偏微分方程外边值问题数值解

姜忠炳　杨凤翔　编著

天津大学出版社

偏微分方程外边值问题数值解

姜忠炳　杨凤翔　编著

天津大学出版社

内 容 提 要

偏微分方程外边值问题与许多实际问题有着广泛的联系，因此近十几年来国内外发表了许多关于偏微分方程外边值问题数值解的文章，尚未见到这个问题的专著。本书系统介绍这方面的主要研究成果。

全书共分 6 章，前两章介绍偏微分方程外边值问题的一般理论，以及将要用到的一些基础知识，后四章介绍外边值问题的数值方法，并注意到方法的理论分析。

本书可作为高等院校高年级本科生和研究生有关研究方向的专题选讲教材，也可供有关教师和科技工程工作者参考。

(津)新登字012号

偏微分方程外边值问题数值解
姜忠炳 杨凤翔 编著
*
天津大学出版社出版
(天津大学内)
河北省邮电印刷厂印刷
新华书店天津发行所发行
*
开本：850×1168 毫米1/32 印张：14 3/8 字数：374千字
1992年12月第一版 1992年12月第一次印刷
印数：1—1000
ISBN 7-5618-0408-3
O.45
定价：4.65元

前　　言

科学与工程技术中大量的数学模型，都可以用偏（常）微分方程来描述，许多自然科学规律本身就是用偏（常）微分方程来表徵的。众所周知，寻求偏微分方程的解析解有时非常困难，甚至是不可能的。因此偏微分方程的数值解法，无论从研究自然科学的规律，从科学与工程技术的应用，从数值分析方法的研究来看，都是十分重要的，近20年来颇受国内外科学技术工作者的注意，并出版了多种微分方程数值解的著作，但都是属于有界域上微分方程定解问题的数值解法。60年代中期美国海军科学研究部门发表了“简化了的波动方程Dirichlet外问题数值解”研究报告〔1〕以来，直到近期仍不断地有关于偏微分方程在无界域上（包括“外边值问题”）数值解法的文献〔2〕，在〔3〕中有一章专门讨论“外边值问题”的极有趣的边界条件问题。但是偏微分方程“外边值问题”数值解法的专著，目前我们尚未见到。

当代一切科学技术领域的发展，都离不开最能发挥电子计算机巨大潜力的数值方法或数值模拟。由于偏微分方程外边值问题与许多实际问题有着广泛联系，因此它的数值解法也将要成为研究的重要领域之一。

80年代初期，由于实际工作的需要，我们开始了对“偏微分方程外边值问题数值解”的研究，并于1985—1987年获得原教育部直属高等学校科技重点项目的基金资助。我们在与有关科技人员的交往中，在教学与科研的实践中，深感有必要系统地介绍“偏微分方程外边值问题”数值解法，以引起读者对这个问题的研究兴趣。

本书汇集了国内外近期一些关于“偏微分方程外边值问题”数值解法的研究成果，曾作为我校应用数学专业研究生专题讲座材料，后经整理补充修改而成。试图用不太多的篇幅系统介绍“偏微分方

程外边值问题”数值解法的主要内容（以后简称为“外边值问题”数值解）。书中不仅要阐明各种数值方法，而且还注意方法的理论分析，这对于从事应用科学和技术科学的工作者都是重要的。

全书共分6章：

第1章　“外边值问题”的一般理论

第2章　泛函分析与Соболев空间初阶

第3章　有限元法与无限元法

第4章　边界积分方程法

第5章　有限差分法

第6章　耦合法

本书这样取材（内容不涉及尚未系统研究的“非线性外边值问题”的数值解）和编排，目的是便于读者由浅入深，循序渐进，读者不需要参考更多资料就能阅读本书。前两章介绍“外边值问题”的基本知识和理论基础，后四章介绍数值方法及有关理论。

本书是从事偏微分方程外边值问题数值解的理论研究和实际应用的科技工作者的主要材料，也用以作为应用数学、应用力学、应用物理的高年级本科生或研究生有关问题的专题选讲教材，对于从事海洋工程、大气科学、矿山开采、水坝工程的有关科技人员亦有重要参考价值。

偏微分方程外边值问题数值解（即使是线性部分），还有许多工作可做。本书的问世，如能引起读者兴趣，互相交流切磋，我们将十分欢迎。由于水平有限，经验不足，书中缺点错误难免，殷切期望读者批评指正。

我们感谢本书所引文献的作者，若不是借助于他（她）们的工作，本书是很难完成的。天津大学刘冠教授审阅了本书初稿，并提出许多宝贵意见，我们表示衷心感谢；天津大学出版社同志为本书的出版做了大量工作，在此一并致谢。

编者　1991年9月

于津大园

符号说明

本书采用符号与一般教科书和文献上的尽可能一致，在此不需一一列出，仅列出一些本书特用区域。

R^n（$n=2$，3）表示二维、三维全空间；

$\Omega\subset R^n$表示R^n中的一个有界域，它的维数由n确定；

$\partial\Omega$　表示Ω的边界，当$n=3$时$\partial\Omega$表示Ω的边界曲面，有时也用“Σ”表示；当$n=2$时，$\partial\Omega$表示Ω的边界曲线，有时也用Γ表示；

$\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$表示有界闭域，$\overline{\Omega}'$类似；

$\Omega'=R^n\setminus\overline{\Omega}$表示$\Omega$的外部区域，$\partial\Omega'$表示它的内边界；

Ω_0'　表示某个特殊的无界域，$\partial\Omega_0'$表示它的内边界。

此外，“。”表示定义、定理、引理、推论等叙述完毕。“□”表示某个命题证明完毕。

目　录

第一章　外边值问题的一般理论

从大量的有关偏微分方程的著作和文献中可以看到：长期以来人们较多地注意研究偏微分方程在有界域上的理论问题和数值方法，无疑这是很有意义的。同时人们也注意到[4]客观上确实存在许多实际问题，如海洋工程、空间技术、大气科学、矿山开采、水坝工程等问题中，某些运动规律需要用偏微分方程在某个有界域之外。或在全空间中，或在特殊无界域上的定解问题来描述。实际上存在三类无界域上的定解问题（例1.1.1～1.1.3），处理它们的数值方法基本上是相同的。关于"外边值问题"的确切提法，将在§1.2中给出。在研究"外边值问题"数值解之前，先就无界域上定解问题，在理论上做些准备，是完全必要的。

§1.1　无界域上定解问题的适定性

§1.1.1　几个例子

本节以实例，说明"外边值问题"产生的背景，以引起读者研究其数值解的兴趣。

例1.1.1　海上构筑物（如海上采油平台、防波堤等）在入射波的作用下的载荷问题。如图1-1所示，设构筑物沉没或半沉没于流体中，流体是不可压缩的、无粘性的、无旋运动，波的幅度较小（即小振幅运动）。这里不考虑波的起始时间，只考虑稳态振动的情形。在上述假定下有

$$\boldsymbol{q}=\nabla\Phi(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t),\qquad(1.1.1)$$

其中$\nabla=\left[\dfrac{\partial}{\partial x_1},\ \dfrac{\partial}{\partial x_2},\ \dfrac{\partial}{\partial x_3}\right]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{q}$表示流体的速度矢量，$\Phi$是速度

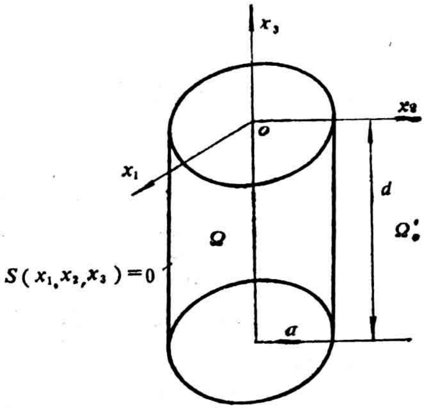

图 1-1

势。流体的流动依赖于时间t，如果只考虑最简单的简谐运动，此时速度势应为

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, t) = \mathrm{Re}[\phi(x_1, x_2, x_3)e^{-i\omega t}], \quad (1.1.2)$$

上式中$\omega=2\pi/T$，T是周期，ω是频率，ϕ是复势，如果不考虑流体流动的起始时间，此时取$t=0$，再由流体运动的连续方程可得Laplace方程：

$$\Delta\phi=0, \qquad (x_1, x_2, x_3)\in\Omega'_0. \qquad (1.1.3)$$

若用ϕ_W，ϕ_S分别表示入射势和散射势，总势$\phi=\phi_W+\phi_S$. 显然ϕ_W、ϕ_S亦能满足（1.1.3）式.再由运动方程和线性波理论[5]可得如下的边界条件：

自由表面 $$\left(\frac{\partial\phi_S}{\partial x_3}-\frac{\omega^2}{g}\phi_S\right)_{x_3=0}=0, \qquad (1.1.4)$$

海底平面 $$\left.\frac{\partial\phi_S}{\partial x_3}\right|_{x_3=-d}=0, \qquad (1.1.5)$$

物体表面 $$\left.\frac{\partial\phi_S}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\Sigma}=-\varphi(M). \qquad (1.1.6)$$

此外方程(1.1.3)的解在无穷远处还应满足下述条件：

$$\phi_S = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r\to\infty, \tag{1.1.7a}$$

$$\left(\frac{\partial \phi_S}{\partial r} - \frac{i\omega}{c}\phi_S\right) = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r\to\infty, \tag{1.1.7b}$$

其中g是重力加速度，c是某个常数，Σ表示物体表面，ω是频率，$\varphi(M)$是已知函数，点M的维数由所在空间决定，n表示物体表面的法线矢量，指向朝Ω_0'之外，$O(\xi)$表示当$\xi\to 0$时它是与ξ同阶的无穷小量，$o(\xi)$表示当$\xi\to 0$时，它是比ξ更高阶的无穷小量，r表示物体表面上点到流体中任一点的距离。通常称(1.1.7a)和(1.1.7b)为辐射条件，或称为 Sommerfield 条件。而(1.1.7a)可以从(1.1.7b)推出，为简便计以后只写出(1.1.7b)，并用(1.1.7)表之。

至此我们得到物体沉没或半沉没于流体中的物理模型问题的数学描述，即数学模型是方程(1.1.3)～(1.1.7)式。这是以 Laplace 方程为控制方程的无界域上定解问题。

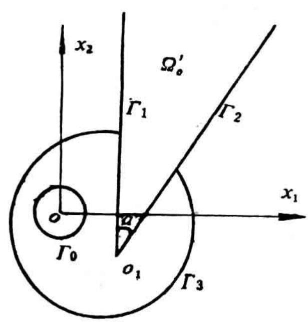

图 1-2

例1.1.2 矿山开采中要解决地下水在无限大渗流区的不稳定渗流问题[6]，因水位随时间的增大而下降，故为不稳定渗流。设无限大渗流区为Ω_0'，如图1-2所示，Γ_0表示内边界（如矿井周边或疏干的坑道），外边界$\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3$，从$o_1$点引$\Gamma_1$、$\Gamma_2$两条射线，夹角是$\alpha$（$0<\alpha<2\pi$）。这个物理模型问题，可归结为下述定解问题：

$$E\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(T\frac{\partial h}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(T\frac{\partial h}{\partial x_2}\right) + q, \quad t>0,$$

$$(x_1,\ x_2)\in\Omega_0',\tag{1.1.8a}$$

$$h|_{t=0}=H_0(x_1,\ x_2),\qquad (x_1,\ x_2)\in\Omega_0',\tag{1.1.8b}$$

$$T\frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{n}}\bigg|_{r_0}=-q_0,\tag{1.1.8c}$$

$$T\frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{n}}\bigg|_{r}=q_1,\tag{1.1.8d}$$

$$h(M)\leqslant H^*,\ 当r\to\infty时,\tag{1.1.8e}$$

其中h是含水层的水位标高，r是M的矢径，q表示垂向的補给量，E是储水系数，T是导水系数，H_0为初始水位，q_0、q_1为已给半宽的流量函数，H^*是某个常数。方程（1.1.8a）～（1.1.8e）是无界域上二维抛物型方程初边值定解问题。它也可以用来描述地下含水层的潜流问题，或地下水（油、气）资源问题，但需要将(1.1.8)中的某些参数和定解条件作些修改。

例1.1.3 小振幅声波经过音响介质的传播，可归结为如下线性波动方程[7]：

$$\Delta\phi(P,\ t)-\frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(P,\ t)=0,\tag{1.1.9}$$

其中P是二维（或三维）点集，ϕ是速度势。对于上述声学方程引入变换

$$\phi(P,\ t)=\varphi(P)e^{-i\omega t},$$

可化为Helmholtz方程

$$\triangle\varphi(P)+k^2\varphi(P)=0\tag{1.1.10}$$

其中$k=\omega/c$是音响波数。定解问题的提法是：在Ляпунов闭曲面（它的定义将在§1.3.4中给出）Σ所围成的有界域Ω外部（即Ω'上）求解，并满足Neumann条件：

$$\frac{\partial\varphi(P)}{\partial \boldsymbol{n}_P}=f(P),\ P\in\Sigma\tag{1.1.11}$$

其中$\partial/\partial \boldsymbol{n}_P$表示曲面$\Sigma$上$P$点处指向$\Omega'$外部的法向导数，在无穷远

处还应满足下述辐射条件：

二维情形 $$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{\partial\varphi(P)}{\partial r}\pm ik\varphi(P)\right)=0,\tag{1.1.12}$$

三维情形 $$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{\partial\varphi(P)}{\partial r}\pm ik\varphi(P)\right)=0,\tag{1.1.13}$$

其中r是P点的矢径模。在(1.1.12),(1.1.13)式中,正波取正号，反波取负号，详见§1.6.4。例1.1.3也代表一类无界域上实际问题，例如海洋水下声波的传播，电磁波的绕射与辐射等也可用它来描述。

上述三个例子分别代表在无界域上求解的一些实际问题，表现为椭圆型方程、抛物型方程、双曲型方程等在无界域上定解问题。一般线性常系数二阶椭圆型方程，某些线性双曲型方程，都能化为Helmholtz方程。因此以后将Laplace方程和Helmholtz方程作为主要讨论对象。

§1.1.2 无界域上定解问题的适定性

在§1.1.1中我们介绍了三个实例，每个问题都有它的控制方程和定解条件，对于位势问题有相应的边界条件和在无穷远处的约束条件；对流-扩散方程、波动方程，也有相应的初、边值条件和无穷远处的约束条件。这样就形成一个无界域上定解问题，这个定解问题的提法是否正确？即是说这个定解问题的解是否存在？定解条件是否适当？这就是定解问题的适定性要回答的问题。为此先给出无界域上控制微分方程定解问题解的概念，然后才能回答适定性问题。

定义1.1.1 如果函数u满足下列条件：

(i)在无界域上有足够可微性，且满足控制微分方程；

(ii)在无界域的内边界上连续可微，且满足定解条件；

(iii)在无穷远处满足附加的约束条件，则称此u为此控制方程在无界域上的定解问题的古典解（简称为解）。〕

附注1.1.1 这里称为古典解，是为了与后面的广义解（或弱解）相区别。在叙述中有时为了简便将满足某个方程的函数也称为解，是否具有此处解的意义，应由上下文来确定。

定解问题一经提出，自然要问：

(i)这个定解问题是否有解存在？即解的存在性；

(ii)如果有解存在，这个解是否仅有一个？即解的唯一性？

(iii)在某个邻域内，如果定解条件有微小变动时，这个解是否亦仅有微小变动？即解的稳定性；

(iv)在无穷远处这个解是否满足相应的附加条件？

如果某个定解问题的解能满足上述四个条件，那么这个定解问题的提法是正确的，否则就是不正确的。如果将例1.1.1中的条件(1.1.7)去掉就不能保证解的唯一性，因而这个定解问题是不正确的，就需要修改定解条件，以保证解的唯一性。

这些条件彼此是有联系的，对于线性方程而言，如能证明定解问题解的唯一性，那么，就可以预见这个定解问题解的存在性。反之，如能证明解的存在性，一般来说解的唯一性也可以证明。

第三个条件，无论从微分方程的理论，或从数值解来说，都是很重要的。稳定性概念（或者定义），随研究对象的范围不同而异，这里讨论的是无界域上定解问题在所论的定解条件下关于古典解的稳定性。

关于稳定性概念，粗略地说，在有限域内当定解条p，由p_1作微小的变动到p_2时，相应的解u，也由u_1作微小的变动到u_2。确切地说若对于任一正小数$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$\max\limits_{\partial\Omega'}|p_1-p_2|<\delta$时，恒有$\max\limits_{\Omega'}|u_1-u_2|<\varepsilon$成立，就称这个定解问题关于边界条件$p$是一致稳定的。

附注1.1.2 稳定性概念，同度量有密切的关系，对于同一个