

GAO DENG JI HE

魏耀华
杨鼎文
编

高等几何

甘肃科学技术出版社

高等师范院校试用教材

高等几何

魏耀华 杨昇文

甘肃科学技术出版社

责任编辑：康克仁
封面设计：陈绍泉
版式设计：陈安庆

高等几何

魏耀华 杨鼎文 编

甘肃科学技术出版社出版
(兰州第一新村81号)

甘肃省新华书店发行 兰州新华印刷厂印刷

开本787×1092毫米 1/32 印张6.75 字数138,000
1990年12月第1版 1990年12月第1次印刷
印数：1—1,551

ISBN 7-5424-0274-9/O·3 定价：2.50元

序 言

高等几何是大专院校数学专业的必修课程，特别在师范院校是必不可少的基础课。它不但是解析几何的后继课，也是进一步学习更高一级几何学的必要准备。

高等几何与初等几何没有严格的界限，内容也无一定的模式，有的着重《公理系统》的研讨，有的以《几何基础》作为主要内容，有的偏重《非欧几何》，有的专论《射影几何》，情况各异，不一而足。一般说来，高等几何不同于初等几何之处在于处理问题上高等几何用比初等几何较新的思想和方法。

本书按照克来因《爱尔浪根纲领》的精神，把几何视为变换群的不变量的系统。它从群论的观点讨论射影群及其主要属群，与此同时也较详尽地讨论此等群所支配的几何，这是大多数高等几何学的书所遵循的可行的也是较好的原则和方法。

魏耀华副教授、杨鼎文副教授从事《高等几何》课的教学多年，卓有成效，以丰富的教学经验编写了这本教材。该书初稿作为师专教材已使用多年，教学效果良好。该教材层次分明，言简意赅，陈述得体，取材适当，体系新颖，结构严谨，在某些方面独具特色，是一本较好的教材，预期它定当有益于广大读者。

赵继游

1988年12月于兰州大学

前 言

本书编写参照了原教育部颁高等师范院校数学专业《高等几何》教学大纲。在内容上求精，主要论及实射影平面的基础知识，篇幅较短；在表述中求简，且各章节均选配有大量的例题，便于阅读，通俗易懂；在结构上注意以群论为原则，以几何为原本，在直观——抽象——直观的深化认识过程中，综合法、解析法交替运用。

本书初稿曾在师专数学系连续五年做教材使用。并于1987年收入高等教育出版社出版、全国高等学校理工农医各科交流讲义中心编《高等学校交流讲义目录》。

本书由西北师范大学丁传松教授初审，兰州大学赵继游教授复审并作序。刘郁萍编配了全部习题。张兰、蒋宜婕、曹爱萍同志制图。谨此一并致谢。

本书根据甘肃省高校教材建设规划，经甘肃省教材建设指导委员会评审，确定做为高等院校试用教材出版。

本书也适于自学、函授、进修、电大、专业考试等读者选用。书中不妥处难免，恳请读者指正。

编 者

目 录

第一章 几何学的群论原则	(1)
§ 1.1 点变换	(1)
一、映 射	(1)
二、变 换	(2)
三、变换的积	(5)
§ 1.2 变换群	(7)
§ 1.3 几何学的群论原则	(11)
一、等 价	(11)
二、等价类	(12)
三、群的几何	(12)
习 题 一	(13)
第二章 仿射几何	(14)
§ 2.1 平行投影和仿射变换	(14)
一、平行投影	(14)
二、仿射变换	(17)
§ 2.2 仿射变换的代数表示	(21)
一、点的仿射坐标	(21)
二、仿射变换的代数式	(22)
三、仿射变换的决定	(31)
§ 2.3 仿射变换群与仿射几何	(34)
一、仿射变换群	(34)
二、仿射变换的特例	(40)
三、仿射几何	(55)
习 题 二	(56)

第三章 射影空间	(59)
§ 3.1 中心投影与无穷远元素	(59)
一、几何学的维	(59)
二、基本形	(59)
三、中心投影	(60)
四、无穷远元素	(61)
五、射影平面上点和直线的基本结合、顺序关系	(62)
§ 3.2 齐次坐标	(67)
一、直线上点的齐次坐标	(67)
二、平面上点的齐次坐标	(67)
三、平面上直线的齐次方程	(69)
四、线坐标	(71)
§ 3.3 对偶原理	(76)
一、对偶图形	(76)
二、对偶命题	(77)
三、对偶原理	(78)
§ 3.4 Desargue定理	(80)
§ 3.5 复元素	(85)
一、复点及复直线	(85)
二、共轭复元素	(85)
习 题 三	(88)
第四章 交比和调和比	(91)
§ 4.1 交 比	(91)
一、简比的代数表示	(91)
二、一直线上四点的交比	(93)
三、线束中四条直线的交比	(99)
§ 4.2 调和比	(103)
一、四元素的调和比	(103)

二、调和组几何意义的解释	(104)
§ 4.3 完全四点形和完全四线形的调和性质 ..	(112)
习 题 四	(117)
第五章 射影变换	(119)
§ 5.1 一维射影变换	(119)
一、透视对应	(119)
二、射影对应	(120)
三、透视对应和射影对应的关系	(124)
四、一维射影变换	(127)
§ 5.2 一维射影坐标系	(132)
一、一维射影坐标系	(133)
二、一维射影坐标系的特例	(134)
§ 5.3 二维射影变换	(137)
一、二维射影坐标系	(138)
二、二维射影坐标系的特例	(140)
三、射影坐标变换	(142)
四、射影变换的代数表示	(143)
五、二维射影变换的决定	(147)
§ 5.4 射影几何	(156)
一、射影几何	(156)
二、射影几何的特例	(157)
三、射影、仿射、欧氏三种几何的比较	(159)
习 题 五	(161)
第六章 二次曲线的射影理论	(164)
§ 6.1 二次曲线的射影定义	(164)
一、二阶曲线和二级曲线	(164)
二、二阶曲线和二级曲线的射影定义	(168)

§ 6.2	Pascal定理和Brianchon定理	(172)
一、定 理		(172)
二、定理的特例		(176)
§ 6.3	二次曲线的配极理论	(178)
一、射影变换下的二次曲线		(178)
二、二次曲线与直线的交点		(180)
三、二次曲线的极点、极线		(180)
四、二次曲线的配极对应		(185)
五、自极三点形		(186)
§ 6.4	二次曲线的Maclaurin定理	(191)
§ 6.5	二次曲线的射影分类	(193)
一、奇 点		(193)
二、二次曲线的射影分类		(195)
习 题 六		(200)
参 考 文 献		(204)

第一章 几何学的群论原则

本章将首先引入点变换的概念；进而讨论变换群，并简扼介绍几何学的群论原则。

§ 1.1 点变换

一、映射

定义1.1 对集合 A, B , 若由一确定法则 T , 使 $\forall x \in A$, 有确定的元 $y \in B$ 与其对应, 则称法则 T 是 A 到 B 的一个映射。

记作

$$T: A \longrightarrow B.$$

其中 y 称为 x 在 T 之下的象, x 称为 y 在 T 之下的原象。

记作

$$y = T(x)$$

定义1.2 若对于 $\forall y \in B$, 一定 $\exists x \in A$, 使 $T(x) = y$, 则称 T 为满(映)射。

定义1.3 若对 $\forall x_1, x_2 \in A$, 只要 $x_1 \neq x_2$, 就有 $T(x_1) \neq T(x_2)$, 则称 T 为单(映)射。

定义1.4 一个满、单(映)射, 称为一一映射。

例1.1 设 $A = \{a, b, c\}$,

$$B = \{1, 2, 3, 4\}.$$

则

$$T_1: a \longrightarrow 1, b \longrightarrow 1, c \longrightarrow 2$$

是 A 到 B 的一个映射。但 T_1 既不是满射，也不是单射。

而

$$T_2: a \longrightarrow 1, b \longrightarrow 2, c \longrightarrow 3$$

也是 A 到 B 的一个映射。且 T_2 是一个单射，不是一个满射。

对于

$$T_3: a \longrightarrow 1, b \longrightarrow 2$$

就不是 A 到 B 的映射，因 C 在 T_3 之下没有象。

例1.2 $A = \mathbf{Z}$, $B = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, x > 0\}$.

$$T: n \longrightarrow |n| + 1$$

是 A 到 B 的一个满射。

例1.3 $A = B = \mathbf{Z}$.

$$T_1: n \rightarrow n + 1,$$

$$T_2: n \rightarrow n - 1$$

都是 A 到 B 的一一映射。

二、变 换

定义1.5 集合 A 到自身的映射称为 A 的一个变换。

定义1.6 集合 A 到自身的满射、单射、一一映射，称为 A 的满射变换、单射变换、一一变换。

以上定义，当适于做为点集的几何图形。

定义1.7 点集到自身的变换又称为几何变换或点变换。

以下变换，若非特指，一般均为点变换。

我们例举两个不同类型的变换：

例1.4 平移变换——使平面上各点均沿同一方向 移动相等的距离的变换。

该变换中各点的位移都是相等的矢，设为 $\vec{a}$ ，对平面上任一点 P ，其象点 P' 由等式

$$\overrightarrow{PP'} = \vec{a} \quad (1)$$

确定（图1.1）。设对于给定的坐标系 σ ，

$$\vec{a} = \{a_1, a_2\}, \quad P = (x, y), \quad P' = (x', y').$$

则由（1）可得

$$\begin{aligned} \{x' - x, y' - y\} \\ = \{a_1, a_2\}, \end{aligned}$$

即该变换的代数表示为

$$\begin{cases} x' = x + a_1 \\ y' = y + a_2. \end{cases} \quad (2)$$

从形式上看，我们所得的点变换式（2）和解析几何中坐标平移变换式完全一样。但两式所表达的意义却截然不同：在点变换中，运动的是点，变换式表示变换前后同一坐标系下不同两点的坐标间的关系；在坐标变换中，运动的却是坐标系，而变换式表示变换前后同一点的新、旧坐标间的关系。

例1.5 反演变换——在平面上取定一个圆心为 O 、半径为 R 的定圆，且使该平面上除 O 外的任一点 A 和其象点 A' 满足

$$\begin{aligned} O, A, A' \text{ 共线;} \\ OA \cdot OA' = R^2 \end{aligned} \quad (3)$$

的变换称为平面中关于 $\odot O$ 的反演变换。

我们分三种情况介绍象点 A' 作图可得：

1) 点 A 在圆内。

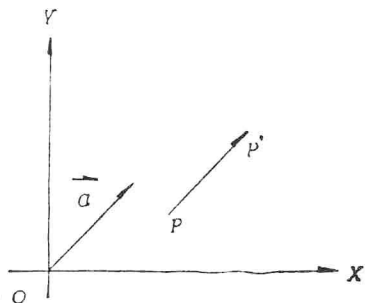


图1.1

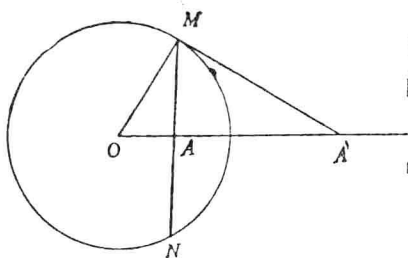


图1.2

2) 点A在圆外.

自A作 $\odot O$ 的一条切线, 切点为M. 过M作垂直于OA的弦, 该弦与OA的交点即为A'.

3) 点A在圆上.

作法可如上述之一, 且点A, A', M在作图中是重合的, 即圆上的点自对应.

下面试求反演变换的代数表示:

以圆心O为原点建系, 且设A(x, y), A'(x', y').

如图1.3可见

$$\begin{aligned} \frac{x'}{x} &= \frac{y'}{y} = \frac{OA'}{OA} \\ &= \frac{OA' \cdot OA}{OA^2}, \end{aligned}$$

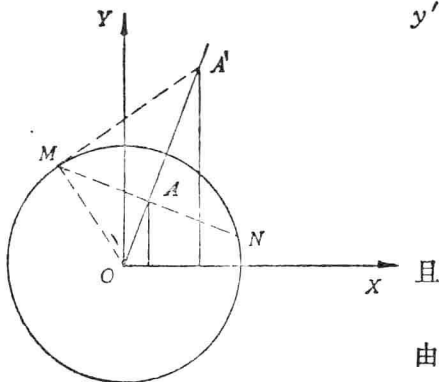


图1.3

且

$$OA^2 = x^2 + y^2.$$

由(3),

$$OA \cdot OA' = R^2.$$

故有

$$\begin{cases} x' = \frac{R^2 x}{x^2 + y^2} \\ y' = \frac{R^2 y}{x^2 + y^2} \end{cases} \quad (4)$$

变换式(2)为线性方程组,而(4)为非线性方程组。相应地,我们称(2)表示的变换为**线性变换**, (4)表示的变换为**非线性变换**。

定义1.8 对于变换 $T: P \rightarrow P'$, 若存在变换 $P' \rightarrow P$, 则称其为原变换 T 的**逆变换**, 记作 T^{-1} 。

由定义知, 任一个变换的逆变换不一定存在, 且“逆”的含义是相对的, 也是相互的。对于一一变换, 由于任意象点 P' 都有唯一的原象点与之对应, 因此一一变换均有**逆变换**。

三、变换的积

两个变换可如下连续施行: T_1 将点 P 变成其确定的象点 P' 之后, T_2 又接着将该象点 P' 做为自己的原象点而进行变换, 得到自己相应的象点 P'' 。即

$$T_2(T_1(P)) = T_2(P') = P''.$$

以上连续施行变换 T_1, T_2 的结果, 相当于一个将点 P 变成确定的点 P'' 的变换。

定义1.9 连续施行两个变换所得的变换, 称为该两个变换的**积**。

顺序施行变换 T_1, T_2 , 其积变换记作 $T_2 T_1$ 。

两个以上变换的积, 当然为上述讨论所含。

一般讲, 变换的乘法是不满足交换律的。

例1.6 验证 $T_1 T_2 \neq T_2 T_1$.

已给变换

T_1 : 平面各点沿 x 轴方向平移2个单位;

T_2 : 平面各点绕原点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$.

证: 对于平面任给定的一点 $P(1, 0)$, 经变换 $T_2 T_1$:

$$P(1, 0) \xrightarrow{T_1} P'(3, 0) \xrightarrow{T_2} P''(0, 3) \text{ 经变换 } T_1 T_2,$$

$$P(1, 0) \xrightarrow{T_2} \overline{P}(0, 1) \xrightarrow{T_1} \overline{\overline{P}}(2, 1).$$

同一点 $P(1, 0)$ 在积变换 $T_2 T_1$ 和 $T_1 T_2$ 之下的象点分别为(图1.4)不同的两点 $P''(0, 3)$ 和 $\overline{\overline{P}}(2, 1)$.

即

图1.4

$$T_2 T_1 \neq T_1 T_2.$$

定理1.1 变换的乘法满足结合律.

证: 已给变换

$$T_1: P \rightarrow P',$$

$$T_2: P' \rightarrow P'',$$

$$T_3: P'' \rightarrow P'''.$$

则

$$T_3 T_2: P' \rightarrow P''' ,$$

$$(T_3 T_2) T_1: P \rightarrow P''' .$$

而

$$T_2 T_1: P \rightarrow P'' ,$$

$$T_3(T_2T_1): P \rightarrow P''.$$

即对于 $\forall P$, 有

$$(T_3T_1)T = T_3(T_2T_1).$$

定义1.10 若变换 T 对于 $\forall P$, 都有 $T(P) = P$. 则称 T 为幺变换.

幺变换通常记作 I .

定理1.2 一变换与其逆变换按任意顺序的积是幺变换.

证: 设变换

$$T: T(P) = P',$$

则其逆

$$T^{-1}: T^{-1}(P') = P.$$

由

$$TT^{-1}(P') = T(T^{-1}(P')) = T(P) = P'$$

知, 变换的积

$$TT^{-1}: P' \rightarrow P';$$

而由

$$T^{-1}T(P) = T^{-1}(T(P)) = T^{-1}(P') = P$$

知, 变换的积

$$T^{-1}T: P \rightarrow P.$$

故由幺变换定义1.10有

$$TT^{-1} = T^{-1}T = I. \quad (5)$$

§ 1.2 变换群

为深入研究变换及变换集合的性质, 我们讨论变换群的

概念。

定义1.11 若变换所成的集合 G 满足下列两个条件：

1) 封闭性。当 $\forall T_1, T_2 \in G$ 时, $T_1 T_2 \in G$;

2) 有逆元。当 $\forall T \in G$ 时, $\exists T^{-1} \in G$ 。

则称 G 为变换群。

对于一般抽象群, 除上述两条件外, 其定义中还有条件:

3) 结合性。

4) 有幺元。

变换群 G 已“有逆元”, 而元与其逆元之积由定理1.2知为一幺元, 且(根据“封闭性”)该幺元仍在 G 内。即变换群必满足群的条件4)。变换群满足群的条件3)则是由定理1.1的结论显然可得。因此, 变换群与群的定义条件是一致的。

例1.7 试证平移变换成群。

证: 设

$$T_1: \begin{cases} x' = x + a_1 \\ y' = y + a_2, \end{cases}$$

$$T_2: \begin{cases} x' = x + b_1 \\ y' = y + b_2 \end{cases}$$

为平移变换所成集合 G 中的任意两个变换。

为求 $T_2 T_1$, 我们应将

$$(x, y) \xrightarrow{T_2} (x', y')$$

改写为

$$(x', y') \xrightarrow{T_1} (x'', y'').$$