普通高等教育“十二五”电子信息类规划教材

通信原理
学习指导与习题详解

陈启兴　柳红英　谭文芬　编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

通信原理
学习指导与习题详解

普通高等教育"十二五"电子信息类规划教材

通信原理
学习指导与习题详解

陈启兴　柳红英　谭文芬　编著

机　械　工　业　出　版　社

本书是陈启兴、柳红英和詹明所编写的《通信原理》一书的辅助教材，指导读者进一步学习主教材中每章内容的要点、难点，并提供了主教材中全部习题的详细解答。同时，“通信原理”课程和不同教材中，很多知识点和例题、习题是彼此类似的，本书中的知识点讲述和解题思路也可以为其他教材学习和讲授提供一个很好的借鉴。

本书主要内容是对“通信原理”课程内容中随机过程分析、信道、模拟调制系统、数字基带传输系统、正弦载波数字调制系统、模拟信号的数字传输、数字信号的最佳接收、差错控制编码、正交编码与伪随机序列和同步原理等知识模块的要点、难点和习题进行详解。本书力求内容精炼、重点突出，讲述由浅入深、简明透彻，概念清楚，既服务于课堂教学，也便于读者自学。

本书适用于通信工程、电子信息工程、移动通信、生物医学、计算机通信等电子信息类专业的“通信原理”课程教学，又可供从事通信及相关领域工作的工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

通信原理学习指导与习题详解/陈启兴，柳红英，谭文芬编著．—北京：机械工业出版社，2011.1

普通高等教育“十二五”电子信息类规划教材

ISBN 978-7-111-33088-2

Ⅰ.①通…　Ⅱ.①陈…　②柳…　③谭…　Ⅲ.①通信理论－高等学校－教学参考资料　Ⅳ.①TN911

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 008089 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：闫晓宇　责任编辑：闫晓宇　王　荣
版式设计：霍永明　责任校对：李秋荣
封面设计：张　静　责任印制：乔　宇
北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）
2011 年 5 月第 1 版第 1 次印刷
184mm×260mm · 8.75 印张 · 215 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-33088-2
定价：19.00 元

前　言

本书是由成都信息工程学院和西南交通大学的教师联合编写的，是两所高校老师多年教学和实践的结晶，吸收了同类教材的精华，同时也把编者的一些见解融入其中。本书是以陈启兴、柳红英和詹明所编写的《通信原理》一书为基础的课程学习辅导和研究生考试辅导教材，指导读者进一步学习主教材中每章内容的要点、难点，并详细解答了主教材中的课后习题。同时，“通信原理”课程和不同教材中，很多知识点和例题、习题是彼此类似的，本书中的知识点讲述和解题思路也可以为其他教材学习和讲授提供一个很好的借鉴。

本书共有11章内容，主要内容包括随机过程分析、信道、模拟调制系统、数字基带传输系统、正弦载波数字调制系统、模拟信号的数字传输、数字信号的最佳接收、差错控制编码、正交编码与伪随机序列和同步原理。本书每章由学习指导和习题详解两部分组成，其中学习指导又包括要点和难点两部分，习题详解部分中给出了主教材中每章全部习题的详细解题过程。

本书的第1、3、5、6、7章和第9章由柳红英老师编写，第2、4章由谭文芬老师编写，第8、10章和第11章由陈启兴老师编写。

由于编者的水平有限，书中难免有不妥甚至错误的地方，请广大读者不吝指教。需要与编者联系沟通可以写信至如下E-mail：chenqx_686996@126.com

编　者

目　录

第1章 引 言

1.1 学习指导

1.1.1 要点

本章的要点有通信系统的数学模型、通信系统的分类及通信方式、信息及其度量、通信系统的主要性能指标。

1. 通信系统的数学模型

通信系统是指传递消息所需的一切技术设备（含信道）的总和。通信系统的作用就是将信息从信源发送到一个或多个目的地。

（1）一般模型

一般模型以图 1-1 所示的功能框图来表示。

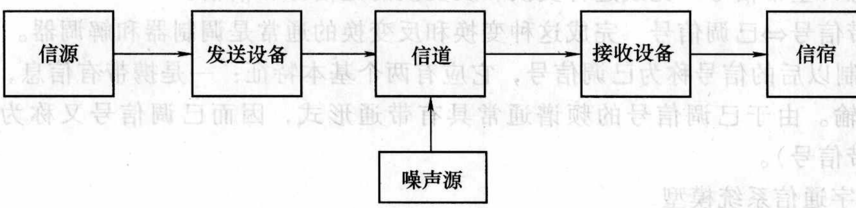

图 1-1 通信系统的功能框图

1）信源 信源所产生的信息可以是声音、图像或文本。信源一般包含变换器，变换器将信源的输出变换成电信号。例如，用做变换器的送话器可以将语音信号变换成电信号，而摄像机则将图像信号变换成电信号。这些设备输出的信号一般称为基带信号。

2）发送设备 发送设备将原始基带电信号变换成适合物理信道或其他传输介质传输的形式。例如，在无线电和电视广播中，通信部门规定了各发射台的频率范围，因此，发射机必须将待发送的信息信号转换为适合频率范围的无线电信号来发送，以便与分配给此发射机的频率相匹配。这样，由多个无线电台发送的信号就不会彼此干扰。又如，信道是光纤组成的，那么发送设备就要将处理好的基带信号转换成光波信号再发送。因此，发送设备涵盖的内容很多，可能包含变换、放大、滤波、编码调制等过程。对于多路传输系统，发送设备中还包括多路复用器。

3）信道 信道是用于将来自发送设备的信号发送到接收端的物理介质。信道可以分为两大类：无线信道和有线信道。在无线信道中，信道可以是大气、自由空间和海水等。有线信道有双绞电话线、同轴电缆及光纤等。信道对不同种类的信号有不同的传输特性，但都会对在信道中传输的信号产生衰减，信道中的噪声和由不理想接收机引入的噪声会引起接收信号的失真。

4）接收设备　接收设备的功能是恢复接收信号中所包含的消息信号。使用和发送端相似的变换器将接收到的电信号变换成适合用户的形式，如声音信号、图像等。由于噪声的影响，接收到的信号会出现某种程度的恶化，除了完成信号解调这一功能外，接收机还有完成包括信号滤波和噪声抑制等在内的其他一系列外围功能。接收消息信号的保真度与调制类型和加性噪声强度密切相关。

5）信宿　信宿即消息的目的地，信宿里包含的输出变换器（如扬声器和显示器等）将接收到的原始电信号变换成适合用户的形式，如声音信号、图像等。

（2）模拟通信系统模型

模拟通信系统是利用模拟信号来传递信息的通信系统，其模型如图 1-2 所示。

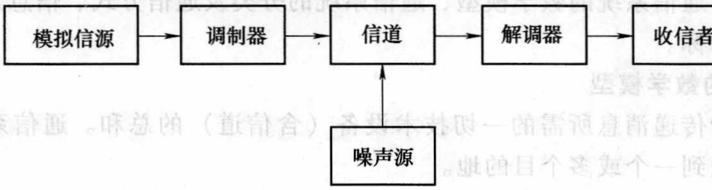

图 1-2　模拟通信系统模型

1）消息⇔基带信号　完成这种变换和反变换的是信源和信宿。

2）基带信号⇔已调信号　完成这种变换和反变换的通常是调制器和解调器。

经过调制以后的信号称为已调信号，它应有两个基本特征：一是携带有信息，二是适合在信道中传输。由于已调信号的频谱通常具有带通形式，因而已调信号又称为带通信号（也称为频带信号）。

（3）数字通信系统模型

数字通信系统是利用数字信号来传递信息的通信系统，其模型如图 1-3 所示。

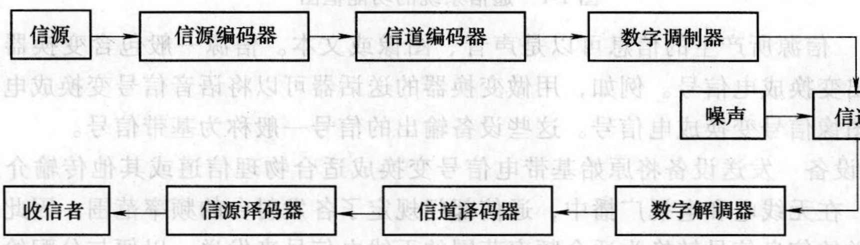

图 1-3　数字通信系统模型

1）信源编码/译码器　将模拟或数字信源的输出高效地变换成二进制序列的过程称为信源编码（source encoding）或数据压缩（data compression）。信源译码是信源编码的逆过程。

2）信道编码/译码器　信道编码的目的是增强数字信号的抗干扰能力。数字信号在信道中传输时受到噪声等影响后将会引起差错。为了减小差错，信道编码器以受控的方式引入一定的冗余码元（监督元），组成所谓的“抗干扰编码”。接收端的信道译码器按相应的逆规则进行解码，从中发现错误或纠正错误，提高通信系统的可靠性。

3）数字调制/解调器　在实际应用中，不同的通信信道能够传送不同的电信号（波

形），因此数字调制器的目的是将二进制信息序列映射成适合特定信道传输的信号波形。数字解调器（digital demodulator）对信道损伤的发射波形进行处理，并将每个波形还原成表示所发送数据码元（二进制或 M 进制）的估计数字。例如，采用二进制调制时，解调器对所接收波形进行处理，以判定发送的位是1还是0，这种情况称之为二元判决或硬判决（hard decision）。当需要保密时，可以有效地对基带信号进行人为扰乱，即加密，在接收端就需要进行解密。

评价解调器与译码器性能好坏的测度，是译码序列中出现错误的概率。更准确地说，在译码器输出端出现位错误的平均概率是评价解调器—译码器组合性能的依据。一般情况下，错误概率与码特性、信道中进行信息发送的波形类型、发射机功率、信道特性及解调和译码方法等有关。

2. 通信系统的分类

通信系统的类别可从不同的角度来划分，一个通信系统可以分属不同的种类。

1）模拟通信系统　利用模拟信号来传递信息的通信系统。

2）数字通信系统　利用数字信号来传递信息的通信系统。

3）有线通信系统　用导线（如同轴电缆、双绞线和光纤光缆）作为传输媒质的通信系统。例如，市内电话、有线电视、海底电缆通信系统等。

4）无线通信系统　利用无线电波进行通信的系统。例如，短波电离层传播、微波视距传播、卫星中继等。

5）基带传输系统　以基带信号（未经调制的信号）作为传输信号的通信系统。根据信号是模拟的还是数字的，基带传输又可分为模拟基带传输和数字基带传输。

6）带通传输系统　以已调信号作为传输信号的通信系统。

3. 通信方式

通信方式是指通信双方之间的工作方式或信号传输方式。

1）单工通信　信息只能单方向传输的工作方式，因此只占用一个信道。广播、遥测、遥控、无线电寻呼等就是单工通信方式的例子。

2）半双工通信　通信双方都能收发信息，但不能同时进行收和发的工作方式。例如，使用同一载频的普通对讲机，问询及检索等都是半双工通信方式。

3）全双工通信　通信双方可同时进行收发信息的工作方式。一般情况全双工通信的信道必须是双向的信道。电话是全双工通信一个常见的例子，通话的双方可同时进行说和听。计算机之间的高速数据通信也是这种方式。

4）并行传输　将代表信息的数字序列以成组的方式在两条或两条以上的并行信道上同时传输的工作方式。

5）串行传输　数字序列以串行方式一个接一个地在一条信道上传输的工作方式。

4. 信息及其度量

如果信源中某一消息发生的不确定性越大，一旦它发生，并为收信者收到，获得的信息量也就越大。根据概率论知识，事件的不确定性可以用事件出现的概率来描述，可能性越小，概率越小；可能性越大，概率越大。因此，消息中包含的信息量与事件发生的概率密切相关。例如，“海洋受到了核爆炸的破坏”这条消息比“今天下雨”这条消息包含更多的信息量，即事件出现的概率越小，事件中包含的信息量越大。

基于以上的认识，对信息量作如下定义：若一个消息 x_i 出现的概率为 $P(x_i)$，则这一消息所含的信息量为

$$I(x_i) = \log_a\left[\frac{1}{P(x_i)}\right] = -\log_a P(x_i) \tag{1-1}$$

M 个离散消息需要用 M 个符号表示，也就是说，传送 M 个消息之一和传送 M 个符号之一是等价的，所以消息所含的信息量就是符号所含的信息量。

式（1-1）是单一符号出现时的信息量。对于由一串符号构成的消息，假设各符号的出现是相互独立的，根据信息量相加的概念，整个消息的信息量为

$$I = -\sum_{i=1}^{N} n_i \log_2 p(x_i) \tag{1-2}$$

式中，n_i 为第 i 种符号出现的次数；$p(x_i)$ 为第 i 种符号出现的概率；N 为信源的符号种类。

当消息很长时，用符号出现概率和次数来计算消息的信息量是比较麻烦的，此时可用平均信息量的概念来计算。平均信息量是指每个符号所含信息量的统计平均值，N 种符号的平均信息量为

$$H(x) = -\sum_{i=1}^{N} p(x_i)\log_2 p(x_i) \tag{1-3}$$

由于平均信息量 H 同热力学中的熵形式一样，故通常又称它为信源的熵，其单位为位/符号，或者写为 bit/符号。

有了平均信息量 $H(x)$ 和符号的总个数 n，可求出总信息量为

$$I = H(x)\, n \tag{1-4}$$

可以证明，当信源中每种符号出现的概率相等，而且各符号的出现为统计独立时，该信源的平均信息量最大，有

$$H_{\max} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N}\log_2 \frac{1}{N} = \log_2 N \tag{1-5}$$

5. 主要性能指标

通信的任务是快速、准确地传递信息，因此，传输信息的有效性和可靠性是通信系统的主要性能指标。

有效性指的是传输一定的信息量所占用的信道资源（带宽或时间），可靠性指的是接收信息的准确程度。这两项指标体现了对通信系统最基本的要求，这两者相互矛盾而又相互联系，通常是可以互换的。

（1）模拟通信系统

有效性指标为传输带宽。同样的消息采用不同的调制方式，则需要不同的频带宽度。频带宽度越窄，则有效性越好。

可靠性指标为输出信噪比。信噪比越大，通信质量越高。

（2）数字通信系统

有效性指标为传输速率。码元传输速率 R_B 定义为每秒传送码元的数目，单位为波特（Baud），有时也简记为 B。码元传输速率又称为码元速率或传码率。信息传输速率 R_b 定义为每秒传送的平均信息量，单位为位/秒（bit/s），有时也简记为 b/s 或 bps。信息传输速率

又称为信息速率或传信率。每个码元或符号通常都含有一定位数的信息量，因此，码元速率和信息速率有确定的关系，即

$$R_b = R_B H \tag{1-6}$$

式中，H 为信源中每个符号所含的平均信息量（熵）。

可靠性指标为差错率。误码率（码元差错率）P_{eB} 是指错误接收的码元数在传输总码元数中所占的比例，更确切地说，误码率是码元在传输系统中被传错的概率，即

$$P_{eB} = \frac{错误码元数}{传输总码元数}$$

误信率（信息差错率）P_{eb} 又称误比特率，是指错误接收的位数在传输总位数中所占的比例，即

$$P_{eb} = \frac{错误位数}{传输总位数}$$

显然，在二进制的数字系统中，有 $P_{eb} = P_{eB}$，因此本书后文中在讨论数字系统时默认统一用 P_e 表示误码率和误信率。

1.1.2　难点

本章的难点主要有模拟信号和数字信号的区别、基带信号和已调信号、误信率和误码率。

1. 模拟信号和数字信号的区别

按信号参量的取值方式不同，可把信号分为两类：模拟信号和数字信号。若信号的参量取值连续（不可数、无穷多），则称为模拟信号；若信号的参量取值离散（可数的、有限个），则称为数字信号。

区别模拟信号和数字信号的关键，是看携带消息的信号参量（如幅值、频率、相位）的取值是连续的还是离散的，而不是看时间。

例如：图 1-4a 所示的话音信号，按抽样定理对其进行抽样，抽样后的信号如图 1-4b 所示。尽管在时间上是离散的，但它仍属于模拟信号。实际上，这是一个 PAM（脉冲调幅）信号。图 1-5 所示的是 2PSK 信号，尽管该信号波形在时间上和幅度上都是连续变化的，但它携带消息的参量是相位，而相位只有两种变化状态（离散取值），因此它是一个数字信号。

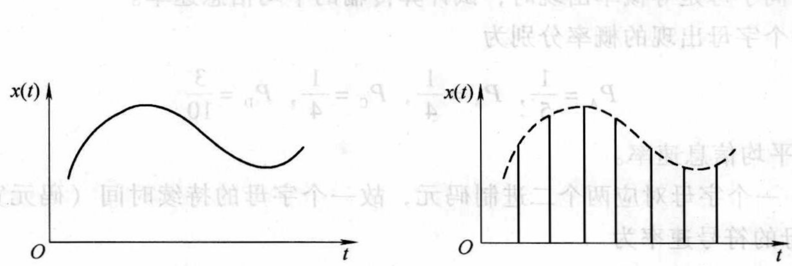

图 1-4　模拟信号

2. 基带信号和已调信号

基带信号是指来自信源的消息信号，即原始电信号（也称调制信号），可以是模拟的，

也可以是数字的。基带的含义是指信号的频谱从零频附近开始，如图像信号的频率范围为 0 ~ 6MHz。

已调信号是指经过调制后的信号，是参量受到调制后的已调载波信号。由于已调信号的频谱具有带通形式，所以已调信号又称为带通信号或频带信号。

载波信号是指未受调制的高频振荡信号。它可以是正弦波，也可以是非正弦波（如方波、三角形的脉冲串）。

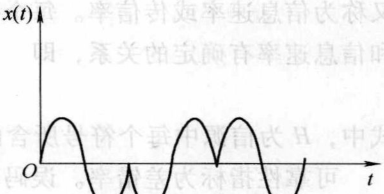

图 1-5　数字信号

3. 误信率 P_{eb} 和误码率 P_{eB}

二进制时，$P_{eb} = P_{eB}$；M 进制时，$P_{eb} < P_{eB}$。

可以证明：当考虑一个特定的错码码元可以有（$M-1$）种不同的错误样式，且这些错误样式以等概率出现时，误信率 P_{eb} 和误码率 P_{eB} 存在如下关系：

$$P_{eb} = \frac{M}{2(M-1)} P_{eB}$$

1.2　习题详解

1-1　某信源符号集由 A、B、C、D、E 组成，设每一符号独立出现，其出现概率分别为 1/4、1/8、1/8、3/16 和 5/16。试求该信源符号的平均信息量。

解　平均信息量（熵）为

$$H(x) = -\sum_{i=1}^{N} p(x_i)\log_2 p(x_i)$$

$$= \left(-\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8} - \frac{3}{16}\log_2\frac{3}{16} - \frac{5}{16}\log_2\frac{5}{16}\right)\text{bit/符号}$$

$$= 2.23\text{bit/符号}$$

1-2　一个由字母 A、B、C、D 组成的字，对于传输的每一字母用二进制脉冲编码，00 代替“A”，01 代替“B”，10 代替“C”，11 代替“D”，每个脉冲宽度为 5ms。

（1）若不同字母是等概率出现时，试计算传输的平均信息速率。

（2）若每个字母出现的概率分别为

$$P_A = \frac{1}{5},\ P_B = \frac{1}{4},\ P_C = \frac{1}{4},\ P_D = \frac{3}{10}$$

试计算传输的平均信息速率。

解　（1）一个字母对应两个二进制码元，故一个字母的持续时间（码元宽度）为 2 × 5ms，传送字母的符号速率为

$$R_B = \frac{1}{2\times5\times10^{-3}}\text{Baud} = 100\text{Baud}$$

等概时的平均信息速率为

$$R_b = R_B\log_2 M = (100\times\log_2 4)\ \text{bit/s} = 200\text{bit/s}$$

（2）平均信息量为

$$H=\left(\frac{1}{5}\log_2 5+\frac{1}{4}\log_2 4+\frac{1}{4}\log_2 4+\frac{3}{10}\log_2\frac{10}{3}\right)\text{bit/符号}$$
$$=1.985\text{bit/符号}$$

非等概时的平均信息速率为

$$R_b=R_BH=100\times1.985\text{bit/s}=198.5\text{bit/s}$$

1-3　设一信源的输出由 128 个不同的符号组成，其中 16 个出现的概率为 1/32，其余 112 个出现的概率为 1/224。信源每秒发出 1000 个符号，且每个符号彼此独立。试计算该信源的平均信息速率。

解　每个符号的平均信息量为

$$H=\left(16\times\frac{1}{32}\log_2 32+112\times\frac{1}{224}\log_2 224\right)\text{bit/符号}$$
$$=6.405\text{bit/符号}$$

已知符号速率 $R_B=1000\text{Baud}$，故平均信息速率为

$$R_b=R_BH=(1000\times6.405)\ \text{bit/s}=6405\text{bit/s}$$

1-4　设一数字传输系统传送二进制码元的速率为 2400Baud，试求该系统的信息速率；若该系统改为传送十六进制信号码元，码元速率不变，则这时的系统信息速率为多少（设各码元独立等概率出现）？

解　（1）二进制时，$R_b=R_B=2400\text{bit/s}$

（2）十六进制时，$R_b=R_B\log_2 16=(2400\times4)\ \text{bit/s}=9600\text{bit/s}$

1-5　若题 1-1 中信源以 1000Baud 的码元速率传送信息。

（1）试计算传送 1h（小时）的信息量。

（2）试计算传送 1h 可能达到的最大信息量。

解　（1）由题 1-1 可知信源的熵为

$$H=\left(-\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8}-\frac{3}{16}\log_2\frac{3}{16}-\frac{5}{16}\log_2\frac{5}{16}\right)\text{bit/符号}$$
$$=2.23\text{bit/符号}$$

故平均信息速率为

$$R_b=R_BH=1000\times2.23\text{bit/s}=2230\text{bit/s}$$

传送 1h 的信息量为

$$I=R_bt=2230\times3600\text{bit}=8.028\times10^6\text{bit}$$

（2）等概时的信息熵最大为

$$H_{max}=\log_2 5\text{bit/符号}=2.33\text{bit/符号}$$

此时平均信息速率最大，故有最大信息量为

$$I_{max}=(R_BH_{max})\ t=1000\times2.33\times3600\text{bit}=8.388\times10^6\text{bit}$$

1-6　已知各码元独立等概率出现的某四进制数字传输系统的信息速率为 2400 bit/s，接收端在半小时内共收到 216 个错误码元，试计算该系统的误码率。

解　码元速率为

$$R_B = \frac{R_b}{\log_2 M} = \frac{2400}{\log_2 4}\text{Baud} = 1200\,\text{Baud}$$

0.5h 内传送的码元个数为

$$N = R_B t = 1200 \times 1800 \text{ 个} = 2.16 \times 10^6 \text{ 个}$$

错误码元数 $N_e = 216$ 个，因此误码率 P_e 为

$$P_e = \frac{N_e}{N} = \frac{216}{2.16 \times 10^6} = 10^{-4}$$

第 2 章　随机过程分析

2.1　学习指导

2.1.1　要点

随机过程分析的要点主要包括随机过程的概念、分布函数、概率密度函数、数字特征、通信系统中常见的几种重要随机过程的统计特性。

1. 随机过程的概念

随机过程是一类随时间作随机变化的过程，它不能用确切的时间函数描述，可从两种不同角度理解：①随机过程是对应不同随机试验结果的时间过程的集合；②随机过程是随机变量概念的延伸。

2. 随机过程的分布函数和概率密度函数

如果 $\xi(t)$ 是一个随机过程，则其在时刻 t_1 取值 $\xi(t_1)$ 是一个随机变量。$\xi(t_1)$ 小于或等于某一数值 x_1 的概率为 $P[\xi(t_1)\leqslant x_1]$，随机过程 $\xi(t)$ 的一维分布函数为

$$F_1(x_1,\ t_1)\ =\ P[\xi(t_1)\ \leqslant\ x_1] \tag{2-1}$$

如果 $F_1(x_1,\ t_1)$ 的偏导数存在，则 $\xi(t)$ 的一维概率密度函数为

$$\frac{\partial F_1(x_1,t_1)}{\partial x_1}=f_1(x_1,t_1) \tag{2-2}$$

对于任意时刻 t_1 和 t_2，把 $\xi(t_1)\leqslant x_1$ 和 $\xi(t_2)\leqslant x_2$ 同时成立的概率

$$F_2(x_1,x_2;t_1,t_2)\ =\ P\{\xi(t_1)\ \leqslant\ x_1,\xi(t_2)\ \leqslant\ x_2\} \tag{2-3}$$

称为随机过程 $\xi(t)$ 的二维分布函数。如果

$$f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)\ =\ \frac{\partial^2F_2(x_1,x_2;t_1,t_2)}{\partial\ x_1\partial\ x_2} \tag{2-4}$$

存在，则称 $f_2(x_1,\ x_2;\ t_1,\ t_2)$ 为随机过程 $\xi(t)$ 的二维概率密度函数。

对于任意时刻 $t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n$，把

$$F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)\ =\ P\{\xi(t_1)\ \leqslant\ x_1,\xi(t_2)\ \leqslant\ x_2,\cdots,\xi(t_n)\ \leqslant\ x_n\} \tag{2-5}$$

称为随机过程 $\xi(t)$ 的 n 维分布函数。如果

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)\ =\ \frac{\partial^nF_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial\ x_1\partial\ x_2\cdots\partial\ x_n} \tag{2-6}$$

存在，则称 $f_n(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n;\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n)$ 为随机过程 $\xi(t)$ 的 n 维概率密度函数。

3. 随机过程的数字特征

随机过程的数字特征主要包括均值、方差、自相关函数、协方差函数和互相关函数。

随机过程 $\xi(t)$ 在任意给定时刻 t 的取值 $\xi(t)$ 是一个随机变量，其均值为

$$E[\xi(t)]\ =\ \int_{-\infty}^{\infty}xf_1(x,t)\,\mathrm{d}x \tag{2-7}$$

式中，$f_1(x,\ t)$为$\xi(t)$的概率密度函数。随机过程$\xi(t)$的均值是时间的确定函数，记作$a(t)$，它表示随机过程$\xi(t)$的n个样本函数曲线的摆动中心。

随机过程$\xi(t)$的方差的定义如下：

$$D[\xi(t)] = E\{[\xi(t) - a(t)]^2\} \tag{2-8}$$

随机过程$\xi(t)$的方差常记作$\sigma^2(t)$。随机过程$\xi(t)$的方差的另一个常用的公式为

$$\begin{aligned} D[\xi(t)] &= E[\xi^2(t) - 2a(t)\xi(t) + a^2(t)] \\ &= E[\xi^2(t)] - 2a(t)E[\xi(t)] + a^2(t) \\ &= E[\xi^2(t)] - a^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x,t)\mathrm{d}x - a^2(t) \end{aligned} \tag{2-9}$$

也就是说，方差等于均方值与均值的二次方之差，它表示随机过程在时刻t，对于均值$a(t)$的偏离程度。

随机过程$\xi(t)$的相关函数的定义如下：

$$\begin{aligned} R(t_1,t_2) &= E[\xi(t_1)\xi(t_2)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \end{aligned} \tag{2-10}$$

式中，$\xi(t_1)$和$\xi(t_2)$分别为在t_1和t_2时刻观测得到的随机变量。$R(t_1,\ t_2)$是两个变量t_1和t_2的确定函数。随机过程$\xi(t)$的相关函数表示在任意两个时刻上获得的随机变量之间的关联程度。

随机过程$\xi(t)$的协方差函数的定义如下：

$$\begin{aligned} B(t_1,t_2) &= E\{[\xi(t_1) - a(t_1)][\xi(t_2) - a(t_2)]\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - a(t_1)][x_2 - a(t_2)]f_2(x_1,x_2;t_1,t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \end{aligned} \tag{2-11}$$

式中，$a(t_1)$、$a(t_2)$分别为在t_1和t_2时刻得到的$\xi(t)$的均值；$f_2(x_1,\ x_2;\ t_1,\ t_2)$是$\xi(t)$的二维概率密度函数。

$B(t_1,\ t_2)$与$R(t_1,\ t_2)$之间有如下关系式：

$$B(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - a(t_1)a(t_2) \tag{2-12}$$

若$a(t_1)=a(t_2)=0$，则$B(t_1,\ t_2)=R(t_1,\ t_2)$。

随机过程$\xi(t)$和$\eta(t)$的互相关函数的定义如下：

$$R_{\xi\eta}(t_1,t_2) = E[\xi(t_1)\eta(t_2)] \tag{2-13}$$

4. 平稳过程及其性质

平稳过程包括严平稳过程(强平稳过程或狭义平稳过程)和广义平稳过程。如果随机过程$\xi(t)$的任意有限维分布函数与时间起点无关，也就是说，对于任意的正整数n和所有实数Δ，有

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n) = f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1+\Delta,t_2+\Delta,\cdots,t_n+\Delta) \tag{2-14}$$

则称该随机过程是严格意义下的平稳随机过程，简称严平稳随机过程。

严平稳随机过程的一维分布函数和均值都与时间无关，二维分布函数和自相关函数都只与时间间隔有关。

把对严平稳随机过程的要求降低到仅仅均值与时间无关和自相关函数只与时间间隔有关的随机过程定义为广义平稳随机过程。严平稳随机过程必定是广义平稳的，反之不一定成

立。

平稳随机过程具有各态历经性(遍历性)。因此，在求解各种统计平均时，无需无限多次的样本，只要获得一次考察，用一次实现的“时间平均”值代替平稳随机过程的“统计平均”值即可，从而使测量和计算大为简化。

平稳过程 $\xi(t)$ 的功率谱密度与其自相关函数是一傅里叶变换对。据此，可以得到两条结论：平稳过程 $\xi(t)$ 的功率等于其自相关函数在零点的取值 $R(0)$；各态历经过程任一样本函数的功率谱密度等于平稳过程的功率谱密度。

5. 高斯过程

高斯过程又称为正态随机过程。如果随机过程 $\xi(t)$ 的任意 n 维($n=1, 2, \cdots$)分布均服从正态分布，则称它为正态过程或高斯过程，其 n 维正态概率密度函数表示式为

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$
$$=\frac{(2\pi)^{-n/2}}{\sqrt{|B|}\prod\limits_{i=1}^{n}\sigma_i}\exp\left[\frac{-1}{2|B|}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|B|_{jk}\left(\frac{x_j-a_j}{\sigma_j}\right)\left(\frac{x_k-a_k}{\sigma_k}\right)\right] \tag{2-15}$$

式中，数学期望 $a_k=E[\xi(t_k)]$；方差 $\sigma_k^2=E[\xi(t_k)-a_k]^2$；归一化协方差矩阵行列式

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & 1 & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{21} & \cdots & 1\end{vmatrix},b_{jk}=\frac{E\{[\xi(t_j)-a_j][\xi(t_k)-a_k]\}}{\sigma_j\sigma_k}$$

如果高斯过程在不同时刻不相关，则它们也是统计独立的。高斯过程经过线性系统后，其系统输出也是高斯过程。

6. 窄带随机过程

如果随机过程 $\xi(t)$ 的谱密度集中在中心频率 f_c 附近相对窄的频带范围 Δf 内，即满足 $\Delta f \ll f_c$ 的条件，且 f_c 远离零频率，则称其为窄带随机过程。

随机过程 $\xi(t)$ 可以表示为

$$\xi(t)=a_\xi(t)\cos[\omega_c t+\varphi_\xi(t)],a_\xi(t)\geqslant 0 \tag{2-16}$$

式中，$a_\xi(t)$ 为随机包络；$\varphi_\xi(t)$ 为随机相位；ω_c 为中心角频率。显然，$a_\xi(t)$ 和 $\varphi_\xi(t)$ 的变化相对于载波产生的相移 $\omega_c t$ 的变化要缓慢得多。

将窄带随机过程表示式展开为

$$\xi(t)=\xi_c(t)\cos(\omega_c t)-\xi_s(t)\sin(\omega_c t) \tag{2-17}$$

式中，$\xi_c(t)=a_\xi(t)\cos[\varphi_\xi(t)]$；$\xi_s(t)=a_\xi(t)\sin[\varphi_\xi(t)]$。$\xi_c(t)$ 和 $\xi_s(t)$ 分别被称为同相分量和正交分量。

窄带随机过程 $\xi(t)$ 的统计特性可以由 $a_\xi(t)$ 和 $\varphi_\xi(t)$ 或 $\xi_c(t)$ 和 $\xi_s(t)$ 的统计特性确定。若 $\xi(t)$ 的统计特性已知，则 $a_\xi(t)$ 和 $\varphi_\xi(t)$ 或 $\xi_c(t)$ 和 $\xi_s(t)$ 的统计特性也随之确定。

由于 $\xi(t)$ 平稳且均值为零，故对于任意的时间 t，都有 $E[\xi(t)]=0$，所以

$$E[\xi_c(t)]=0,E[\xi_s(t)]=0 \tag{2-18}$$

若窄带过程 $\xi(t)$ 是平稳的，则 $\xi_c(t)$ 和 $\xi_s(t)$ 也是平稳的。

平稳窄带随机过程 $\xi(t)$ 的自相关函数可以表示为