复变函数

杨善兵　主编
司建东　黄素珍　黄琼伟　陈万勇　编

清华大学出版社

复变函数

杨善兵　主编
司建东　黄素珍　黄琼伟　陈万勇　编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本教材介绍复变函数的基本概念、基本理论和方法，并结合计算机，使学生能利用数学软件解决一些简单的与复变函数有关的计算问题. 内容包括复变函数、解析函数、复积分、复级数、留数、共形映射和 MATLAB 在复变函数中的应用等. 每章均有习题，供学生练习之用.

本教材可作为工科类各专业本科学生的教材和相关教师的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数/杨善兵主编. --北京：清华大学出版社，2016

ISBN 978-7-302-42932-6

Ⅰ. ①复…　Ⅱ. ①杨…　Ⅲ. ①复变函数－高等学校－教材　Ⅳ. ①O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 030871 号

责任编辑：佟丽霞
封面设计：常雪影
责任校对：王淑云
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　　邮　　编：100084
　　社 总 机：010-62770175　　　邮　　购：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质量反馈：010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市少明印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170mm × 230mm　　**印　张**：10.75　　**字　数**：198 千字
版　　次：2016 年 6 月第 1 版　　**印　次**：2016 年 6 月第 1 次印刷
印　　数：1 ~ 2000
定　　价：25.00 元

产品编号：067058-01

前　言

本教材是根据《复变函数课程教学基本要求》而编写的，内容增加了现代计算机技术在复变函数中的应用. 编写过程突出了复变函数这门课程的基本数学思想和方法，力求做到内容简明扼要、便于学习和适应新形势的教改要求. 在各章节的内容阐述中，尽力做到科学性和通俗性相结合，在内容的处理上也尽力做到由具体到一般，由浅入深，循序渐进.

本教材由杨善兵主编，第 1、7 章由黄素珍撰写，第 2、6 章由司建东撰写，第 5 章由司建东和杨善兵合撰，第 3 章由黄琼伟撰写，第 4 章由杨善兵撰写，全书由杨善兵统稿和定稿. 对于教材中所引用之处，我们表示由衷的感谢. 由于编者的水平有限，对于教材中不当之处请广大读者提出宝贵意见. 我们希望借助本教材培养和提高学生的数学修养，更有利于复变函数课程的教学改革.

本教材的出版得到了盐城工学院教材基金的资助，在此表示感谢！

编　者

2015 年 10 月

目　　录

第 1 章　复数与复变函数

自变量为复数的函数就是复变函数，它是本课程的研究对象. 由于在中学阶段已经学过复数的概念和基本运算，本章将在原有的基础上作简要的复习和补充；再介绍复平面上的区域以及复变函数的极限与连续性等概念，为进一步研究解析函数的理论和方法奠定必要的基础.

1.1　复数及其代数运算

1.1.1　复数的概念

设 x，y 为两个实数，则

$$z = x + \mathrm{i}y \quad (\text{或 } x + y\mathrm{i})$$

表示复数，这里 i 为**虚数单位**，具有性质 $\mathrm{i}^2 = -1$. x 及 y 分别叫做 z 的**实部**与**虚部**，记为

$$x = \mathrm{Re}(z), \quad y = \mathrm{Im}(z).$$

虚部为零的复数为实数，即 $x + 0 \cdot \mathrm{i} = x$. 因此，全体实数是全体复数的一子集.

实部为零且虚部不为零的复数称为**纯虚数**.

如果两复数的实部和虚部分别相等，则称**两复数相等**. 由此得出，对于复数 $z = x + \mathrm{i}y$ ，当且仅当 $x = y = 0$ 时， $z = 0$.

设 $z = x + \mathrm{i}y$ 是一个复数，称 $x - \mathrm{i}y$ 为 z 的**共轭复数**，记作 $\overline{z}$. 显然，一个实数 x 的共轭复数还是 x .

1.1.2　复数的四则运算

设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ ， $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ ，则它们的加法、减法和乘法运算定义如下：

$$z_1 + z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) + (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2), \tag{1.1.1}$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1) - (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}(y_1 - y_2), \tag{1.1.2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1), \tag{1.1.3}$$

若 $z_2 \neq 0$ ，则

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{1.1.4}$$

由式(1.1.1)～式(1.1.4)知，复数经过四则运算仍是复数.不难证明，复数的加法、减法和乘法运算满足如下运算规律：

（1）$z_1+z_2=z_2+z_1$，$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$；

（2）$z_1+z_2+z_3=(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$，$z_1\cdot z_2\cdot z_3=(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$；

（3）$z_1\cdot\left(z_2+z_3\right)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$.

共轭复数有如下性质：

（1）$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$，$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$；

（2）$\overline{\overline{z}}=z$；

（3）$z\cdot\overline{z}=\left[\operatorname{Re}(z)\right]^2+\left[\operatorname{Im}(z)\right]^2$；

（4）$z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)$，$z-\overline{z}=2\mathrm{i}\operatorname{Im}(z)$.

上述性质请读者自己证明.

例 1.1.1 设 $z_1=5-5\mathrm{i}$，$z_2=-3+4\mathrm{i}$，求 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 和 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解 $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{5-5\mathrm{i}}{-3+4\mathrm{i}}=\dfrac{(5-5\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}{(-3+4\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}=\dfrac{(-15-20)+\mathrm{i}(15-20)}{25}=-\dfrac{7}{5}-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$，

$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=-\dfrac{7}{5}+\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$.

例 1.1.2 设 $z=-\dfrac{1}{\mathrm{i}}-\dfrac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，求 $\operatorname{Re}(z)$，$\operatorname{Im}(z)$ 和 $z\cdot\overline{z}$.

解 因为

$$z=-\frac{1}{\mathrm{i}}-\frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=-\frac{1\cdot(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})}-\frac{3\mathrm{i}\cdot(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})\cdot(1+\mathrm{i})}=\mathrm{i}-\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i},$$

所以

$$\operatorname{Re}(z)=\frac{3}{2},\quad \operatorname{Im}(z)=-\frac{1}{2},$$

$$z\cdot\overline{z}=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}.$$

例 1.1.3 设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 为两个任意复数，证明：

$$z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1}\cdot z_2=2\operatorname{Re}\left(z_1\cdot\overline{z_2}\right).$$

证

$$\begin{aligned} z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1}\cdot z_2 &= (x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)+(x_1-\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2) \\ &= (x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1-x_1y_2)+(x_1x_2+y_1y_2)-\mathrm{i}(x_2y_1-x_1y_2) \\ &= 2(x_1x_2+y_1y_2) \\ &= 2\,\mathrm{Re}\left(z_1\cdot\overline{z_2}\right) \end{aligned}$$

或

$$z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1}\cdot z_2 = z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{\left(z_1\cdot\overline{z_2}\right)} = 2\,\mathrm{Re}\left(z_1\cdot\overline{z_2}\right)$$

1.2　复数的几何表示

1.2.1　用平面上的点和向量表示复数

由于一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 由一对有序实数 (x,y) 唯一确定，所以对于平面上给定的直角坐标系，复数的全体与该平面上点的全体成一一对应关系，从而复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可以用该平面上坐标为 (x,y) 的点来表示，这是复数的一个常用表示方法. 如图 1.2.1 所示，点 P 表示复数 $-2+3\mathrm{i}$，其余的点分别表示复数 0，i，$2+2\mathrm{i}$，$-4-3\mathrm{i}$. 此时 x 轴称为**实轴**，y 轴称为**虚轴**，两轴所在的平面称为**复平面**或 **z 平面**. 这样，复数与复平面上的点成一一对应，并且把“点 z”作为“数 z”的同义词，从而使我们能借助于几何语言和方法研究复变函数的问题，也为复变函数应用于实际奠定了基础. 由以上意义，易知一个复数与它的共轭复数在复平面上的点关于实轴对称(如图 1.2.2 所示).

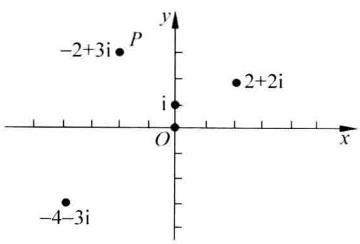

图　1.2.1

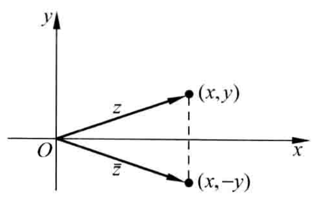

图　1.2.2

例 1.2.1　假设质量分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 的 n 个质点分别位于复平面上 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 处，求该系统的质心.

解　设 $z_k=x_k+y_k\mathrm{i}\ (k=1,2,\cdots,n)$，$M=\sum\limits_{k=1}^{n}m_k$ 为总质量.易知，所给系统的质心坐标 $(\hat{x},\hat{y})$ 为

$$\hat{x}=\frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{M},\quad \hat{y}=\frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{M},$$

从而，质心点为

$$\hat{z}=\hat{x}+\hat{y}\mathrm{i}=\frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{M}+\frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{M}\mathrm{i}=\frac{\sum_{k=1}^{n} m_k\left(x_k+y_k\mathrm{i}\right)}{M}=\frac{\sum_{k=1}^{n} m_k z_k}{M}.$$

在复平面上，复数 z 还与从原点指向点 $z=x+\mathrm{i}y$ 的平面向量一一对应，因此复数 z 也能用向量 $\boldsymbol{OP}$ 来表示(图 1.2.3). 今后把“复数 z ”与其对应的“向量 z ”也视为同义词.

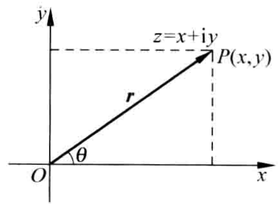

图 1.2.3

在物理学中，力、速度、加速度等都可用向量表示，说明复数可以用来表示实际的物理量，如例 1.2.1.

1.2.2 模和辐角

向量 $\boldsymbol{OP}$ 的长度称为 z 的**模或绝对值**，记作 $|z|$，即

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

读者容易明白这里以几何意义定义的复数的模与前面的定义是一致的. 显然，下列各式成立：

$$|x|\leqslant|z|,\quad |y|\leqslant|z|,$$

$$|z|\leqslant|x|+|y|,$$

$$z\bar{z}=|z|^2=\left|z^2\right|.$$

在 $z\neq0$ 的情况下，从实轴正向转到与向量 $\boldsymbol{OP}$ 方向一致时所成的角度 θ 叫做复数的**辐角**，记作 $\operatorname{Arg} z$.

复数 0 的模为零，即 $|0|=0$，其辐角是不确定的.

任何不为零的复数 z 的辐角 $\operatorname{Arg} z$ 均有无穷多个值，彼此之间相差 2π 的整数倍. 通常把满足 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$ 的辐角值 θ_0 称为 $\operatorname{Arg} z$ 的**主值**，记为 $\arg z$，于是

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi\quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

辐角主值 $\arg z$ $(z\neq0)$ 可以由反正切 $\operatorname{Arc}\tan\frac{y}{x}$ 的主值 $\arctan\frac{y}{x}$ 按下列关系

来确定（如图 1.2.4 所示）：

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, z\text{在第一、四象限},\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi，z\text{在第二象限},\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi，z\text{在第三象限},\\ \dfrac{\pi}{2}，x=0,y>0,\\ -\dfrac{\pi}{2},x=0,y<0,\\ 0,x>0,y=0,\\ \pi,x<0,y=0,\end{cases}$$

其中 $-\dfrac{\pi}{2}<\arctan\dfrac{y}{x}<\dfrac{\pi}{2}$.

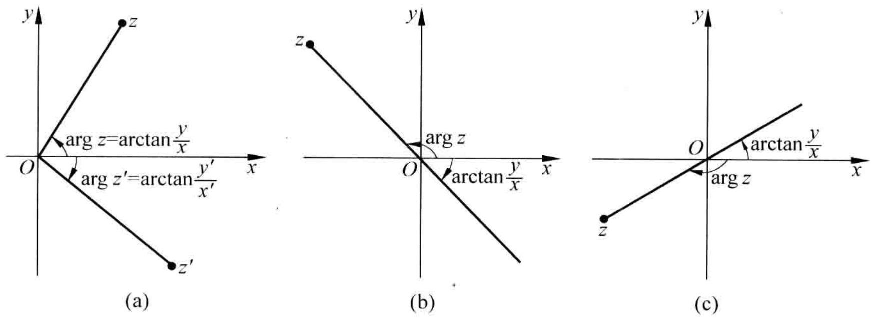

图　1.2.4

例 1.2.2　求下列各复数的模及辐角.

（1）i；　（2）-1；　（3）$1+i$；　（4）$-1+i$.

解　由 z 平面上的对应点的位置，可以看出

（1）$|\,i\,|=1$，$\arg i=\dfrac{\pi}{2}$，$\operatorname{Arg} i=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$；

（2）$|-1|=1$，$\arg(-1)=\pi$，$\operatorname{Arg}(-1)=\pi+2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$；

（3）$|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$\arg(1+i)=\dfrac{\pi}{4}$，$\operatorname{Arg}(1+i)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$；

（4）$|-1+i|=\sqrt{2}$，$\arg(-1+i)=\dfrac{3\pi}{4}$，$\operatorname{Arg}(-1+i)=\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

例 1.2.3 设 z_1， z_2 为两个任意复数，证明：

（1）$|z_1\overline{z}_2| = |z_1||z_2|$；

（2）$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

证 （1）$|z_1\overline{z}_2| = \sqrt{(z_1\overline{z}_2)\overline{(z_1\overline{z}_2)}} = \sqrt{(z_1\overline{z}_2)(\overline{z}_1 z_2)}$

$$= \sqrt{(z_1\overline{z}_1)(z_2\overline{z}_2)} = |z_1||z_2|.$$

（2）
$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) \\ &= z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2. \end{aligned}$$

由 1.1 节中的例 1.1.3， $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2\operatorname{Re}\left(z_1 \cdot \overline{z_2}\right)$，所以

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2) \\ &\leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\overline{z}_2| \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

对上式两边开方，就得到所要证明的三角不等式.

利用直角坐标与极坐标的关系

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

还可以把 z 表示成下面的形式：

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

称为复数的**三角表示式**.

再利用欧拉公式： $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，我们又可以得到

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

这种表示形式称为复数的**指数表示式**.

复数的各种表示法可以相互转换，以适应讨论不同问题时的需要.

例 1.2.4 将复数 $z = 1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}$ 分别化为三角表示式和指数表示式.

解 显然， $r = |z| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$. 由于 z 在第四象限，所以

$$\theta = \arctan\frac{-\sqrt{3}}{1} = -\frac{\pi}{3}.$$

因此，z 的三角表示式为

$$z=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right],$$

z 的指数表示式为

$$z=2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}.$$

1.3　复数的乘方与开方

1.3.1　乘积与商

如图 1.3.1 所示，设有两个复数

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),\quad z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2),$$

则

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1r_2(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\&=r_1r_2\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\right]\\&=r_1r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)\right],\end{aligned}$$

于是

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\tag{1.3.1}$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2.\tag{1.3.2}$$

从而有下面的定理.

定理 1.3.1　两个复数乘积的模等于它们模的乘积；两个复数乘积的辐角等于它们的辐角的和.

因此，当利用向量来表示复数时，可以说表示乘积 z_1z_2 的向量是从表示 z_1 的向量旋转一个角度 $\operatorname{Arg}z_2$，并伸长（缩短）到 $|z_2|$ 倍得到的，如图 1.3.1 所示. 特别地，当 $|z_2|=1$ 时，乘法变成了只是旋转. 例如 $\mathrm{i}z$ 相当于将 z 逆时针旋转 90°，$-z$ 相当于将 z 逆时针旋转 180°. 又当 $\arg z_2=0$ 时，乘法就变成了仅仅是伸长（缩短）.

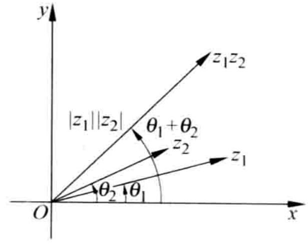

图　1.3.1

由于辐角的多值性，等式(1.3.2)两端都是由无穷多个数构成的两个数集. 等式(1.3.2)表示两端可能取的值的全体是相同的. 也就是说，对于左端的任一值，

右端必有一值和它相等，并且反过来也一样. 例如，设 $z_1=-1$， $z_2=\mathrm{i}$，则 $z_1z_2=-\mathrm{i}$，

$$\operatorname{Arg} z_1=\pi+2n\pi \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

$$\operatorname{Arg} z_2=\frac{\pi}{2}+2m\pi \quad (m=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

代入等式(1.3.2)得

$$\frac{3\pi}{2}+2(m+n)\pi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi.$$

要使上式成立，必须且只需 $k=m+n+1$，只要 m 与 n 各取一确定的值，总可选取 k 的值使 $k=m+n+1$，反之也一样. 若取 $m=n=0$，则取 $k=1$；若取 $k=-1$，则可取 $m=0$， $n=-2$ 或 $m=-2$， $n=0$.

对于后面的式(1.3.5)中的第二个等式也应当这样来理解.

如果用指数形式来表示复数：

$$z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1},\quad z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2},$$

则定理 1.3.1 可以简单地表示为

$$z_1z_2=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}, \tag{1.3.3}$$

由此逐步可证，如果

$$z_k=r_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}=r_k(\cos\theta_k+\mathrm{i}\sin\theta_k) \quad (k=1,2,\cdots,n),$$

则

$$\begin{aligned} z_1z_2\cdots z_n&=r_1r_2\cdots r_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}\\ &=r_1r_2\cdots r_n\left[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)\right], \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

按照商的定义，当 $z_1\neq0$ 时，有

$$z_2=\frac{z_2}{z_1}z_1,$$

由式(1.3.1)和式(1.3.2)就有

$$|z_2|=\left|\frac{z_2}{z_1}\right||z_1|,\quad \operatorname{Arg} z_2=\operatorname{Arg}\frac{z_2}{z_1}+\operatorname{Arg} z_1,$$

于是

$$\left|\frac{z_2}{z_1}\right| = \frac{|z_2|}{|z_1|}, \quad \mathrm{Arg}\,\frac{z_2}{z_1} = \mathrm{Arg}\,z_2 - \mathrm{Arg}\,z_1. \tag{1.3.5}$$

综合以上分析可得以下定理.

定理 1.3.2 两个复数商的模等于它们模的商；两个复数商的辐角等于它们的辐角之差.

如果用指数形式来表示复数：

$$z_1 = r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}, \quad z_2 = r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2},$$

则定理 1.3.2 可以简单地表示为

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)} \quad (r_1 \neq 0). \tag{1.3.6}$$

例 1.3.1 化简 $\dfrac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}}$.

解 $\dfrac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{2\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}\mathrm{i}}\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}} = \mathrm{e}^{\left[-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$.

1.3.2 乘幂与方根

n 个相同复数 z 的乘积称为 z 的 n 次幂，记作 z^n，即

$$z^n = \underbrace{z\cdot z\cdots z}_{n}.$$

如果我们在式(1.3.4)中，令 z_1 到 z_n 的所有复数都等于 z，则对于任何正整数 n，我们有

$$z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta). \tag{1.3.7}$$

如果我们定义 $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$，则当 n 为负整数时上式也是成立的.作为练习，由读者自己证明.

特别地，当 z 的模 $r=1$，即 $z=\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ 时，由式(1.3.7)有

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta, \tag{1.3.8}$$

这就是**棣莫弗（De Moivre）公式**. 公式(1.3.7)与(1.3.8)有广泛的应用.