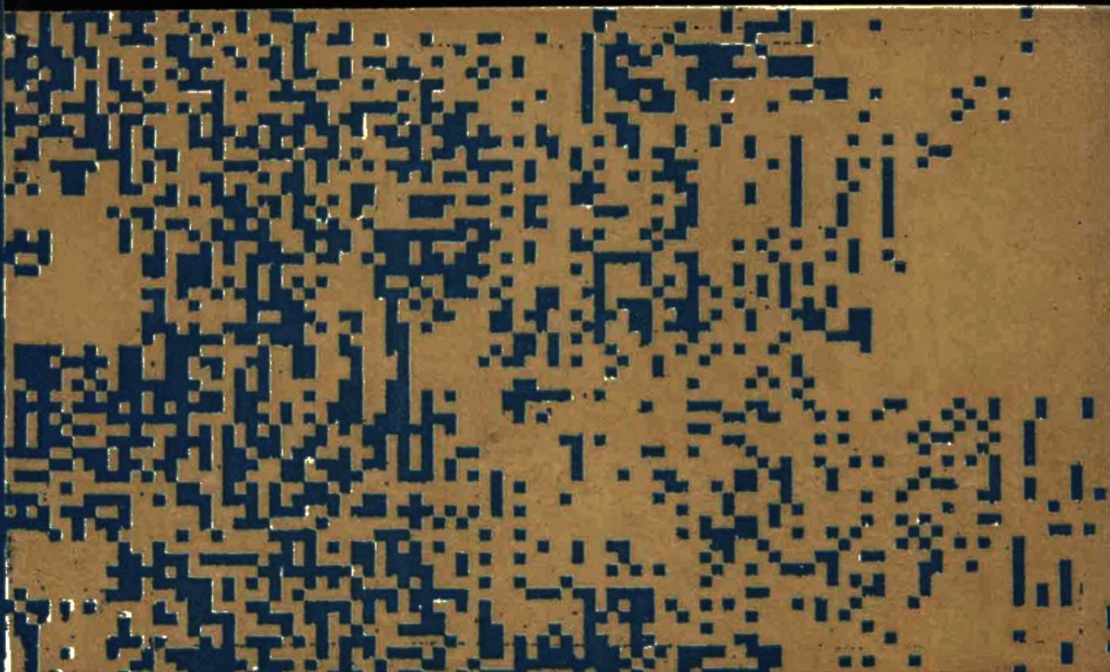
矩阵论基础

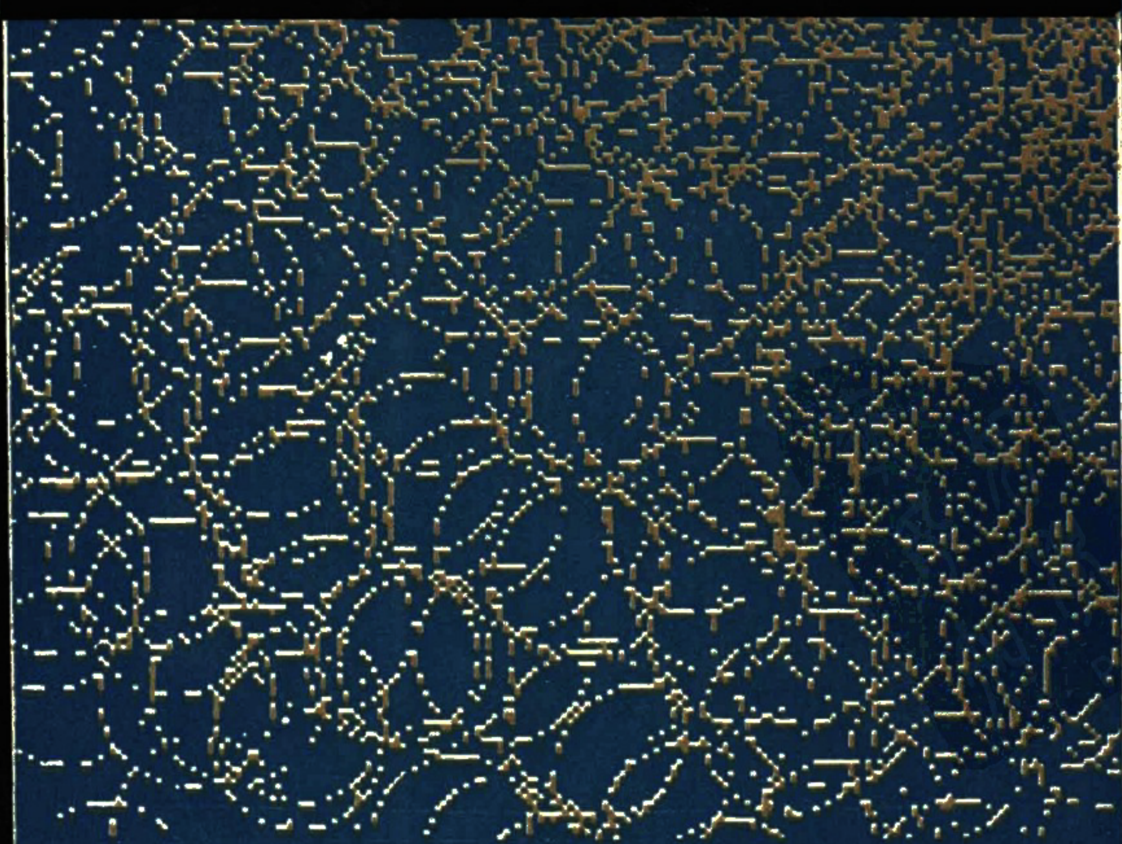
方保镕　编著

河海大学出版社

juzhenlunjichu



责任编辑：龚俊　封面设计：姜嵩



ISBN 7-5630-0601-x/O·43　定价：6.80元

矩阵论基础

方保镕　编著

王能超　主审

河海大学出版社

（苏）新登字第 013 号

内容简介

全书共有九章，主要介绍科技和工程技术中常用的矩阵理论，内容包括：线性空间上的线性算子，内积空间上的线性变换，矩阵标准形，矩阵分解，线性赋范空间与矩阵范数，矩阵分析，广义逆矩阵及其应用，克罗内克积及其应用，辛空间与辛变换。书中各章按节配有适量的习题，以供选用。

本书可作为高等工科院校、师范院校研究生教材，也可供大学高年级学生和有关工程技术人员参考。

责任编辑　龚　俊

矩阵论基础

方保镕　编著

出版发行：河海大学出版社
（南京西康路 1 号，邮政编码：210024）
经销：江苏省新华书店
印刷：工程兵工程学院印刷厂
（地　址：南京市海福巷一号　　邮政编码 210007）

开本 850×1168 毫米　1/32　印张 11.875　字数 308 千字
1993 年 7 月第 1 版　　1993 年 7 月第 1 次印刷
印数 1－2,500 册

ISBN7-5630-0601-X/0.43

定价：6.80 元

前　言

随着科学技术的迅速发展，尤其是大型科学计算的深入开展，古典的线性代数理论已不能满足现代科技的需要，矩阵的理论和方法业已成为科技领域中不可缺少的工具。例如力学、电学、网络学、系统工程、优化方法、稳定理论等，无不与矩阵理论有着密切的联系，特别是计算机的广泛应用，为矩阵论的应用开辟了广阔的前景。因此，在工科高等院校的研究生中开设矩阵论课程势在必行。作者在多年教学实践的基础上，结合各学科研究生教学和科研工作的需要精选内容逐年形成了这本书。本书出版之前曾印成讲义，在河海大学硕士研究生《矩阵论基础》课程教学中试用过多遍，此次正式出版，根据各方面的意见又进行了修改。

本书具有如下特色：

1. 选题明确，取材合适。

《矩阵论》作为工学硕士研究生的一门主干课程，国家教委工科研究生数学课程教学指导小组于 1991 年明文颁布了关于这门课程的“教学基本要求”。本书在取材方面与国家教委指导小组的“基本要求”是完全吻合的，因此它能广泛地适用于国内各类工科院校。

2. 重视理论，面向应用。

本书在重视数学论证的同时，强调了数学概念的物理力学实际背景，突出了与工程技术问题的联系。

3. 加强基础，面向前沿。

辛空间是内积空间的自然延伸，是近代数值分析的学科前沿，它具有重要的应用前景。本书在最末一章专题介绍“辛空间与辛变换”，这是一次很有意义的尝试，在同类教材中独具特色。

4. 思路清晰，文字流畅。

本书是作者多年教学经验的结晶。作者对内容作了精心的处理和安排，具有较强的可读性，既便于教学，也有利于读者自学。全书力求做到内容充实，论述详尽严谨，文字通俗易懂。为了使全书内容有一定的弹性，左上角带“*”号的内容，讲授者可根据实际情况决定取舍。工科修40—60学时的研究生或大学高年级学生，除了删去带“*”号的内容外，对一些定理的证明或例题，亦可酌情删减。所有删减均不影响后面内容的继续学习。书中各章按节配有适量的习题，以供选用。

全书分为九章，其中第一～第八章由方保镕执笔，第九章由王如云执笔，全书由方保镕统稿。本书可作为工科院校、师范院校《矩阵论》课程的教材，对于从事教学和科研工作的有关高等院校的教师及工程技术人员也是一本有益的参考书。

本书稿承蒙华中理工大学王能超教授审阅，提出了很多宝贵意见和建议；第九章得到冯康教授、汪道柳副研究员的指导和帮助；本书还得到河海大学研究生部的大力支持，在此一并表示衷心的感谢！

由于作者水平有限，书中错漏和不妥之处，在所难免，敬请读者批评指正。

编著者

1992年秋

目　录

第一章　线性空间上的线性算子

第二章　内积空间上的线性变换

第三章 矩阵标准形

第四章 矩阵分解

第五章　线性赋范空间与矩阵范数

第六章　矩阵分析

第七章　广义逆矩阵及其应用

第八章　克罗内克(Kronecker)积及其应用

*第九章　辛空间与辛变换简介

第一章 线性空间上的线性算子

线性空间与线性算子(特殊情形为线性变换)是学习矩阵论时经常用到的两个基本概念,它们是研究物理、力学中满足叠加原理的系统的数学模型. 线性空间是对集合的元素在线性运算方面所表现的共性加以概括而形成的新概念. 线性算子(线性变换)则是用来研究线性空间之间关系的主要工具. 然而,比较抽象的线性空间上的线性算子又可用具体的矩阵来处理,因此,本章先从线性空间上的线性算子入手,突出矩阵与它们的联系. 所有论述是在假定读者已经具备线性代数初步知识的基础上进行的,这里所讨论的内容既是已有线性代数知识的深化,也是本书的基础.

§1 线 性 空 间

1.1 线性空间的定义及基本性质

一、 数环与数域

每一个数学概念都有其适用范围,线性空间的概念与在什么范围内取数有直接的关系. 为了准确地叙述和理解线性空间这个数学概念,首先引入数域的概念.

定义 1－1 设 Z 为非空数集且其中任何两个相同或互异的数之和、差与积仍属于 Z(即数集关于加、减、乘法运算封闭),则说 Z 是一个**数环**.

只含一个 0 的数集 $Z=\{0\}$ 显然是个数环.

根据数环的定义有:

1° 任何数环 Z 必含有 0. 因为若 $a\in Z$,则 $a-a=0\in Z$;

$2°$　若 $a\in Z$,则 $-a\in Z$. 因 $0-a=-a\in Z$.

由此可知,$Z=\{0\}$是最小的数环.

定义 1－2　如果 P 是至少含有两个互异数的数环,并且其中任何两个数 a 与 b 之商($b\neq 0$)仍属于 P(换言之,数集关于四则运算都封闭),则说 P 是一个**数域**.

根据数域的定义有:

1. 任何数域 P 中必含有 0 与 1,因为 P 中至少有一个数 $a\neq 0$,而 $a/a=1\in P$.

2. 若 $a\neq 0$,则 $1/a=a^{-1}\in P$.

全体整数(包括 0)组成一个数环;全体有理数组成一个数域,并且是最小的数域,因为数中至少含有 0 与 1,由 0 与 1 通过和、差、积运算形成整数环,再加上商运算即形成有理数域,记为 Q.

全体实数组成一个数域,叫做实数域,记为 R.

全体复数组成一个数域,叫做复数域,记为 C.

读者可以验证,形如 $a+b\sqrt{2}$(其中 a,b 为有理数)的数的全体也构成一个数域,并且它包含了有理数域.

二、线性空间

线性空间是线性代数中 n 维向量空间概念的抽象和推广. 为了便于理解这个抽象概念,我们先回顾 n 维向量空间中的向量在加法及数与向量的乘法方面的运算性质,然后再把具有同样运算性质的一切集合,抽象概括为线性空间.

在 n 维向量空间

$$K^n=\{\alpha=(a_1,a_2,\cdots a_n)\,|\,a_i\in R \text{ 或 } a_i\in C\}$$

中,向量 α 是有序数组,且对向量的加法及数与向量乘法是封闭的(指运算结果都仍是 K^n 中的向量),且满足如下八条规律(设 α、β、γ 都是 n 维向量,λ、μ 是实数):

1.　$\alpha+\beta=\beta+\alpha$　(加法交换律);

2.　$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$　(加法结合律);

3. $\alpha+0=\alpha$ （存在零向量 0）；

4. $\alpha+(-\alpha)=0$ （存在负向量 $-\alpha$）；

5. $\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$ （数因子分配律）；

6. $(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$ （分配律）；

7. $\lambda(\mu\alpha)=(\lambda\mu)\alpha$ （数因子结合律）；

8. $1\cdot\alpha=\alpha$.

值得提出的是，我们要研究的集合已远远超出了 n 维向量空间 K^n 的范围，元素不一定是有序数组，但集合中元素的加法及数与元素的乘法运算，却具有 K^n 中相应的性质. 我们先看如下几个熟知的例子.

例 1－1 以实数为系数，次数不超过n 的一元多项式的全体（包括 0），记作

$P[x]_n=\{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\,|\,a_n,a_{n-1},\cdots,a_1,a_0\in R\}$

按多项式相加及乘常数的规则，则 $P[x]_n$ 对这两种运算是封闭的，因为如 $f(x)\in P[x]_n$，$g(x)\in P[x]_n$，那么 $f(x)+g(x)\in P[x]_n$；若 $k\in R$，则 $kf(x)\in P[x]_n$，且易验证对 $P[x]_n$ 的这两种运算，也有如 K^n 中所述的八条规律.

例 1－2 常系数二阶齐次线性微分方程

$$y''-3y'+2y=0$$

的解的集合

$$Y=\{ae^{2x}+be^x\,|\,a,b\in R\}$$

对于函数的加法及数与函数乘法两种运算也是封闭的，因为若 $y_1=a_1e^{2x}+b_1e^x\in Y$，$y_2=a_2e^{2x}+b_2e^x\in Y$，那么 $y_1+y_2=(a_1+a_2)e^{2x}+(b_1+b_2)e^x\in Y$；当 $k\in R$ 时，则 $ky_1=ka_1e^{2x}+kb_1e^x\in Y$，且满足如 K^n 中所述的八条规律.

例 1－3 在所有 n 阶实矩阵的集合 $R^{n\times n}$ 中，如果 $A,B\in R^{n\times n}$，则 $A+B\in R^{n\times n}$；如果 $k\in R$，则 $kA\in R^{n\times n}$. 即集合对于这两种运算是封闭的，且也都满足如 K^n 中所述的八条规律.

此外，在数学、力学及其它学科中，还有如例1－1～例1－3的大量这样的集合. 因此，有必要不考虑集合的具体内容的涵意，来研究这类集合的公共性质，并把这类集合概括成一个数学名词，于是就有如下的线性空间的概念.

定义 1－3 设 V 是一个非空集合，P 是一个数域. 如果 V 满足如下两个条件：

1. 在 V 中定义一个封闭的加法运算，即当 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ 时，有唯一的和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in V$，并且加法运算满足四条性质：

(1) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ （交换律）；

(2) $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$ （结合律）；

(3) 存在**零元素** $\boldsymbol{0}\in V$，对于 V 中任何一个元素 $\boldsymbol{x}$ 都有 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}$；

(4) 存在**负元素**，即对任一元素 $\boldsymbol{x}\in V$，存在有一元素 $\boldsymbol{y}\in V$，使 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$，且称 $\boldsymbol{y}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的负元素，记为 $-\boldsymbol{x}$，于是有 $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$.

2. 在 V 中定义一个封闭的数乘运算（数与元素的乘法），即当 $\boldsymbol{x}\in V,\lambda\in P$ 时，有唯一的 $\lambda\boldsymbol{x}\in V$，且数乘运算满足四条性质：

(5) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{x}$ （数因子分配律）；

(6) $\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}$ （分配律）；

(7) $\lambda(\mu\boldsymbol{x})=(\lambda\mu)\boldsymbol{x}$ （结合律）；

(8) $1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$，

其中 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ 表示 V 中的任意元素；λ,μ 是数域 P 中任意数；1 是数域 P 中的单位数.

这时，我们说 V 是是数域 P 上的**线性空间**。不管 V 的元素如何，当 P 为实数域 R 时，则称 V 为**实线性空间**；当 P 为复数域 C 时，就称 V 为**复线性空间**.

通常我们把 V 中满足八条规律且为封闭的加法及数乘两种运算，统称**线性运算**. 简言之，凡定义了线性运算的集合，就称线性空间. 因此，线性运算是线性空间的本质，它反映了集合中元素之间的某种代数关系. 当仅研究集合的代数结构时，便抽象出线性空

间的概念.

下面列举一些线性空间的例子.

在 K^n 中,所有实 n 维向量的集合 R^n 是实数域 R 上的线性空间;所有复 n 维向量的集合 C^n 是复数域 C 上的线性空间. 作为特例. 几何空间全体向量组成的集合 R^2 或 R^3 是实数域 R 上的线性空间.

例 1－1～例 1－3 中的集合,在其各自的加法及数乘运算的定义下,都构成实数域 R 上的线性空间. 我们称例 1－3 所给的线性空间 $R^{m\times n}$ 为**矩阵空间**.

此外,检验集合是否构成线性空间,逐条检验它是否为线性运算是至关重要的. 例如,次数等于 $n(n\geq1)$ 的多项式的集合,关于通常的多项式加法与数乘运算是不能构成线性空间的. 因为两个 n 次多项式的和可能不是 n 次多项式,如当 $n>1$ 时,$f(x)=x^n+x$,$g(x)=-x^n+1$,则 $f(x)+g(x)=x+1$ 就不属于原来的集合,亦即对加法运算不封闭,故不是线性空间. 还要注意,检验线性运算不能只检验对运算的封闭性,特别是当定义的加法及数乘运算不是通常的实数间的运算时,则应仔细检验其余八条规律.

下面再举一个不是线性空间的例子.

例 1－4 平面上全体向量组成的集合,对于通常意义下的向量加法和如下定义的数乘

$$k\cdot\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$$

虽然对两种运算都封闭,但因 $1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,不满足运算规律(8),即定义的运算不是线性运算,所以不是线性空间.

一般地说,同一个集合,若定义两种不同的线性运算,就构成不同的线性空间;若定义的运算不是线性运算,也就不能构成线性空间. 所以,线性空间的概念是集合与运算二者的结合. 为了对线性空间的理解更具有一般性,请看下面的线性空间所表现的代数结构.

例 1－5 设 R^+ 为所有正实数组成的数集,其加法及数乘运