<x_2$,

则 $f^{-1}(x_2)-f^{-1}(x_1)=\frac{1+\sqrt{x_2}}{1-\sqrt{x_2}}-\frac{1+\sqrt{x_1}}{1-\sqrt{x_1}}=\frac{2(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})}{(1-\sqrt{x_2})(1-\sqrt{x_1})}$.

由 $0<x_1<x_2<1$,得 $\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}>0,1-\sqrt{x_2}>0,1-\sqrt{x_1}>0,\therefore f^{-1}(x_2)>f^{-1}(x_1),\therefore f^{-1}(x)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数.

【例4】　设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$,其中 $a>0$.

(1) 解不等式 $f(x)\leqslant 1$;

(2) 求 a 的取值范围,使函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数.

解析　(1) 将已知的不等式转化为等价的不等式组 $\begin{cases}x^2+1\leqslant(1+ax)^2\\1+ax\geqslant 1\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\geqslant 0\\(a^2-1)x+2a\geqslant 0\end{cases}$ 同时注意 a^2-1 分为 $a>1,a=1$ 和 $0<a<1$ 进行分类讨论求解. (2) 先运用单调性定义,设 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$,使得 $x_1<x_2,f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a)$,由于 $\frac{x_1+x^2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}<1$,故对 a 进行分类讨论,分为 $a\geqslant 1$ 及 $0<a<1$ 两种情况.

解　(1) 原不等式等价于 $\begin{cases}x\geqslant 0\\(a^2-1)x+2a\geqslant 0\end{cases}$

成功从现在开始