

學算筆談

洪繩伯題



華氏算學筆談

孟子言仁善視知有四端吾謂算亦有端算之端者何計較之心也兒童分果必爭其大農夫行路必趨捷徑計較之顯然者無論矣他若衣服之工補短截長奇褻合度則有面積之意焉烹飪之工味鹹而利以水味淡而刺以鹽則有比例之意焉此皆能算之端具於生初者也是故有是端而不知擴充之則同於一藝一能之末有是端而知所以擴充之則統乎萬事萬物之綱故凡天文之高遠地域之廣輪居家而布帛粟菽在官而兵河鹽漕以至儒者讀書考證經史商賈持籌權衡子母莫不待治於算此又算之切於日用斯須不可離者也夫以算之切於日用者既如此其於生初者又如彼宜乎夫人而知之夫人而能之矣而世之學者輒詭爲絕業而苦其難明者何哉竊嘗論之上古之算本簡捷而易明也自後世事物日變人心智慮日出於是設題愈難布算愈繁而精其業者各以心得著書又好爲隱互雜糅窮極微奧不屑以淺近示人甚或秘匿其根源以炫異變易其名目以託古此蓋今古嗜人之積習作者之恒情算學之境因是而益深而學算之人宜其望洋而興歎也咸同以來風氣稍開四方嚮學者漸眾津逮初學之書亦漸出碩或力求簡易語焉不詳或稗販成書無足觀覽或確鑿然隨問演草因題立術亦云曲盡能事矣然無論說以疏達之貫徹之學者病其煩瑣讀不終篇輒倦而思臥耳余有鑒於此而重惜人人具有擴充之力而未得其用力之途也思有以誘掖而引進之因舉學算次第之大旨并胸中所欲言者一一達之筆而著於篇演爲算式以習其數設爲問答以窮其趣法由淺而入深語雖繁而易曉聊以擴充其能算之端云爾至於辭句之俚俗體例之參差見哂高明所不計也刻既成因書其緣起於簡端以質海內游藝之君子光緒壬午日臘降婁之次華蘅芳自序

學算筆談

序

總論算法之理

人之心中若果懵懵然茫無知覺則亦不必談及算學若其稍有知覺而能思維計較者則已有算學之謂矣有全以俱來試觀孩兒嬉戲見果必爭取其大者因其胸中已有一多寡之見存焉也由是知算學之理爲人心所自有並非自外而入故取算書中不甚繁重之題以誦不習算法之人彼亦能積思而得其所求之數惟遲速難易則與能算者大異焉此因算之未得其法則各數悉從心計而出故必甚難苟知算法則無論設數如何皆可以法馭之而心中可不必思索所以能事逸而功倍也夫一切算法其初皆從算理而出惟既得其法則其理卽寓于法之中可以從法以得理亦可舍理以用法苟其法不誤則其理亦必不誤也

識數之法

物生而後有象象而後有滋滋而後有數財物之有數乃人之獨立名目以記物之多寡者也故亦謂之數目數目之名卽一二三四五六七八九十是也然數可多至無窮若每數必立一名則不勝其繁且終不能盡紀其數故又立一簡便之法名其自一至九爲單位之數滿十則爲進一位之數仍以自一至九之各字記之而名之爲當十之位滿百則又進一位亦仍以自一至九之各字記之名之爲當百之位由此而百進爲千千進爲萬而十萬而百萬而千萬其位均以下一位之數滿十而進爲一則任數之如何多皆可以此法記之

所以必以十進位者因人手有十指便于屈指計之也凡常用之數大抵以十進位者爲多惟天文家度分秒之數則以六十進位

各位之數既俱可用自一至九之各數記之則其空位當以零字記之或作一圓以代零字亦可

凡學算法必先從識數起故識數爲算學中第一步工夫不識數之人不可以學算也惟數目之字並無意義可尋其初必從強記而得所以人自孩提之時父母卽教其識數聰明之人有數歲卽能識數者愚蠢之人有數十歲仍

不識數者

識數之法先將自一至十之十箇字讀至極熟能一氣貫注而不凌亂錯雜便能將十箇物任取幾箇數之知其爲何數再從一十一讀至一百則能數一百箇錢又知十百爲千十千爲萬等意則其人便可爲識數之人

識數之工夫由于習練而成非但口中要熟亦須眼中看慣方能敏捷如將棊子五枚置于桌上則兒童不能隨口卽言其數必用手一一數過而後知之此因眼光未習練之故也及已看慣則物之不滿十箇者平常之人皆能一望而知之

惟因眼中亦能識數故數物可不必一箇一數而可任幾箇數之然亦各有數法譬如數錢數棊則以五箇一數而口中呼一五一十五爲最便譬如數雞卵則手中不能持五箇雞卵祇能兩箇一數而口中呼一雙兩雙至末則云幾雙或幾雙多一箇此固尋常習用之法而其中已暗以加法乘法爲妙用焉維不經道破則人亦不覺耳

大抵物之能隨手運動者數之易其不能隨手運動者數之稍難因不能將已數過者另置一邊也譬如入山林而數叢樹往往數之數次不得分明因其已數過者與未數過者易致看錯非有遺漏則有重覆故不能得其真實之數然此亦有法焉可將他物于每數過之樹次第作誌則無誌者爲未數過之樹易于遍數而遍誌之以得其的確之數其作誌之意猶之另置一邊也

作誌之法惟手所能及之物或手雖不能及而可用長竿及之者則可若其物非手與竿之所能及則此法不能用譬如欲數清天空之星則其事甚難因不能于星上作誌也

人雖不能于星上作誌然可于紙上作點以肖其星故可觀列宿之形而一一繪之于紙以成星圖則數圖上之星與數天上之星無以異也所以星亦有數

此皆識數以後之巧思也算法亦爲各種巧思故遇一難算之題則必有一法以解之及解去此難又有一難于此者在目前必又有一法以解之如此由淺入深步步各有難處而步步各有巧法故無論題之如何深奧皆可于紙上寫之算之以與人共明之

記數之法

凡記數目之字其列位之法有二 一爲直行者 一爲橫行者

直行之數便于文理橫行之數便于布算各隨其便而用之所以算法之書其論說及題目中宜用直行記數其算式則必用橫行非如此則閱者不易明也

直行之數必用十百千萬等字以記其位數其兩數間有空位者必以零字明之

如幾萬幾千幾百幾十幾 如幾千零幾十是也

亦有但記各位之數而不用十百千萬字者則以最下之字爲單位之數其無數之位必作○以存其位否則易于混淆

如一二三四卽一千二百三十四也 如一○二○卽一千零二十也 如一○○○卽一千也

橫行之數不必以十百千萬等字記其位數惟以最右之字爲單位之數其空位必作○以存其位否則亦易混淆

如^{三四}卽一千二百三十四也

如^{二〇}卽一千零二十也

如^{二〇〇〇}卽一萬二千也

加法

各數相加而得其和其理爲人所自明惟不得其加之之法則覺數之少者相加易數之多者相加難如將果子十五枚分作三堆置于桌上其第一堆爲三枚第二堆爲五枚第三堆爲七枚試以問但能識數之兒童此三堆果子共有幾枚則兒童不能卽答必將此三堆之果合而數之方知其爲十五枚因彼不知三加五成八以八加七成十五故必和而數之也

所以能和而數之者因其數甚少且果子爲有形之物又能以手搬運故兒童能一一數之若其每堆之果數甚多且重而不易搬運兒童卽不能算矣

假如有錢兩串其第一串爲五百六十七文第二串爲六百七十八文則不知加法之人卽不能知其總數因必先

數其滿百之數得十一箇一百再數其滿十之數得十三箇十又數其八與七之和得十五惟十一箇一百爲一千一百而十三箇十爲一百三十其間皆有進位之數故欲以所得之三數相加在不明加法之人必以爲極其繁難之事也

若此兩串錢並非真有現錢置在面前而爲賬上所記之兩筆數目則不知加法之人欲得其和數更難因各數並無實象可求則手與目皆無所用而心中默計其數每有顧此失彼之虞故極易錯誤也

加法之意亦不外乎和而數之之理惟因各數相加自有其法則可不必更要和而數之而其依法所得之數與和而數得之數無異且無論數之爲多爲少爲虛爲實皆以一法馭之而無難易之分焉故捷便也

加法爲識數之後又進一步工夫故兒童既能識數又能寫自一至九之九箇數目字便可學習加法兩箇單位之數相和而成總數其始也必從強記而得

如○加一爲一 一加二爲三 三加二爲五 九加八爲十七之類

由強記而至于熟既熟之後便能用之及用之甚熟自能脫口而出應手而來不假思索矣

兩箇單數相和之數既能爛熟于胸中便可學習任兩箇多位之數相加之法

一題 設有數一千三百二十一又有數二千一百零三求共得若干

則將兩數齊其位而橫列之爲兩層于其下作橫線爲界乃從末位起每位上下兩數相加而記其所得之本位數

于橫線之下如一與二相加得四二與○相加得二三與一相加得四一與二相加得三則共得三千

四百二十四卽所求之數也

二題 設有數二千三百又有數二千零七十求其共數若干

則如法橫列兩數下作橫線其單位俱爲○故○加○仍得○其當十之位○與七相加仍爲七其當百之位三

與○相加仍爲三其當千之位二與二相加得四則共得四千三百七十卽所求之數也

以上兩題之數爲加法中之最易者因其每位上下兩數之和俱不進位故可隨手書其所得之數于

界線之下而心中不必記其進位之數也。若上下兩數之和爲兩位之數，則祇能先書其本位之數，其進位之數須默記于心，再與其上一位之數相加，所以稍難。

三題 設有數五千六百七十八，又有數七千六百二十九，求其數若干。

則八與九相加得十七，先書其七于本位之下，而心中記其十爲上位之一，以與七及二相加得十九，此十當爲上

五七六二八
七六二九七
一三〇七

一位之一，而本位爲無數，故于本位下作〇，而將心中所記本位之十爲上一位之一，以與六及六

相加得十三，則于本位下書三，而將心中所記之十又爲上位之一，以與五及七相加得十二，乃書

其三，而心中記其十爲上位之一，因上位已無他數與之相加，只有心中所記者爲上一位之數，故于上位之下

書其一一，則共得一十三千三百零七，爲所求之共數。

兩數相加之法，習之已熟，則三數四數相加，以至多數相加者，皆可由此推廣之。

四題 設有錢四箇，又有錢五箇，又有錢六箇，求共錢若干箇。

四五六五
一一

則因已知四與五相加得九，又知九與六相加得十五，故心中可先將其四與五相加，又將其所

得之九與六相加，而得十五，則于本位下書五，而其十爲上位之一，書于上一位之下。

五題 設將五箇單位之數一二三四五相加，共得若干。

一一二三四五五

則心中將一與二相加得三，乃以三與三相加得六，又以六與四相加得十，又以十與五相

加得十五。

凡學多數相加者，須將單位之各數習之甚熟，則雖有七八數亦能一望而知其總數，則遇任幾箇多位之數亦可

一例相加，因其位數雖多，亦必逐位相加，則卽其一位而論，仍與單位之數無異，故易明也。

六題 設有數一百二十三，又有數四百五十六，又有數七百八十九，求其共數若干。

三六九
二五八六八
一四七三

則將三與六相加得九，又將九與九相加得十八，乃書其八，而以其十爲上位之一，以一與二相

加得三，以三與五相加得八，以八與八相加得十六，乃書其六，而以其十爲上位之一，以一與一相

加得二以三與四相加得六以六與七相加得十三乃書其三而以十爲上位之一因上位無他數與之相加故書一則爲共求得一千三百六十八卽所求之共數也

七題 設有數一百二十又有數三十四又有數五百零六又有數七百八十九求總數若干

則將○西六九相加得十九乃書其九而以十爲上位之一以一二三○八相加得十四書其四而以十爲上位

○西六九
二二〇八四九
一五七四

之一又將一一五七相加得十四書其四又于上位書一則爲共求得一千四百四十九卽所求之總數也

八題 求一千八百零五與三十六與一萬九千七百二十七與三與一千四百七十四與二千零零八之和

則其五六七三四八之和爲三十三故書其三而以三十爲上位之二以與三二七相加得十五故書其五而以

五八七三四八三
〇三二七〇〇
八七四〇〇
一九二五

十爲上位之一以與八七四相加得二十則于本位作○而以其二十爲上位之二因二一九一二之和爲十五故書其五而以十爲上位之一以與一相加得二故書二則爲求

得和數二萬五千零五十三

各數相加之法觀以上八題已極明白惟初學者每以心中所記之數爲難能設法使心中不必記其進一位之數則更覺少費心力矣

凡兩數相加者其所得之進一位數不能大于一故可于上位橫線之上作點以誌之則其點卽作一字算必將上兩數之和數多作一數算之

卽如三題之數其八與九之和爲十七則可于上位二字之下作一點以當一字而于本位書七乃將上位之七

八九七
六六三
五七三

二當作七三則其和數爲十故又于上位下一箇六字之下作一點而于本位作○乃將上位之六

六當作六七其和爲十三則又于上位七字之下作一點而書其三千本位其上位之五與七當作

得之數一萬三千三百零七與前法所得者無異

然此作點之法但可施之于兩數相加之時而不能通之于多數相加因多數相加其所成之上一位數每至大于
一若干線上作多點最易混目故必將作點之法變之使無混目之弊而後可適于用

即如八題之數其五六七三四八之和爲三十三則可于本位下書三而于上位之下亦書三其上位之數〇三

二七之和爲十二則再于上位書一而于本位書二于三之下其八七四之和爲十

九則于上位書一而于本位書九于一之下其一九一之和爲十三則于上位書

一而于本位書三于一之下又將其上位之數一書于本位一字之下則得兩行橫

列之數 此無異于一萬一千一百三十三與一萬三千九百二十故可將此兩數如前法相遇有進一位

之數作點誌之而將其下有點之字作多一數算則共加得二萬五千零五十三與心中記數者所

得無異

此法之理乃將任幾箇多位之數先變爲兩箇多位之數而再將其兩數相加也多寫數行字便能省用幾次心由
此知事之繁難者皆由未得其法之故也

減法

凡于大數內去其小數于多數內去其少數者謂之減其理亦爲人所自能如小孩手持十文問其若將三文買物
則可賡幾文彼亦能先數去三文而將其餘七文數之而知其數也

以加法反其道而行之卽爲減法如三與二相加爲五則于五內減其三必得二于五內減其二必得三也
兩箇單位之數以小減大其所餘之數亦必由強記而得習之甚久則自能熟矣

一題 設有數五百八十七以三百五十七減之則得若干

則用減法求之橫列五百八十七于上三百五十七于下各齊其位下作橫線爲界乃從末位之數起以六減其

七六
八五
五三

七得一書之于單位之下以五減其八得三書之于十位之下以三減其五得二書之于百位之下則爲共減得二百三十一卽所求之數也

上題之數爲減法中最易之數其各位之數皆上數大下數小則以下數減上數必爲以小減大無不足減之數故不必借上一位之數而記于胸中也

二題 設有數五百八十七以四百九十八減之則餘若干

此題之數用減法求之比上題稍難因七內欲減去八而不足必向七之上一位之數八借出一數則本位之七

七八九
四九八

可作十七乃可以入減之而得餘數爲九故于本位下書九惟心中須記得上位之八已被下位借去一數故只可作七算七內欲減去九亦爲不足必向上一位之五借出一數則本位之八可作十

七算以九減十七得八故于本位下書八而心中須記得上位之五已被下位借去一數今只可作四算以四減四爲適減盡因其左更無他數故不必于本位下作。則爲共減得八十九卽所求之數也

然此尚非減法中最難之題因其本位之數雖不足減而上位有數可借也若遇上位爲。則無數可借必俟上位更向再上之位借得始能借與本位如是向上遞借有致牽連多位者

三題 設有數一千以四百五十六減之求其減餘之數若干

則其單位之數上爲。下爲六欲于。內減去六爲不足減必向上一位借得始可減惟上一位亦爲。則無可

一〇九〇
四五六
五三四

借之數若能向再上之位借得乃可借出惟再上一位亦爲。而無可借出故必向再上之位借之乃先借千位之一爲百位之十又借百位之一爲十位之十又借十位之一爲單位之十而後可以

六減之得四書之于單位之下惟心中須記得其千位之三已借去無存其百位十位各借得十而借去一則皆當作九數算故以五減其九得四以四減其九得五各書于本位之下則爲共減得五百四十四卽所求之餘數也此乃論法而兼論其理欲人明白其中之曲折故覺如是之繁若其理已明則可更立簡便之法以免其繁重之弊

卽如本題之數其單位徑可作以六減十其上一位亦可作以六減十其再上一位可作以五減十其最上一位可作以一減一則減得之數亦必無異也

此法之理因于任兩數中同以若干數加之則其加得之兩數其較必與原兩數之較同所以本應以五減九者今可作以六減十算本應以四減九者今可作以五減十算則其減得之數仍與用本數相減者無異因其六與十之較必同于五與九之較其五與十之較必同于四與九之較也

用此法所以能覺簡易者因人之心每覺加易而減難而減法之中又覺他數與十相減易而與九相減難以其所易代其所難雖于理多一曲折而于法則省數番心計矣茲特再設一題以明此法之用

四題 設有數二萬三千六百七十二以一萬六千四百八十一減之當得若干

二七七八一
三六四八一
一六四七一

則以一減二得一其上一位因八不能減其七則可作以八減十七得九其上位必作以五減六故得一其當于之位以六減三可作以六減十三得七其上一位必作以二減二故適盡則爲共減得七千一百九十一卽所求之數也

蓋此法凡遇不足減者可徑將上數加十箇算而其上一位之上數雖暗中已被下位借去一數仍可作未借去算惟必將其下數作多一數算之則所得之較仍同

君再用作點之法以記其數當加一數算則更覺便捷而少用心思

二七七八一
六四一九
三六七一
二二一

卽如本題之數以八減七不足減而作以八減十七算則可于上位之下一數四字之下作一點以誌之又如以六減三亦不足而作以六減十三則可于上位一字之下作點以誌之則見其下有點之數可作多一數算之也

此作點之法亦與加法中作點之例同其作點之時卽在口中呼十之時故覺毫不費事也

五題 設有數六〇二七〇六四二三又有數四〇九〇一九六八七求其較數若干

則七大千三當作七減十三得六則于上位八下作點而入當作九算惟九大于二當作九減十二得三又于上

三六四三
六六六六
九九九九
九九九九

位六下作點則六當作七算其四小于七當作十四減去七得七又作點于上位九之下則九當作十算六不能減去十則作十六減去十得六又于上位之一下作點則一當作二惟二不能以減。必作以二減十得八于上位。下作點則。當作一以一減七得六而上位不必作點二小于九不能以九減之則作十二而減去九得三于上位之一。作點則。當作一以一減。爲不能減當作以一減

十得九于上位四下作點則四當作五以減其六得一則爲共減得一九三六八六七三六卽所求之較數也

加法有任幾箇數相加者減法則祇有兩數相減而無多數相減因其應減之數若有數箇可先用加法并其諸數爲一數而後用減法以求其較也

六題 設有數二十一欲以單位之各數一二三四五六連減之求其餘數若干

則可將其單位之數一與二相加得三又以三與三相加得六以六加四得十以十加五得十五其十五與六相

加得二十一列二十一于上又列二十一于下其上下兩數各位皆相等則以下數減其上數必適

盡無餘故于橫線下作。卽爲所求之數

減法中又有一事須論之凡遇本位之數不足減而須加十方足減者則以單位之數減其兩位之數似比單位相減者稍難然亦由于未得其法之故假如上數爲五而欲以九減之則必將其五當作十五而以九減之斯時心中若以爲以九減五則不足四以此四減其十則得六此法亦未嘗不通然曲折太多每易錯誤不如先以九減十得

一而以一與五相加得六之爲便此因人之心每覺加易而減難又每覺與十相減易與他數相減難故兩次減不如一次減一次加也

然此亦由于加減之數不熟之故若數既極熟則一望之間已知其當減得六而心中可絕不計較也假如以二與五相加減夫人而能爲之者亦以熟故也大抵數之大于十者非常習算法之人不能一望而得其加減之數

乘法

將本數連加若干次其所得之數爲若干本數之和亦卽本數之若干倍也如其倍數爲單位之數而其數甚少者

凡學乘法必先將單位之任兩數一一記其乘得之數故須熟讀九九歌訣從一一如一起以至九九八十一止讀至背誦如流則任提首兩字便能誦出一句又必知無論何數與○相乘必仍得○則可學習乘法

凡欲將倍數與本數相乘者其列數之時無論何數在上何數在下均可惟恒以上數爲實下數爲法位數多者爲實位數少者爲法位數雖多而具有數之位少者亦爲法位數相同者任以何數爲實何數爲法總以乘出之行數能最少者爲便

一題 設以十二爲實四爲法求其相乘之積

二四八

則列十二于上四于下又作橫線爲界先以四乘二得八書于本位之下又以四乘一得四書于上

一題 設以十三爲實五爲法求其相乘之積

三五五

則以五乘三得十五于本位書五而心中記一爲上位之數又以五乘一得五加所記之一得六則書六于此位之下即得六十五爲積

三題 設以六百零七爲實六爲法求其相乘之積

七六
三六二

則以六乘七得四十二書其二于下而心中記其四爲上位之數又以六乘○得○加入所記之四得四則于其下書四又以六乘六得三十六因已乘畢故于此位下書六而其左書三則爲共乘得三千六百四十二即所求之積數也

若法爲多位之數則從法之單位起以每位之數與實之各位數自右而左次第相乘至一一乘遍之後于其下再作一橫線乃將兩橫線內之各數相加書其所得于每位之下即爲乘得之數

四題 設以三十六爲實二十四爲法求其相乘之積

六四四
二四二
一七八

則先以四乘六得四書其四而記其二以四乘三得一加入所記之二得一書其四于本位書其一千上一位則法之末位已乘實訖乃將法之上一位數二乘實之各位以二乘六得一書

其二而記其一以二乘三得六加所記之一得七則書其七是爲俱已乘過乃作橫界線而將乘得之兩行數相加得八百六十四卽爲所求之積

五題 設以四百五十六爲實一百二十三爲法求其相乘之積

則以三乘六得八書八記一以三乘五得五加一爲一書六記一以三乘四得二加一爲一書三又書一于左則

爲三已乘訖乃以二乘六得二書二記一以二乘五得一加一爲一書一記一以二乘四得

八加一爲九書九則爲二亦乘訖乃以一乘六得六以一乘五得五以一乘四得四俱書之

則爲俱已乘過乃作橫線而將乘得之各行相加得五萬六千零八十八爲所求之積數

若法實之末位有○位者可列法之有數之位使與實之有數之位相齊而將其有數之各位如法相乘于得數之後加其法實末數位之○于右卽得所求之積

六題 設有數四百二十以六百乘之當得若干

則可列法之六使與實之二上下相齊以六乘二得二書二記一以六乘四得四加一爲一亦書之則

共乘得五因實之末位有一圈法之末有兩圈故必于五之右共加三箇圈以存其位故其乘得之積

爲二十五萬二千卽所求之數也

七題 設以四十二爲實六百爲法求其相乘之積

則因法之末有二位爲空實之末無空位故于乘得五之後只加兩圈其積爲二萬五千二百卽所

求之數也

八題 設以四百二十爲實六爲法求其相乘之積

則因實之末位有一空位而法無空位故于乘得五之後只加一圈則其所得之數爲二千五百二

若其法之各位中有空位者可不必要將此空位之○與實相乘但將其有數之位乘實之各位惟書其所得之數必