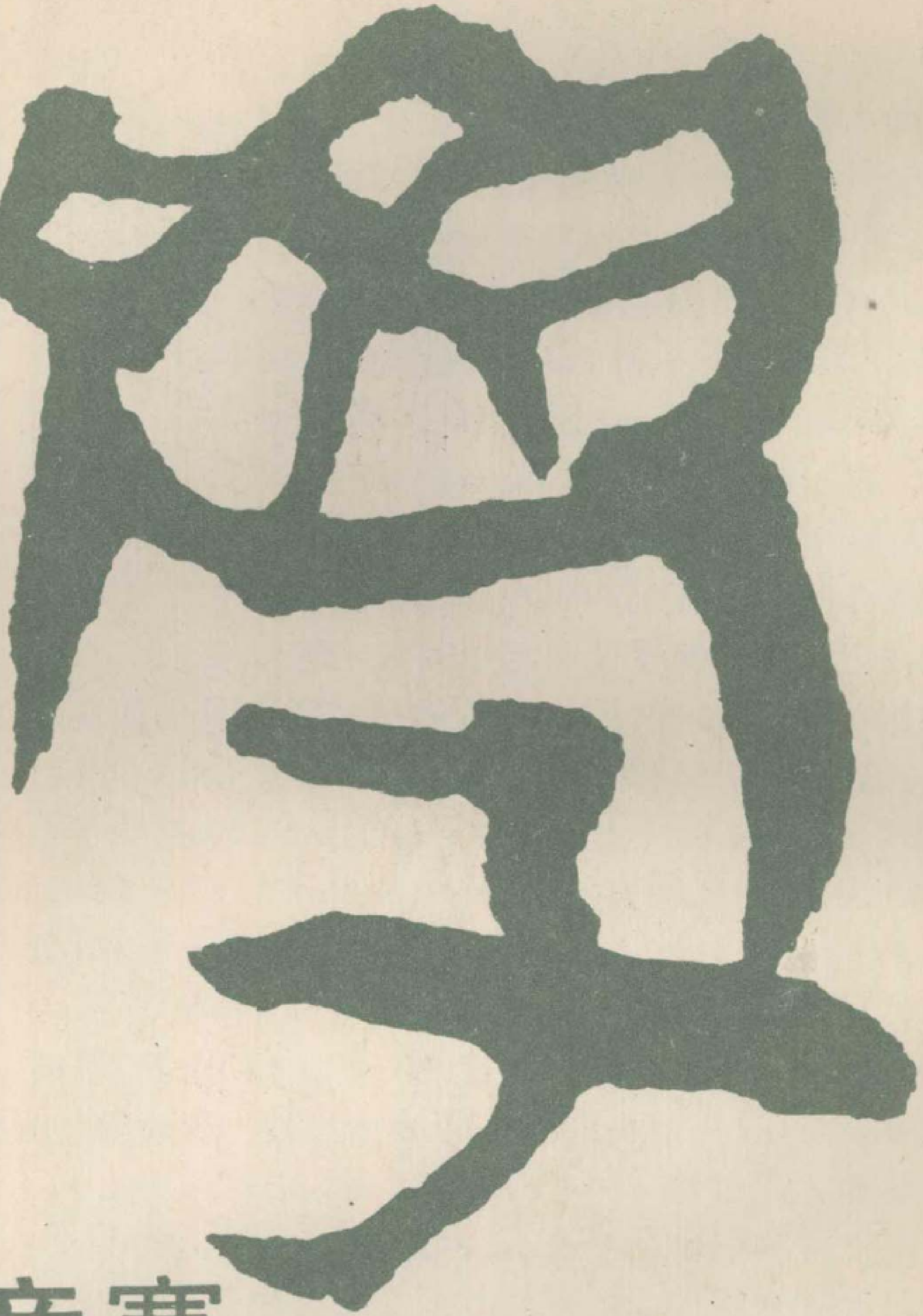
ATHEMATICS
LYMPIAD

数学竞赛

湖南教育出版社 12



数学竞赛

MATHEMATICS OLYMP

ISBN 7—5355—1399—9/G·1394

定 价：1.60 元

数学竞赛

湖南教育出版社

12

数 学 竞 赛

(12)

本 社 编

责任编辑：欧阳维诚

湖南教育出版社出版发行

湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷三厂印刷

850×1168 毫米　32 开　印张：4.125　字数：100,000

1992 年 2 月第 1 版　1992 年 2 月第 1 次印刷

印数：1—2600

ISBN7—5355—1399—9／G · 1394

定价· 1.60元

目　录

1991年全国高中数学联赛试题及解

湘　普

1991年全国高中数学联赛于1991年10月举行。竞赛分为第一试和第二试，第一试着重于考查学生的数学基础知识，第二试则着重于考查学生的创造思维能力.下面是这次竞赛的试题及参考解答.

第　一　试

一、选择题

本题共有6个小题，每小题给出了（A）、（B）、（C）、（D）四个结论，其中只有一个是正确的，请把正确结论的代表字母写在题后圆括号内，每小题选对得5分；不选、选错或选出的代表字母超过一个（不论是否写在圆括号内），一律得零分.

1. 由一个正方体的三个顶点所能构成的正三角形的个数为

(A) 4;　(B) 8;　(C) 12;　(D) 24

2. 设a、b、c均为非零复数，且$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$，则$\frac{a+b-c}{a-b+c}$的值为

(A) 1;　(B) $\pm\omega$;　(C) 1，ω，ω^2，

(D) 1，$-\omega$，$-\omega^2$. 其中$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

3. 设a是正整数，$a<100$，且a^2+23能被24整除，那么，这样的a的个数为

(A) 4;　(B) 5;　(C) 9;　(D) 10.

4. 设函数$y=f(x)$对一切实数x都满足

$$f(3+x)=f(3-x),$$

且方程$f(x)=0$恰有6个不同的实根，则这6个实根的和为

(A) 18;　　(B) 12;　　(C) 9;　　(D) 0.

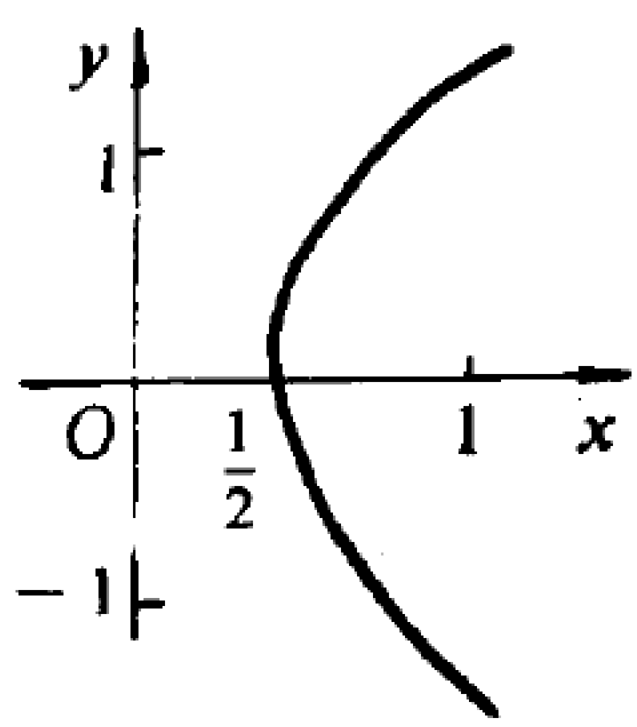
5. 设$S=\{(x,\ y)|x^2-y^2=奇数,\ x,\ y\in R\}$,

$T=\{(x,\ y)|\sin(2\pi x^2)-\sin(2\pi y^2)=\cos(2\pi x^2)-\cos(2\pi y^2),\ x,\ y\in R\}$，则

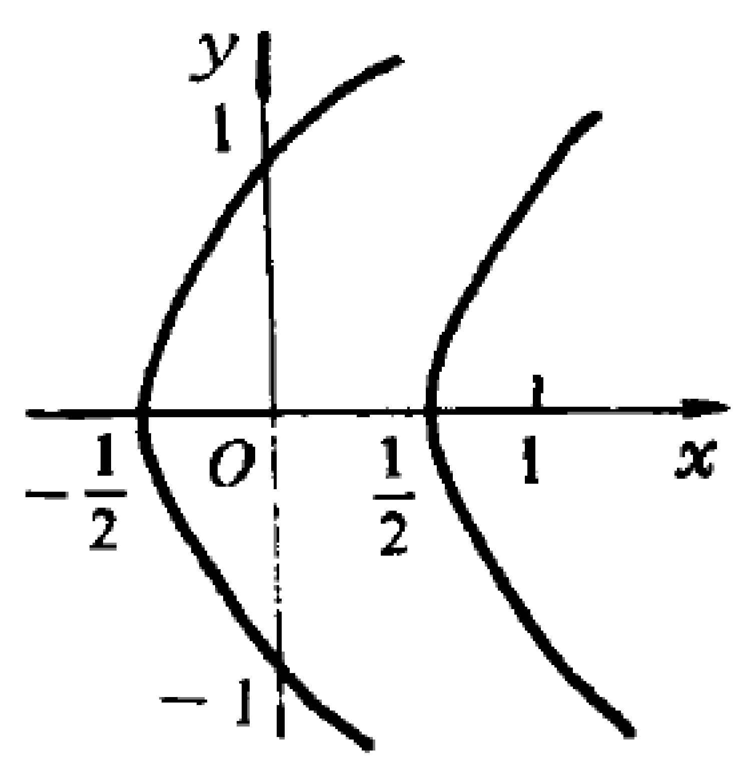
(A) $S\subset T$;　　(B) $T\subset S$;

(C) $S=T$;　　(D) $S\bigcap T=\phi$.

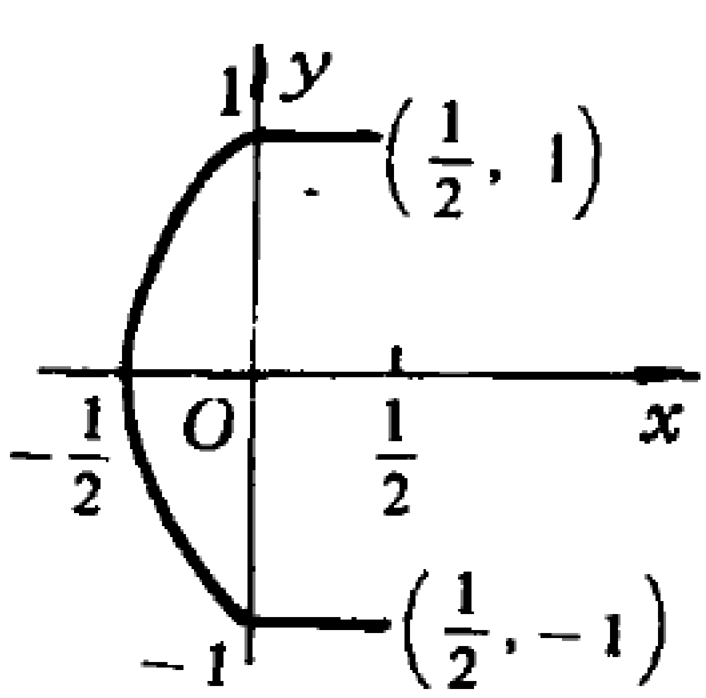
6. 方程$|x-y^2|=1-|x|$的图象为:



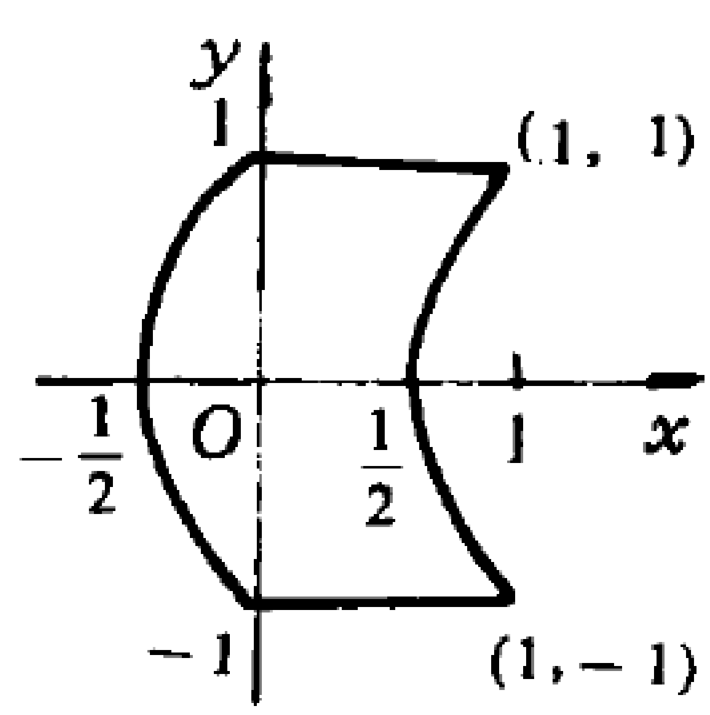
(A)



(B)



(C)



(D)

答案：1. B；2. C；3. B；4. A；5. A；6. D.

二、填空题

1. $\cos^2 10° + \cos^2 50° - \sin 40° \sin 80° =$ ______.

2. 在$\triangle ABC$中，已知三个角A、B、C成等差数列，假设他们所对的边分别为a、b、c，并且$c-a$等于AC边上的高h，则$\sin\dfrac{C-A}{2} =$ ______.

3. 将正奇数集合$\{1,3,5,\cdots\}$由小到大按第n组有$(2n-1)$个奇数进行分组:

$\{1\}$, $\{3,5,7\}$, $\{9,11,13,15,17\}$, ……

(第一组) (第二组) (第三组)

则1991位于第______组中.

4. 1991^{2000}除以10^6，余数是______.

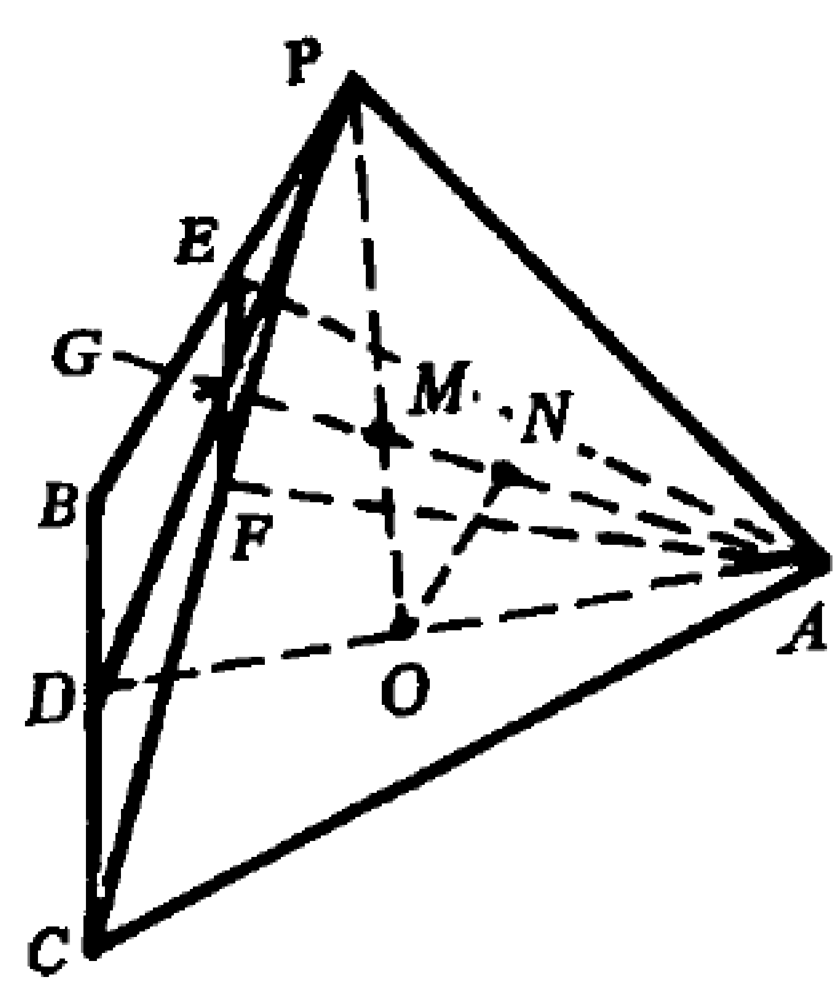
5. 设复数z_1, z_2满足$|z_1| = |z_1 + z_2| = 3, |z_1 - z_2| = 3\sqrt{3}$，则$\log_3 |(z_1\overline{z_2})^{2000} + (\overline{z_1}z_2)^{2000}| =$ ________.

6. 设集合$M = \{1,2,\cdots,1000\}$. 现对M的任一非空子集X，令α_x表示X中最大数与最小数之和，那么，所有这样的α_x的算术平均值为 ______.

答案 1. $\dfrac{3}{4}$; 2. $\dfrac{1}{2}$; 3. 32; 4. 88001;

5. 4000; 6. 1001.

三、设正三棱锥P–ABC的高为PO, M为PO的中点,过AM作与棱BC平行的平面,将三棱锥截为上、下两部分,试求此两部分体积之比.



解 设过AM平行于BC的平面与棱PB、PC分别交于E、F, 则

$$EF \parallel BC.$$

又设D为BC的中点，连结

PD交 EF 于 G,则

$$\frac{EF}{BC}=\frac{PG}{PD}.$$

因为A到平面PBC的距离即为A到平面PEF的距离,所以

$$\frac{V_{P-AEF}}{V_{P-ABC}}=\frac{S_{\triangle PEF}}{S_{\triangle PBC}}=\left(\frac{PG}{PD}\right)^2.$$

在ΔPDA中，过O点作PD的平行线交AG于N，则

$$\frac{PG}{GD}=\frac{ON}{GD}=\frac{AO}{AD}=\frac{2}{3}.$$

$$\frac{PG}{PD}=\frac{2}{5}，故 \frac{V_{P-AEF}}{V_{P-ABC}}=\frac{4}{25}.$$

故所求的上、下两部分体积之比为$\frac{4}{21}$.

四、设 O 为抛物线的顶点，F 为焦点，且 PQ 为过 F 的弦，已知$|OF|=a$，$|PQ|=b$，求$\triangle OPQ$ 的面积.

解 以F为极点，Fx为极轴建立极坐标系(如图1),

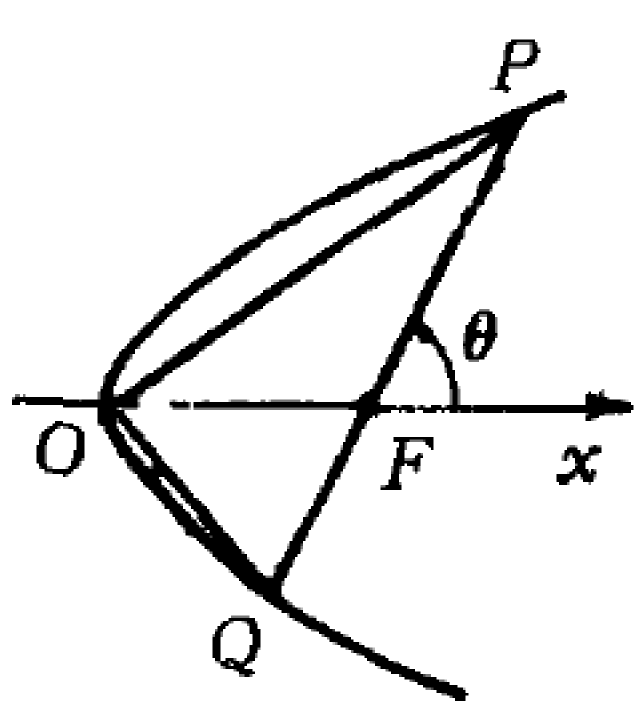


图1

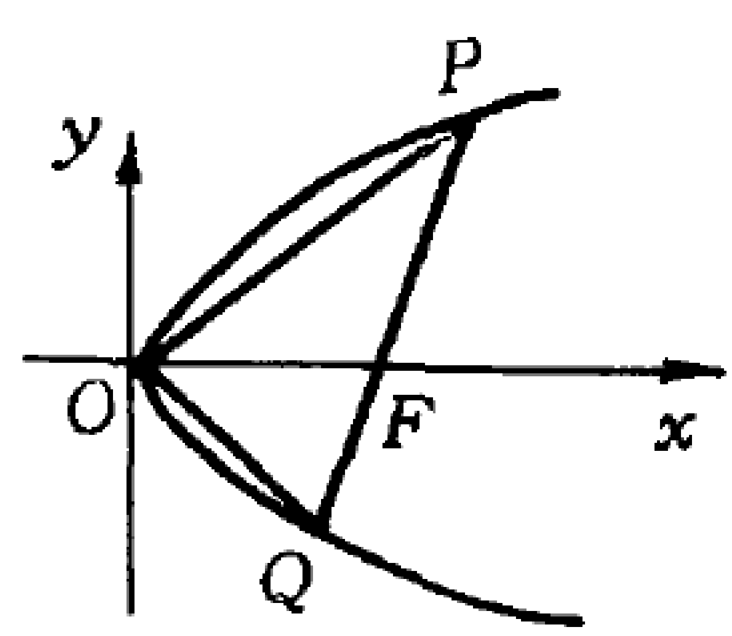


图2

则抛物线的方程为

$$\rho=\frac{2a}{1-\cos\theta}.$$

设点P的极角为$\theta(\theta\in(0,\ \pi))$，则点$Q$的极角为$\pi+\theta$. 所以

$$|PQ|=\rho_P+\rho_Q=\frac{2a}{1-\cos\theta}+\frac{2a}{1-\cos(\pi+\theta)}=\frac{4a}{\sin^2\theta}.$$

即 $\dfrac{4a}{\sin^2\theta}=b$.或 $\sin\theta=2\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

又 $S_{\triangle OPF}=\dfrac{1}{2}a|FP|\sin\theta$, $S_{\triangle OQF}=\dfrac{1}{2}a|FQ|\sin\theta$.

故 $S_{\triangle OPQ}=S_{\triangle OPF}+S_{\triangle OQF}=\dfrac{1}{2}a(|FP|+|FQ|)\sin\theta$

$$=\frac{1}{2}ab\sin\theta=\frac{1}{2}ab\cdot 2\sqrt{\frac{a}{b}}=a\sqrt{ab}.$$

五、已知 $0<a<1$，$x^2+y=0$，求证 $\log_a(a^x+a^y)\leqslant\log_a 2+\dfrac{1}{8}$.

证 因$0<a<1$，$a^x>0$，$a^y>0$,有

$$a^x+a^y\geqslant 2\sqrt{a^x\cdot a^y}=2a^{(x+y)/2},$$

从而 $\log_a(a^x+a^y)\leqslant\log_a(2a^{(x+y)/2})$.

现有 $\log_a(2a^{(x+y)/2})=\log_a 2+\dfrac{x+y}{2}=\log_a 2+\dfrac{1}{2}x(1-x)$

$$\leqslant\log_a 2+\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2=\log_a 2+\frac{1}{8}.$$

故得所证不等式

第 二 试

一、设 $S=\{1,2,\cdots,n\}$，A 为至少含有两项的、公差为正的等差数列，其项都在 S 中，且添加 S 的其他元素于 A 均不能构成与 A 有相同公差的等差数列，求这种 A 的个数。(这里只有两项的数列也看作等差数列.)

解一 设A的公差为d，则$1\leqslant d\leqslant n-1$.

分两种情况讨论:

(a)设n为偶数，则

当$1\leqslant d\leqslant n/2$时，公差为$d$的$A$有$d$个;

当$\frac{n}{2}+1 \leqslant d \leqslant n-1$时，公差为$d$的$A$有$n-d$个.

故当n为偶数时，这种A共有

$$(1+2+\cdots+\frac{n}{2})+\left\{1+2+\cdots+[n-(\frac{n}{2}+1)]\right\}=\frac{n^2}{4}(\text{个}).$$

(b)设n为奇数，则

当$1 \leqslant d \leqslant \frac{n-1}{2}$时，公差为$d$的$A$有$d$个;

当$\frac{n+1}{2} \leqslant d \leqslant n-1$时，公差为$d$的$A$有$n-d$个.

故当n为奇数时，这种A共有

$$(1+2+\cdots+\frac{n-1}{2})+(1+2+\cdots+\frac{n-1}{2})=\frac{n^2-1}{4}(\text{个}).$$

两情况可统一为：这种A有$[n^2/4]$个.

解二 对于$n=2k$，所述数列A必有连续两项，一在$\{1,2,\cdots,k\}$中，另一在$\{k+1,k+2,\cdots,n\}$中，反之，从$\{1,2,\cdots,k\}$中任取一数，$\{k+1,k+2,\cdots,n\}$中任取一数，以他们的差为公差可作出一个A，此对应是一一对应。故这种A的个数为$k^2=n^2/4$. 对于$n=2k+1$，情况完全类似，注意集合$\{k+1,k+2,\cdots,n\}$中有$k+1$个数，故这种A的个数为$k(k+1)=(n^2-1)/4$. 两式可统一为$[n^2/4]$.

二、设凸四边形$ABCD$的面积为1，求证在它的边上（包括顶点）或内部可以找出四个点，使得以其中任意三点为顶点所构成的四个三角形的面积均大于$\frac{1}{4}$.

证一 如图1,考虑四个三角形$\triangle ABC$,$\triangle BCD$,$\triangle CDA$,$\triangle DAB$的面积，不妨设$S_{\triangle DAB}$为最小，这时有四种情况:

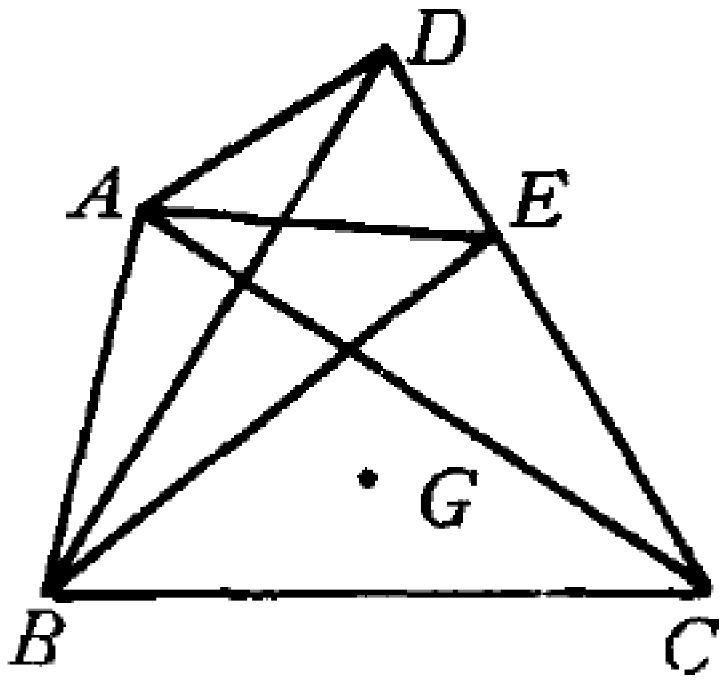


图 1

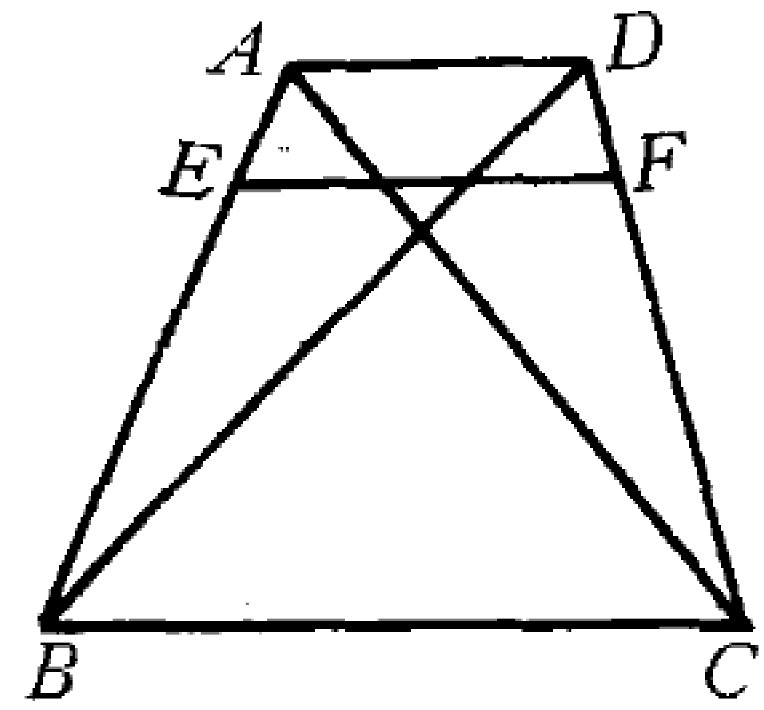


图 2

(a) $S_{\triangle DAB}>\frac{1}{4}$ 时，显然 A、B、C、D 即为所求的四点．

(b) $S_{\triangle DAB}<\frac{1}{4}$，设 G 为 $\triangle BCD$ 的重心，因 $S_{\triangle BCD}=1-S_{\triangle DAB}>\frac{3}{4}$，故 $S_{\triangle GBC}=S_{\triangle GCD}=S_{\triangle GDB}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}>\frac{1}{4}$．于是，$B$，$C$，$D$，$G$四点即为所求．

(c) $S_{\triangle DAB}=\frac{1}{4}$ 而其他三个三角形的面积均大于$\frac{1}{4}$．由于 $S_{\triangle ABC}=1-S_{\triangle CDA}<\frac{3}{4}=S_{\triangle BCD}$，故过 A 作 BC 的平行线 l 必与线段 CD 相交 CD 内部的一点 E．

由于$S_{\triangle ABC}>S_{\triangle DAB}$，故$S_{\triangle EAB}>S_{\triangle DAB}=\frac{1}{4}$．又$S_{\triangle EAC}=S_{\triangle EAB}$，$S_{\triangle EBC}=S_{\triangle ABC}>\frac{1}{4}$，故$E$，$A$，$B$，$C$四点即为所求．

(d)$S_{\triangle DAB}=\frac{1}{4}$ 而其他三个三角形中还有一个面积为$\frac{1}{4}$，不妨设 $S_{\triangle CDA}=\frac{1}{4}$(图 2)．因 $S_{\triangle DAB}=S_{\triangle CDA}$，故 $AD\,/\!/\,BC$．

又 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle DBC}=\frac{3}{4}$，故得 $BC=3AD$．在 AB 上取 E，DC

上取 F，使 $AE=\frac{1}{4}AB$， $DF=\frac{1}{4}CD$. 那么，

$$EF=\frac{1}{4}(3AD+BC)=\frac{3}{2}AD,$$

$$S_{\triangle EBF}=S_{\triangle ECF}=\frac{3}{4}S_{\triangle ABF}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}>\frac{1}{4},$$

$$S_{\triangle EBC}=S_{\triangle FBC}>S_{\triangle EBF}>\frac{1}{4}.$$

故E，B，C，F四点即为所求.

证二 如果$ABCD$是平行四边形，那么

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BCD}=S_{\triangle CDA}=S_{\triangle DAB}=\frac{1}{2}.$$

因此，A，B，C，D四点即为所求.

如果 $ABCD$ 不是平行四边形，不妨设 AD 与 BC 不平行，且 $\angle DAB+\angle CBA<\pi$. 又设 D 到 AB 的距离不超过 C 到 AB 的距离，过 D 作 AB 的平行线交 BC 于 F，分两种情况讨论:

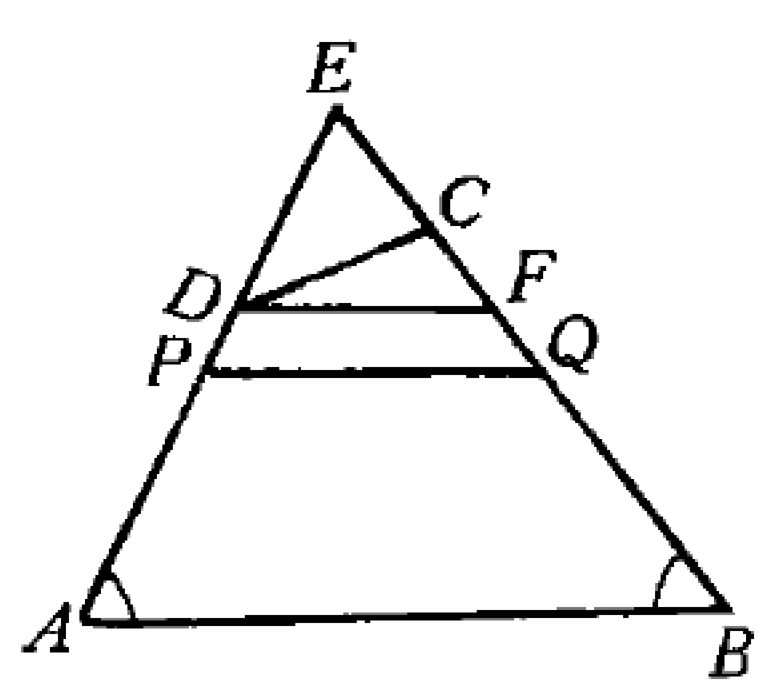


图3

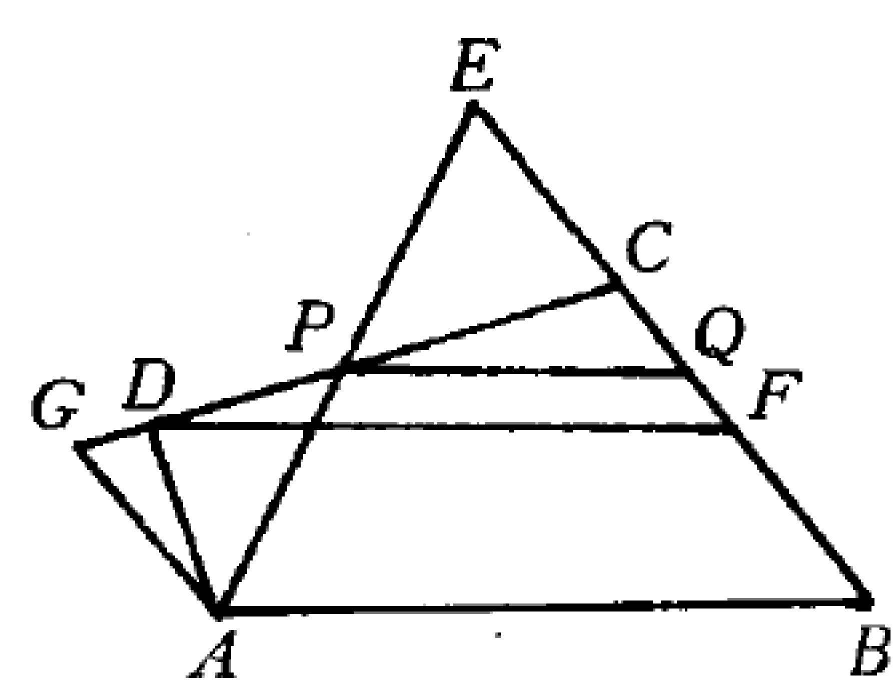


图4

(a) $DF\leqslant\frac{1}{2}AB$.（图 3). 此时可在线段 AD 与 BC 上分别取 P，Q 使得

$$PQ \parallel AB \quad 且 \quad PQ=\frac{1}{2}AB. \tag{1}$$

则可证 A，B，P，Q 即为所求．其实，设直线 AD、BC 相交于 E，则

$S_{\triangle ABP} = S_{\triangle ABQ} > S_{\triangle APQ} = S_{\triangle BPQ} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABE} > \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{4}$.

(2)

(b)$DF > \frac{1}{2} AB$(图 4). 此时可在线段 DC 与 FC 上分别取 P，Q，使 (1) 式成立 (当 $CD \parallel AB$ 时，$Q = F = C$). 现证 A，B，P，Q 即为所求.

设 AP 与 BC 的延长线交于 E. 由于 (1),P 为 AE 的中点. 过 A 作 BC 的平行线 l, 由于 $\angle DAB + \angle CBA < \pi$,$l$ 必与 CD 的延长线相交. 设交点为 G, 则 $S_{\triangle PCE} = S_{\triangle PGA} > S_{\triangle PDA}$. 故有

$S_{\triangle EAB} = S_{\triangle PCE} + S_{PABC} > S_{\triangle PDA} + S_{PABC} = S_{ABCD}$.

同样可证得(2)式成立.

三、设 a_n 为下述自然数 N 的个数：N 的各位数字之和为 n 且每位数字只能取 1、3 或 4. 求证 a_{2n} 是完全平方数，这里 $n = 1,2,\cdots$.

证一　设 $N = \overline{x_1 x_2 \cdots x_k}$，其中 $x_1, x_2, \cdots, x_k \in \{1,3,4\}$，且 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$. 假定 $n > 4$. 删去 x_1 时，则当 x_1 依次取 1,3,4 时，$x_2 + x_3 + \cdots + x_k$ 分别等于 $n-1$，$n-3$，$n-4$. 故当 $n > 4$ 时，

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4}. \tag{1}$$

先用归纳法证明下式成立:

$$a_{2n+1} = a_{2n} + a_{2n-1}. \tag{2}$$

因$a_1 = a_2 = 1$，$a_3 = 2$，故当$n = 1$时，(2)成立.

设$n = k$时(2)成立，即$a_{2k+1} = a_{2k} + a_{2k-1}$，则据(1),

$a_{2k+3} = a_{2k+2} + a_{2k} + a_{2k-1} = a_{2(k+1)} + a_{2(k+1)-1}$.

可见(2)对$k+1$成立。于是(2)对一切$n \in \mathrm{N}$成立.

再用归纳法证明下式成立:

$$a_{2n} a_{2n+2} = a_{2n+1}^2. \tag{3}$$

因$a_2 = 1$，$a_3 = 2$，$a_4 = 4$，故当$n = 1$时(3)式成立.

设$n=k$时(3)成立，即$a_{2k}a_{2k+2}=a_{2k+1}^2$，则据(1)、(2),

$$\begin{aligned}a_{2k+2}a_{2k+4}&=a_{2k+2}(a_{2k+3}+a_{2k+1}+a_{2k})\\&=a_{2k+2}a_{2k+3}+a_{2k+2}a_{2k+1}+a_{2k+1}^2\\&=a_{2k+2}a_{2k+3}+a_{2k+1}a_{2k+3}=a_{2k+3}^2.\end{aligned}$$

可见(3)对$k+1$成立.故(3)对一切$n\in\mathrm{N}$成立.

最后再用归纳法证明本题结论．显然$n=1$时结论正确．设a_{2n}是完全平方数，则由(3)知a_{2n+2}是完全平方数．因此结论对任意自然数n成立．

证二 同证一一样，可以得

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-3}+a_{n-4}\qquad n>4 \tag{1}$$

并且易知

$$a_1=1,\quad a_2=1,\quad a_3=2,\quad a_4=4. \tag{2}$$

视(1)为差分方程，其特征方程为$\lambda^4-\lambda^3-\lambda-1=0$，其四个根为$\pm i,(1\pm\sqrt{5})/2$.因此(1)的解为

$$a_n=Ai^n+B(-i)^n+C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

利用初值(2)，可得

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2-i}{10}i^n+\frac{2+i}{10}(-i)^n\\&\quad+\frac{1}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}+\frac{1}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\end{aligned} \tag{3}$$

$$\text{因此}\begin{cases}a_{2k}=\dfrac{1}{5}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right\}^2,\\[2ex] a_{2k+1}=\dfrac{1}{5}\left\{(-1)^k+\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+3}+\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+3}\right\}.\end{cases}$$

从而不难验明$a_{2k}a_{2k+2}=a_{2k+1}^2$.故以下与证一一样，知$a_{2n}$为完全平方数．

再谈两种数学奥林匹克命题方法

刘培杰

一、早期定理法

此法是将某些早期（所谓早期是指与当次竞赛相隔至少数十年）一些数学家得到的结果直接拿来当做竞赛试题.

例如，十九世纪英国数学家 G · 荣格（G. Jung）曾得到过一个定理：如果 K 是一个平面内闭有界集，使得 K 的任何两点间的距离小于 1，则 K 在半径 $1/\sqrt{3}$ 的圆周内部 . 这个定理有一系列推广，（见《几何中的归纳法》[苏] 高劳文娜 · 亚格苏姆著，赵根榕译，中国青年出版社 1958 年 P · 92）比如推广到三维空间为：如果 K 是三维空间的闭有界集，K 中的任何两点间的距离小于 1，则 K 在半径为$\sqrt{6}/4$ 的球的内部 .1948 年 3 月举行的第九届美国普特南数学竞赛就直接将其拿来当做试题 $B-3$.

又例如 1988 年新加坡中学数学竞赛中有一题为：

对任意正整数 n，在集合 $\{1,2,\cdots,2n\}$ 中任取 $n+1$ 个元素组成另一个集合，则在这个集合中一定存在两个不相等的正整数，使得其中一个是另一个的倍数 .

在我国几乎所有讲抽屉原则的书及文章中都有这样的例子，只不过是将 n 取做 50，但证法上两者是完全相同的 .

事实上，上述试题是 1935 年由厄尔多斯（Erdös）提出的一个数论猜想，后被莱梅（D.H.Lehmer）所证明 .

再例如，1954 年波兰的 Schinzel.A 和 Sierpinski 曾发表过一篇名为 *Surguelgues Propietis des fonctions* φ (n) et σ (n) (Bull. Acad. polon. sci cl 2. (1954)，的文章。其中他们用初等方法得到了这样的结果：不等式 $n^2/2<\varphi(n)\sigma(n)<n^2$ 对于任何自然数 n 都成立 .$\varphi(n)$ 和 $\sigma(n)$ 是两个著名的数论函数，前者称为 Euler 函数（定义为小于 n 且与 n 互素的正整数的个数）后者称为除数函数（定义为 $\sum\limits_{d|n} d$). 21 年后，这个结果成为苏联莫斯科国立师范学院数学竞赛题 .

当然用这种方法命题要注意到两点，一是必须有初等办法可以得到这一结果，另外要注意把握好结论的难易程度，因为有些结果，尽管可用初等办法得到，但却十分困难，以上面的题目为例，在 Hardy 和 Wright 的书 *An introduction to the theory of numbers* 中有如下更强的不等式 .

$A<\sigma(n)\varphi(n)/n^2<1$

其中 $A=\{\xi(2)\}^{-1}=6\pi^{-2}$.$\xi(x)$ 为黎曼函数 . 而这一结果显然不宜拿到竞赛中去 .

当然并不是所有用此法得到的命题都是全盘照抄，命题者可以根据参加竞赛的对象，及竞赛层次做相应调整 .

例如 1976 年莫斯科公路工程学院数学竞赛中曾有如下试题:

设 $a>b>0$,序列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$,定义如下：$a_1=(a+b)/2$, $b_1=\sqrt{ab}$，$a_2=(a_1+b_1)/2$，$b_2=\sqrt{a_1b_1}$，$\cdots$，$a_{n+1}=(a_n+b_n)/2$，$b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$，$\cdots$，试证：这两序列的极限存在且相等 .

实际上这是十八世纪末高斯 (Guass) 的一个（后来被他自己所证明了）的猜测，1791 年高斯取初始值 $a=\sqrt{2}$，$b=1$ 按上述方式进行迭代时发现