Study Guide:

常微分方程学习指导

Ordinary Differential Equations

杜正东 徐 冰 何志蓉 张伟年 主 编

科 学 出 版 社

常微分方程学习指导

杜正东　徐冰　何志蓉　张伟年　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是与张伟年、杜正东、徐冰所编《常微分方程》相配套的学习指导用书，包括各章主要内容、典型例题和原教材所有习题的详细解答．本书既可以作为原教材的配套参考书，也可以独立阅读，不仅适合高等学校数学专业常微分方程课程的教学使用，还可供其他自学常微分方程理论的读者参考．

图书在版编目（CIP）数据

常微分方程学习指导/杜正东等主编. —北京：科学出版社，2011
ISBN 978-7-03-030762-0

Ⅰ. ①常… Ⅱ. ①杜… Ⅲ. ①常微分方程—高等学校—教学参考资料
Ⅳ. ①O175. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 066761 号

策划：姜天鹏 冯 涛
责任编辑：王纯刚 张振华/责任校对：耿 耘
责任印制：吕春珉/封面设计：东方人华平面设计部

科 学 出 版 社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏 杰 印 刷 厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011 年 5 月第 一 版 开本：787×960 1/16
2011 年 5 月第一次印刷 印张：14 1/4
印数：1—3 000 字数：301 000

定价：26.00 元
（如有印装质量问题，我社负责调换）
销售部电话 010-62140850 编辑部电话 010-62148322

前　　言

自三百多年前 Newton(1642～1727)，Leibniz(1646～1716)创立微积分以来，人们就开始研究常微分方程．悠久的历史使这门数学分支不仅成为了数学学科中队伍最大、综合性最强的领域之一，而且至今仍然充满了活力．作为本科数学专业的核心基础课程，常微分方程不仅是学习泛函分析、偏微分方程、微分几何等课程的基础，也是进一步深入学习非线性微分方程理论的基础，其重要性是不言而喻的．

学习任何一门学科，动手能力的培养和提高都是必不可少的．对数学课程而言，就是要做相当数量的习题，通过做习题这个环节来掌握基本概念和理论．自张伟年、杜正东和徐冰所编教材《常微分方程》出版以来，不少使用该教材的高等学校师生和自学者提出了很多宝贵的意见和建议，其中不少读者反映该书配置的习题有一部分难度比较大，特别是自学的朋友们，由于身边缺乏能够互相讨论和请教的老师和同学，常常感觉不少习题难以下手，或者做出来以后无法判断自己做的是否正确．因此很多读者希望我们能编写一本与之配套的习题解答．我们在自己的教学过程中，也深感这样一本习题解答是很有必要的．正是基于这些考虑，我们编写了本书．

作为与原教材配套的教学参考书，我们给出了原教材所有习题的详细解答．同时，为了读者查阅方便，我们在每一章的习题解答前面还列出了该章的主要概念、定理以及一些典型例题．因此本书既可以与原教材对照学习，也可以独立阅读．值得说明的是，我们对原教材的一个考虑是不强调习题量，而重在习题的代表性．更多的习题如果有必要，我们则宁可让学生自己在书外去找，既可把书上有限的空间留给一些实践性、探索性、前瞻性的阅读内容，也能培养学生动手查找参考书的习惯．因此，我们没有对每一节按部就班地配备习题．比如，第 2.3 节后没有习题 2.3，因为我们考虑把第 2.4 节作为本章的综合性训练和前瞻性阅读内容，而把属于第 2.3 节和第 2.4 节的习题统一给在了习题 2.4. 第 6.1 节后也没有习题 6.1，因为第 6.1 节完全是概念性的一节．在本学习指导书中，我们增补了习题 2.3 和习题 6.1，增强本书内容和结构的完整性与独立性．我们利用这些空间设置了一些新习题供读者参考．

最后我们要指出，读者在做习题的时候，要特别注意培养自己独立思考、独立解

决问题的能力，而不能过分依赖本书，只有这样才能学到真实的本领．很多时候，同一道题其解题思路和方法是多种多样的，本书只提供了其中一种解法，甚至不见得就是最好的方法．读者除了用这些解答检查自己的解题方法外，更重要的是应该以之启发自己的思路，努力寻求更好的解答．

本书的写作得到了国家级精品课程建设项目的支持和四川大学教务处及数学学院领导的鼓励，在此我们向他们表示深深的谢意．限于我们的水平和能力，这本书一定还有许多缺点和错误，我们真诚希望得到同行的批评指正．

编　者

2010 年 12 月于四川大学

目　　录

第一章 绪 论

本章用机械振动、电子学、经典天体力学、生态学等不同学科中建立的一些简单的微分方程模型向读者展示了微分方程的广泛应用，并通过这些具体例子说明了如何从一个实际问题来建立常微分方程模型，同时介绍了常微分方程的一些基本概念和方法.

1.1 主要内容

1. 常微分方程的概念

微分方程就是那些联系着自变量、未知函数以及未知函数的导数的函数方程. 一个微分方程如果其未知函数是关于自变量的一元函数，则称之为常微分方程，其一般形式是

$$F(t, \phi, \phi', \cdots, \phi^{(n)})=0, \tag{1.1}$$

其中 F 是一个 $n+2$ 元的已知函数，而 ϕ', $\cdots$, $\phi^{(n)}$ 是未知函数 $\phi(t)$ 的一阶直至 n 阶导数. 我们称 n 为方程(1.1)的**阶**，称方程(1.1)为 **n 阶常微分方程**. 当不会引起混淆时，常简称(1.1)为 **n 阶微分方程**或 **n 阶方程**.

2. 微分方程的通解与特解

如果函数 $\phi(t)$ 在区间 J 上连续，有直到 n 阶的导数，且对所有的 $t\in J$，方程(1.1)恒成立，则称 $\phi(t)$ 为方程(1.1)在区间 J 上的一个**解**.

微分方程的解包括通解与特解. n 阶微分方程(1.1)的**通解**是指形如 $\phi(t, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ 的解，其中 $(C_1, C_2, \cdots, C_n)\in G$，$G$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一个区域，且 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为 n 个独立的任意常数，即函数

$$\phi, \frac{\partial\phi}{\partial t}, \cdots, \frac{\partial^{n-1}\phi}{\partial t^{n-1}}$$

对参数 $C_1, \cdots, C_n$ 存在连续偏导数而且 Jacobi 行列式

$$\det \frac{\partial\left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial t}, \cdots, \frac{\partial^{n-1}\phi}{\partial t^{n-1}}\right)}{\partial(C_1, C_2, \cdots, C_n)} \neq 0 \tag{1.2}$$

对所有$(t, C_1, \cdots, C_n) \in J \times G$成立．

利用隐函数定理可以证明如下结果：设 G 为$\mathbb{R}^n$的一个区域，给定一个定义在区间J上且包含n个独立参数$C_1, \cdots, C_n$的函数族$\phi(t, C_1, \cdots, C_n)$，其中$(C_1, C_2, \cdots, C_n) \in G$，如果它们对$t$是$n$次可微的，则一定是某个$n$阶微分方程的通解．反之，$n$阶微分方程的通解一定包含$n$个独立的任意常数．

通解是一族解，具有不确定性．当任意常数被完全确定后就相应获得一个特定的解，称为**特解**．为了求得特解，需要对方程(1.1)附加相应的定解条件．其中初值条件是一类很重要的定解条件．附加了初值条件后的方程(1.1)有如下的形式

$$\begin{cases} F(t, \phi, \phi', \cdots, \phi^{(n)}) = 0, \\ \phi(t_0) = \phi_0, \ \phi'(t_0) = \phi_1, \ \cdots, \ \phi^{(n-1)}(t_0) = \phi_{n-1}. \end{cases} \tag{1.3}$$

称方程(1.3)为**初值问题**(或 **Cauchy 问题**)，把满足所给初值条件的方程(1.1)的解称为初值问题(1.3)的解．

3. 微分方程的近似解

绝大多数方程都不能用初等方法求解，这时可以通过迭代来构造一个函数序列逼近初值问题的特解．一个常用的迭代序列是如下的 **Picard 迭代序列**：将初值问题

$$\dot{\phi}(t) = f(t, \phi(t)), \ \phi(t_0) = x_0 \tag{1.4}$$

用等价积分方程形式

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \phi(\tau))\mathrm{d}\tau \tag{1.5}$$

来表示，再利用递推关系

$$\phi_0(t) \equiv x_0,$$

$$\phi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \phi_{n-1}(\tau))\mathrm{d}\tau, \quad n = 1, 2, \cdots$$

构造函数序列$\{\phi_n(t)\}$．在保证了收敛性的情形下，对较大的n，函数$\phi_n(t)$就是方程(1.4)的一个近似解．

除了构造迭代序列的方法外，还可用 **Euler 折线法**来逼近方程(1.4)的解，这些古

老的方法是现代微分方程数值解的基础．

4．几何分析：方向场与积分曲线

给定方程 $\dot{x}=f(t,x)$，其中 $f(t,x)$在平面上或其一个区域 G 上连续．从几何上看该方程的解 $x=\phi(t)$是 tx 平面上的一条光滑曲线 Γ，称为该方程的一条**积分曲线**．另一方面，方程 $\dot{x}=f(t,x)$在 tx 平面上的每一个有定义的点 P_0：(t_0,x_0)处都指明了一个积分曲线在该点的斜率 $f(t_0,x_0)$．像这样逐点定义了方向斜率的平面(或区域 G)称为微分方程的**方向场**．方程的解就是在这样的斜率指引下走出来的．

掌握了方程 $\dot{x}=f(t,x)$定义的方向场的全部情况，也就大致了解了积分曲线的分布状况，从而能帮助我们初步理解方程的解的性质．画出方程 $\dot{x}=f(t,x)$的方向场的常用方法是**等倾线法**，所谓“等倾线”(isocline)就是上面每个点的斜率都一样的曲线，它由关系 $f(t,x)=k$ 确定．特别地，分别称当 $k=0$ 时和当 $k=\infty$(即$\dfrac{1}{f(t,x)}=0$)时相应的等倾线为水平等倾线和竖直等倾线．我们只需针对一些不同选取的 k 画出相应的等倾线及其代表的方向就可以掌握方向场的大致情况．

5．微分方程的不同形式

形如方程(1.1)的方程称为**隐式微分方程**，如果能从中解出最高次微商，得到

$$\phi^{(n)}(t)=f(t,\phi(t),\cdots,\phi^{(n-1)}(t)), \tag{1.6}$$

则称方程(1.6)是方程(1.1)的**规范形式**．引入变换

$$x_1=\phi,\ x_2=\dot{\phi},\ \cdots,\ x_n=\phi^{(n-1)},$$

可以把 n 阶方程(1.6)化成下列等价的规范形式的一阶微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_2,\\ \quad\vdots\\ \dfrac{\mathrm{d}x_{n-1}}{\mathrm{d}t}=x_n,\\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}=f(t,x_1,\cdots,x_n).\end{cases} \tag{1.7}$$

相应地，可以将方程(1.6)的初值条件

$$\phi(t_0)=x_1^0,\ \dot{\phi}(t_0)=x_2^0,\ \cdots,\ \phi^{(n-1)}(t_0)=x_n^0 \tag{1.8}$$

等价地化成

$$x_1(t_0)=x_1^0,\ x_2(t_0)=x_2^0,\ \cdots,\ x_n(t_0)=x_n^0. \tag{1.9}$$

在方程(1.1)中若函数 $F(t, x_0, \cdots, x_n)$关于变量$(x_0, \cdots, x_n)$是一次的，就称方程(1.1)为**线性微分方程**，否则称其为**非线性微分方程**．规范形式的一阶线性微分方程组的一般形式为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t),\qquad t\in\mathbb{R},\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \tag{1.10}$$

其中 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{f}$ 是 n 维向量值函数，$\boldsymbol{A}(t)$是 $n\times n$ 阶矩阵值函数．

1.2 更多的微分方程模型

为让读者加深对数学建模的理解，以及体会微分方程在实际问题中的广泛应用，在这里我们在教材的基础上介绍更多的微分方程模型．

例 1.1 18 世纪末，英国人 Malthus 在美国任牧师期间，通过查看当地 100 多年的人口统计资料，提出了著名的 Malthus 人口模型．其基本假设是：人口总数的变化是封闭的，即无迁入迁出，个体具有相同的生殖能力及死亡率，人口在自然增长过程中，相对增长率是一个常数(称为生命系数)，记为 r，它等于出生率减去死亡率．设 t 时刻人口总数为 $N(t)$，则 $N(t)$满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=rN.$$

此方程的通解为 $N(t)=K\mathrm{e}^{rt}$.

Malthus 人口模型适用于人口总数不大，生存空间和自然资源都充裕的情形，用它来计算和预测美国 1790～1860 年间的人口数量，其误差不超过 10%. 但是当自然资源和环境条件限制了人口增长时，此模型误差就很大了．为了改进 Malthus 人口模型，荷兰生物数学家 Verhulst 引入一个常数 N_m(称为最大容量)，用以表示自然资源和环境所能容许的最大人口数，假设人口总数的净相对增长率为 $r\left(1-\dfrac{N(t)}{N_m}\right)$，由此得到下列 Logistic 人口模型

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=rN\left(1-\frac{N}{N_m}\right).$$

这是两个比较简单而基本的人口模型，由于实际的相对增长率 r 具有较大的随机性，人口增长还取决于年龄分布，性别比例等其他因素，因此还有更复杂的人口模型．

例 1.2　在教材的例 1.6 讨论了一个仅由一种捕食者和一种被捕食者(即食饵)构成的简单生态系统，假设在没有捕食者时食饵自身有充足食物和空间而自由地以增长率 β 成长，即其数量 $y(t)$ 满足 $\dot{y}=\beta y$；当捕食者存在时食饵的增长率与捕食者数量 $x(t)$ 成正比地下降，即 $\dot{y}=(\beta-sx)y$，其中 β，s 是正的常数．当没有食饵时捕食者按固定比率 α 死亡，即 $\dot{x}=-\alpha x$；当有食饵时捕食者数量增长率与食饵数量 $y(t)$ 成正比地增长，即 $\dot{x}=(-\alpha+ry)x$，其中 α，r 是正的常数．由此得到 $x(t)$ 和 $y(t)$ 满足的微分方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=x(-\alpha+ry),\\ \dot{y}=y(\beta-sx).\end{cases}$$

这就是 Volterra 系统．

假设进一步考虑其它外界影响，用 γ，δ 分别表示捕食者和食饵受外界影响的程度，则模型改为

$$\begin{cases}\dot{x}=x(-\alpha+ry)-\gamma x,\\ \dot{y}=y(\beta-sx)-\delta y.\end{cases}$$

更一般的含两个种群的生态模型为

$$\begin{cases}\dot{x}=x(a_1+a_2x+a_3y),\\ \dot{y}=y(b_1+b_2x+b_3y),\end{cases}$$

其中参数 a_i，$b_i(i=1,2,3)$不同的取法表明了这两个种群之间以及与外界的相互关系．例如，种群 x 与 y 之间就存在捕食与被捕食，竞争同一资源，互惠共存等多种形式．

例 1.3　三分子自催化反应模型：设有以下一系列化学反应

$$A\to k_1X,\ B+X\to k_2Y+D,$$

$$2X+Y\to k_3 3X,\ X\to k_4E,$$

其中 k_1，k_2，k_3，k_4 表示反应速率．假定

(1) 反应物 A 和 B 的浓度很高，在反应过程中可视为恒定和均匀的并且无扩散．

(2) 各反应彼此独立，反应速率均为常数，产品 D 和 E 一经产出即可除去．

(3) 因 A 的浓度很高，第一个反应也是远高于平衡态的．

相应的可建立 X，Y 的化学反应动力学模型：

$$\begin{cases}\dot{X}=k_1A-(k_2B+k_4)X+k_3X^2,\\ \dot{Y}=k_2BX-k_3X^2Y.\end{cases}$$

例 1.4 由教材的例 1.2 给出的振荡电路，例 1.3 给出的弹簧振子以及例 1.4 讨论的单摆问题所得到的微分方程实质上都是如下的更一般的振动方程的特例：

$$\ddot{x}+f(x,\ \dot{x})\dot{x}+g(x)=0, \tag{1.11}$$

其中$-g(x)$表示弹性力，$f(x,\ \dot{x})$表示阻尼系数，它一般和位移 x，速度 $\dot{x}$ 均有关．在方程(1.11)中若 $f(x,\ \dot{x})$与速度无关，即 $f(x,\ \dot{x})=f(x)$时，就称其为 Liénard 方程．

下面两种特殊形式的 Liénard 方程分别被称为 van der Pol 方程和 Duffing 方程

$$\ddot{x}+\mu(x^2-1)\dot{x}+x=0, \tag{1.12}$$

$$\ddot{x}+\alpha\dot{x}-x+x^3=0, \tag{1.13}$$

其中 μ，$\alpha\in\mathbb{R}$ 为常数．Liénard 方程及其特殊形式 van der Pol 方程(1.12)和 Duffing 方程(1.13)都是振动理论中十分重要的微分方程．特别地，在 Liénard 方程中令 $y=\dot{x}$，就得到如下规范形式的微分方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-g(x)-f(x)y.\end{cases}$$

1.3 典型例题

例 1.5 过某曲线上任一点的法线和坐标轴构成的三角形与过该点的切线，法线和 x 轴构成的三角形面积相等．求该曲线所满足的微分方程．

解： 设曲线所对应的函数为 $y=f(x)$．任取曲线上一点$(x_0,\ y_0)$，过该点的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

由此知该切线与 x 轴和 y 轴的交点分别为

$$\left(x_0-\frac{y_0}{f'(x_0)},\ 0\right),\ (0,\ y_0-f'(x_0)x_0).$$

类似地，过点$(x_0,\ y_0)$的法线与 x 轴和 y 轴的交点分别为

$$(x_0+f'(x_0)y_0,\ 0),\ \left(0,\ y_0+\frac{x_0}{f'(x_0)}\right).$$

从而该法线与坐标轴构成的三角形面积为

$$S_1=\frac{(x_0+f'(x_0)y_0)^2}{2\,|\,f'(x_0)\,|}.$$

不难求出切线，法线与 x 轴所围三角形面积为

$$S_2=\frac{y_0^2}{2}\left|f'(x_0)+\frac{1}{f'(x_0)}\right|.$$

由假设 $S_1=S_2$，化简得到 $2x_0y_0f'(x_0)=y_0^2-x_0^2$. 再由 (x_0, y_0) 的任意性，可得到该曲线所满足的微分方程为

$$2xyy'=y^2-x^2\ .$$

例 1.6　求曲线族

$$x(t)=C_1\cos\sqrt{2}t+C_2\sin\sqrt{2}t+C_3 \tag{1.14}$$

满足的微分方程，其中 C_1，C_2，C_3 是参数．

解：对函数 $x(t)=C_1\cos\sqrt{2}t+C_2\sin\sqrt{2}t+C_3$ 求导三次得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sqrt{2}(-C_1\sin\sqrt{2}t+C_2\cos\sqrt{2}t), \tag{1.15}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-2(C_1\cos\sqrt{2}t+C_2\sin\sqrt{2}t), \tag{1.16}$$

$$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}=2\sqrt{2}(C_1\sin\sqrt{2}t-C_2\cos\sqrt{2}t). \tag{1.17}$$

从方程(1.14)～方程(1.17)中消去参数 C_1，C_2，C_3 即得所求微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}=-2\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

例 1.7　作出下列方程的方向场：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y+1}{x-1}$，　　(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y-x^2$.

解：可利用等倾线法，对方程(1)，斜率为 k 的等倾线为直线 $y=k(x-1)-1$，其中水平等倾线为 $y=-1$. 对方程(2)，斜率为 k 的等倾线为抛物线 $y=x^2+k$，其中水平等倾线为 $y=x^2$.

也可以在 Maple 环境下运行下列命令：

```
with(DEtools):
dfieldplot(diff(y(x), x)= (y+ 1)/(x- 1), y(x), x= - 2..4, y= - 4..2, color=
BLACK);
dfieldplot(diff(y(x), x)= y- x^2, y(x), x= - 2..2, y= - 2..4, color= BLACK);
```

即可作出相应方程的方向场，见图 1.1 及图 1.2.

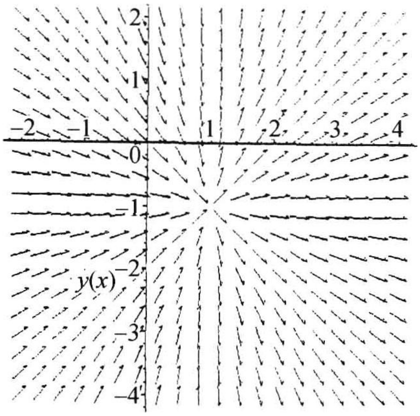

图 1.1　例 1.7(1)

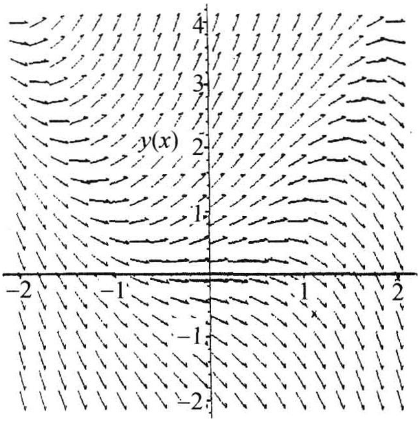

图 1.2　例 1.7(2)

1.4　习题与解答

习　题　1.1

1. 一船以恒定的速度 v_0 垂直向河对岸驶去，设水流沿 x 轴方向并且其速度与船离两岸的距离乘积成正比，比例系数为 k，河宽为 a. 求该船的运动轨迹满足的微分方程.

解：以船的初始位置为坐标原点，取坐标轴 y 垂直向河对岸.

设在时刻 t 该船的位置为 $(x(t), y(t))$. 则由假设得

$$\frac{dy}{dt}=v_0,\quad \frac{dx}{dt}=ky(t)(a-y(t)).$$

从上式消去 t 即得所求船的运动轨迹满足的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{v_0}{ky(a-y)}.$$

2. 求 tx 平面上一曲线所满足的微分方程，使其上每点处的切线与该点的向径和 Ox 轴构成一个等腰三角形．

解：设所求曲线的方程为 $x=x(t)$，P：(t, x)为该曲线上任意一点，不难看出过点 P 的切线 L 的方程为

$$X-x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(T-t),$$

其中(T, X)为 L 上任意一点．由此求出 L 与 Ox 轴的交点 Q 的坐标为：$\left(0, x-t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)$. 下面分三种情况讨论：

(1) $|OP|^2=|OQ|^2$. 这时不难求出曲线所满足的方程为

$$t^2+x^2=\left(x-t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2.$$

(2) $|OP|^2=|PQ|^2$. 这时可求出曲线所满足的方程为

$$x^2=t^2\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2.$$

(3) $|OQ|^2=|PQ|^2$. 这时可求出曲线所满足的方程为

$$2xt\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x^2-t^2.$$

习 题 1.2

1. 证明对任意常数 C，函数 $x(t)=Ce^{-3t}+2t+1$ 是微分方程

$$\dot{x}+3x=6t+5$$

的解．进而计算该方程关于初值条件 $x(0)=3$ 的解．

证明：由于 $\dot{x}=-3Ce^{-3t}+2$，因此

$$\dot{x}+3x=-3Ce^{-3t}+2+3(Ce^{-3t}+2t+1)=6t+5.$$

故 $x(t)=Ce^{-3t}+2t+1$ 是所给微分方程的解．

由 $x(0)=C+1=3$ 解出 $C=2$，所以所给初值问题的解为 $x(t)=2e^{-3t}+2t+1$. □

2. 放射性物质镭的裂变速度与存余量成正比 k. 设已知在某时刻 t_0 容器中镭的质

量是 $R_0 g$. 要求确定镭在任意时刻 t 的质量 $R(t)$.

解： 不难看出 $R(t)$ 满足初值问题

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=-kR,\ R(t_0)=R_0.$$

由此得 $\frac{\mathrm{d}R}{R}=-k\mathrm{d}t$，两边积分得通解 $R(t)=C\mathrm{e}^{-kt}$，其中 C 为任意常数．代入初值条件 $R(t_0)=R_0$ 求出 $C=R_0\mathrm{e}^{kt_0}$，因此 $R(t)=R_0\mathrm{e}^{-k(t-t_0)}$.

*3. 求以初速度 v_0 在空气中铅直上抛的物体的运动方程，其中物体质量为 m，阻力与速度的平方成正比，比例系数为 k^2. 又问物体达到最高点的时间是多少？

解： 取坐标轴 x 从地面垂直向上，设 $x=x(t)$ 表示物体在时刻 t 的位置坐标，令 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，则由 Newton 第二定律得出该物体的运动方程为

$$m\ddot{x}=m\dot{v}=-mg-k^2v^2,$$

它满足初值条件 $v(0)=v_0$. 由此得

$$\frac{\mathrm{d}v}{g+\frac{k^2}{m}v^2}=-\mathrm{d}t,$$

两边积分得通解 $\arctan\left(\frac{k}{\sqrt{mg}}v\right)=-k\sqrt{\frac{g}{m}}t+C$，其中 C 为任意常数．代入初值条件求出 $C=\arctan\left(\frac{kv_0}{\sqrt{mg}}\right)$. 物体达到最高点时有 $v(t)=0$，故物体达到最高点的时间是

$$t=\frac{\sqrt{mg}}{gk}\arctan\left(\frac{kv_0}{\sqrt{mg}}\right).$$

4. 把原教材的例 1.3 和例 1.4 的微分方程化成规范的一阶方程组形式．

解： 对原教材的例 1.3 的微分方程，令 $y=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，则可将其化成规范的一阶方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{k}{m}x-\frac{\mu}{m}y.$$

对原教材的例 1.4 的微分方程，令 $x_1=\theta$，$x_2=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$，则可将其化成规范的一阶方程组