

矿山提升机械设计

潘 英 编著

焦 作 矿 业 学 院

一九九二年四月

矿 山 提 升 机 械 设 计

潘 英 编 著

焦 作 矿 业 学 院

一 九 九 二 年 四 月

目 录

第一章 绪论.....	1
第二章 提升机钢绳中动张力的计算.....	13
第一节 用拉格朗日方程式建立离散系统的运动方程式.....	13
第二节 用模态分析法求离散系统的动力响应.....	25
第三节 提升机钢绳中动张力的计算.....	33
第四节 竖井提升机在紧急制动过程中钢绳的动张力.....	36
第三章 单绳缠绕式提升机滚筒的设计与计算.....	55
第一节 滚筒的结构及其失效形式.....	55
第二节 提升机滚筒的外载荷及筒壳变形微分方程式.....	61
第三节 与筒壳计算有关的弹性基础梁, 园环与园板的计算.....	69
第四节 钢绳拉力降低系数.....	87
第五节 筒壳的强度计算.....	91
第六节 支轮与支环的强度计算.....	104
第七节 滚筒筒壳强度的有限元分析和计算机程序.....	123
第八节 筒壳的稳定性校核.....	138
第九节 制动盘强度分析的简介.....	139
第十节 滚筒强度及稳定性的电子计算机辅助设计粗框图.....	141
第四章 缠绕式提升机主轴的设计计算及计算机程序.....	142
第一节 主轴的结构.....	142
第二节 主轴的强度计算.....	143
第三节 主轴强度与刚度计算的计算机程序的主要部分.....	149
第五章 多绳摩擦提升机的设计.....	160
第一节 摩擦衬垫.....	160
第二节 防滑计算.....	162
第三节 多绳摩擦提升机主轴装置的结构.....	182
第四节 多绳摩擦提升机主导轮的强度计算.....	184
第六章 塔式多绳摩擦提升机的振动及其控制.....	204
第一节 塔式井架的振动原因.....	204
第二节 井塔的结构和振动特性的分析.....	204
第三节 塔式多绳提升机的振动特性.....	210
第四节 提升机及井塔振动的控制.....	217
参考文献.....	225

第一章 绪 论

矿井提升机属于矿山大型固定机械之一。它的发展历史已有160多年，从最初的蒸汽机拖动的单绳缠绕式提升机发展到今天的直流电机直接拖动的多绳摩擦式提升机和双绳缠绕式提升机。目前国内外经常使用的提升机为单绳缠绕式和多绳摩擦式两种型式。本课程的内容主要是介绍和研究这两种提升机的主要部件：滚筒与主导轮，主轴的设计计算及多绳摩擦提升机的防滑问题和振动特性，以及钢绳动张力的计算。

一、提升机的主要类型

单绳缠绕式提升机的工作原理图见图1-1，布置图见图1-2。常用的型号列在表1-1中。

单绳缠绕式提升机又称为滚筒式提升机，提升容器用的钢丝绳是缠绕在滚筒上的，因此，无论竖井或斜井均可使用。但它的提升高度和最大载荷等，受现有钢丝绳的制造能力和滚筒容绳量的限制。一般而言，当钢丝绳直径大于60mm，钢丝强度超过1700MPa时，制造困难。同时，也会使提升机庞大，提升设备庞大。所以，一般一次提升载荷重量不超过20吨，一层缠绕时的提升高度不超过600米。

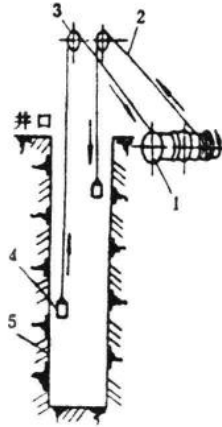


图1-1 单绳缠绕式提升机

工作原理图

- 1 - 提升机 2 - 提升钢丝绳
- 3 - 天轮 4 - 提升容器
- 5 - 井筒

多绳摩擦提升机是靠多根钢丝绳（通常是4根）与主导轮衬垫间的摩擦力来提升容器和负载的，只用在竖井中，其提升高度和最大载荷，不受容绳量的限制（因为对于摩擦提升机来讲不存在容绳量的问题），而且通常为4根绳，所以，

它的提升高度限和最大载荷都比单绳缠绕式提升机大。目前认为，对于多绳摩擦提升机，一次提升载荷重量不超过50吨，最大提升高度一般不超过1200~1300米。

根据多绳摩擦提升机安装在井塔上或地面，分为塔式或落地式两种。它们的工作原理分别见图1-3，图1-4。它们的布置图分别见图1-4，图1-6，这种提升机常用的型号列在表1-2中。

单绳缠绕式和多绳摩擦式提升机的使用范围，定性地表示于图1-7的ABCD和AEGHO的两区域。双绳缠绕式提升机的使用范围为图1-7点划线内的区域。

二、提升机参数

提升机参数可分成机械性能参数和运行参数两大类。反映提升机机械性能的参数很多，比如对缠绕式提升机来讲有滚筒直径、宽度，最大提升速度，容绳量和电动机功率等等。对多绳摩擦式提升机来说有主导轮直径，绳根数，衬垫的摩擦系数，围包角等。根据这些

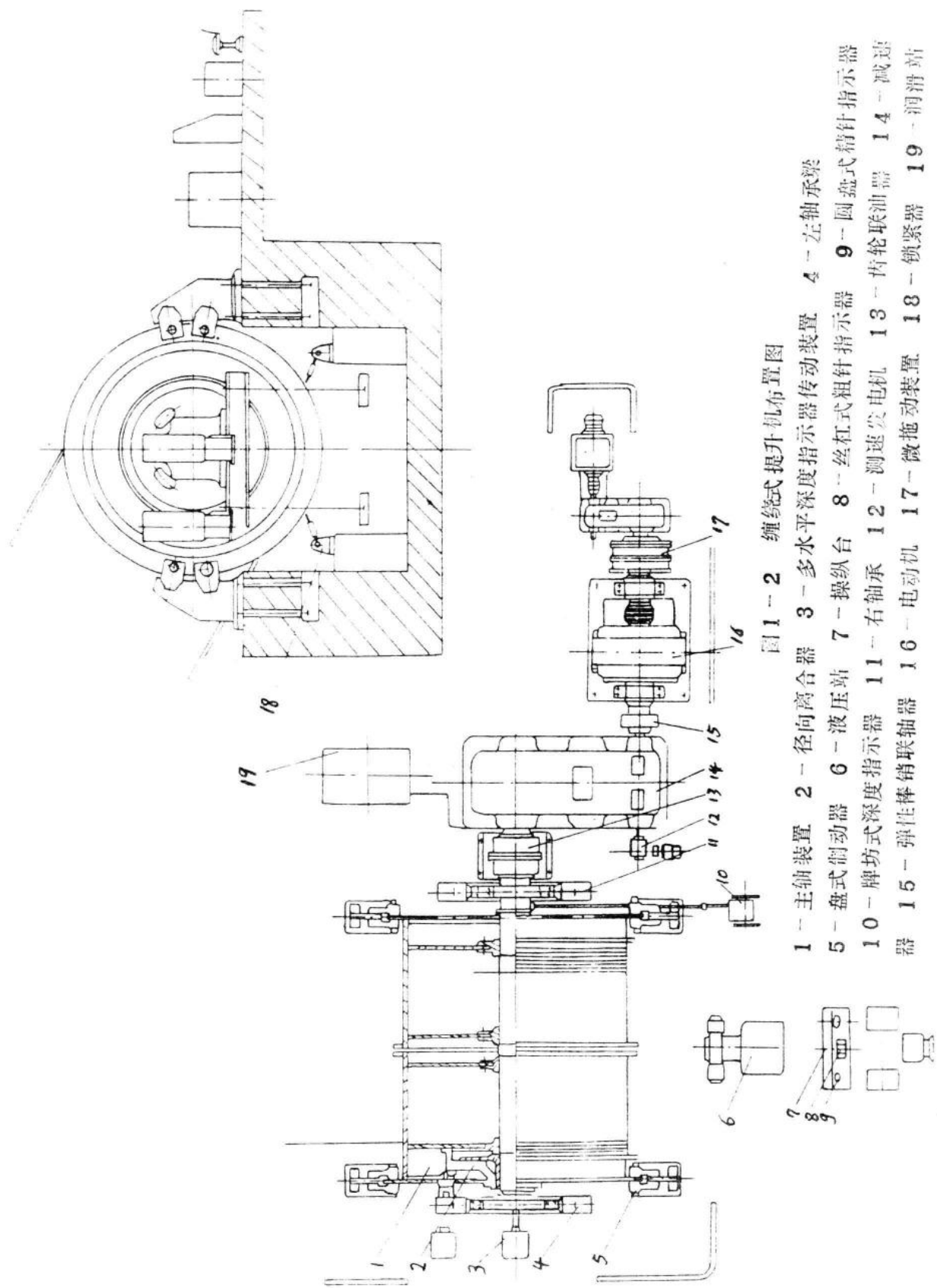


图1-2 缠绕式提升机布置图

- 1 - 主轴装置
- 2 - 径向离合器
- 3 - 多水平深度指示器传动装置
- 4 - 左轴承梁
- 5 - 盘式制动器
- 6 - 液压站
- 7 - 操纵台
- 8 - 丝杠式粗针指示器
- 9 - 圆盘式精针指示器
- 10 - 牌坊式深度指示器
- 11 - 右轴承
- 12 - 测速发电机
- 13 - 齿轮联轴器
- 14 - 减速器
- 15 - 弹性棒联轴器
- 16 - 电动机
- 17 - 微拖动装置
- 18 - 锁紧器
- 19 - 润滑站

表 1 缠绕式矿井提升机型式、基本参数

机 型 号	电 源		筒 径		筒 壳 直 径		最 大 静 荷 重			提 升 高 度			主 要 技 术 参 数		主 要 技 术 参 数	
	电压 (kV)	容量 (kVA)	筒壳直径 (mm)	筒壳直径 (mm)	最大静荷重 (kN)	最大静荷重 (kN)	一层 (m)	二层 (m)	三层 (m)	钢丝绳直径 (mm)	钢丝绳速度 (m/s)	钢丝绳速度 (m/s)	钢丝绳速度 (m/s)	钢丝绳速度 (m/s)	钢丝绳速度 (m/s)	钢丝绳速度 (m/s)
JK-2.5/30	2	1.5	6	6	6	6	290	610	950	21.5	5/7.5	1000	5	6.1	7	13
JK-2.5/30	1	2.5	2	9	9	9	400	810	1299	31	7.5/11.5	750	8.5	12.9	13	37
JK-3/20	1	3	13	13	13	13	463	960	1500	37	12/18	750	10			
JK-2/11.5	2	2	1	1130	6	4	170	380	600	24.5	5/7.5	1000	5	7.2	8.2	27
JK-2.5/20	2	2.5	1.2	1350	9	5.5	220	500	790	31	7.5/11.5	750	8.5	11	11.5	37
JK-2.5/30	2	3	1.5	1630	13	8	290	650	1000	37	12/18	750	10	16.3	17	53
JK-2.5/11.5	2	2.5	1.7	1840	17	11.5	340	750		43	20/30	750	12	29.7	25	95
JK-4/10.3	2	4	2.1	2260	21	14	430	930		17.5	600	12	730			71
JK-3/10.3	2	3	2.3	2460	26	18	370				600	12	730			

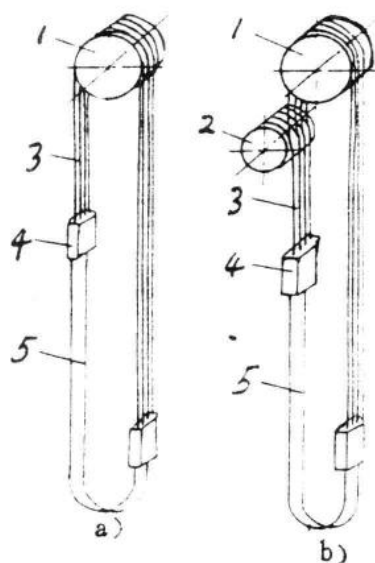


图1-3 塔式多绳摩擦轮提升机

工作原理图

a) 无导向轮系统

b) 有导向轮系统

1 - 主导轮 2 - 导向轮

3 - 提升钢丝绳 4 - 提升

容器 5 - 尾绳

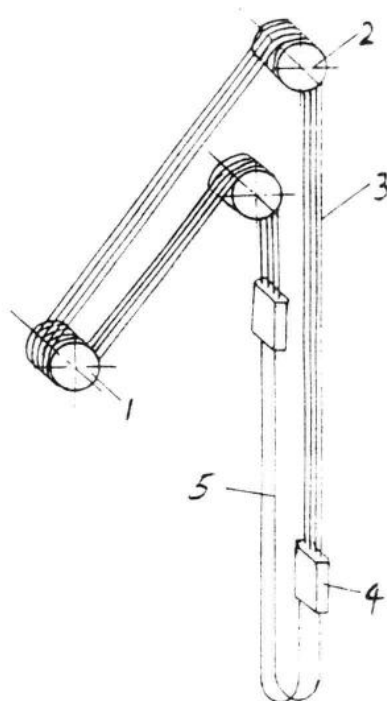


图1-4 落地式多绳摩擦轮提升机

工作原理图

1 - 主导轮 2 - 天轮 3 - 提升

钢丝绳 4 - 提升容器 5 - 尾绳

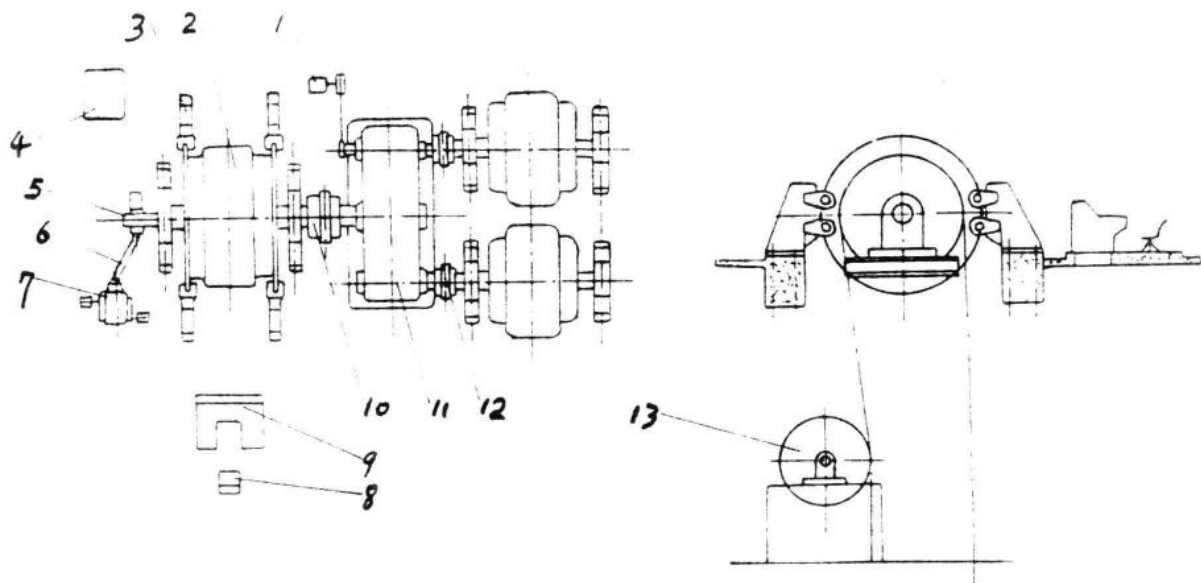


图1-5 塔式多绳摩擦轮提升机布置图

1-测速发电机 2-主轴装置 3-盘式制动器 4-液压站 5-筒针发送器 6-万向联轴节 7-深度指示器
8-司机椅子 9-操纵台 10-齿轮联轴器 11-减速器 12-弹性联轴器 13-导向轮

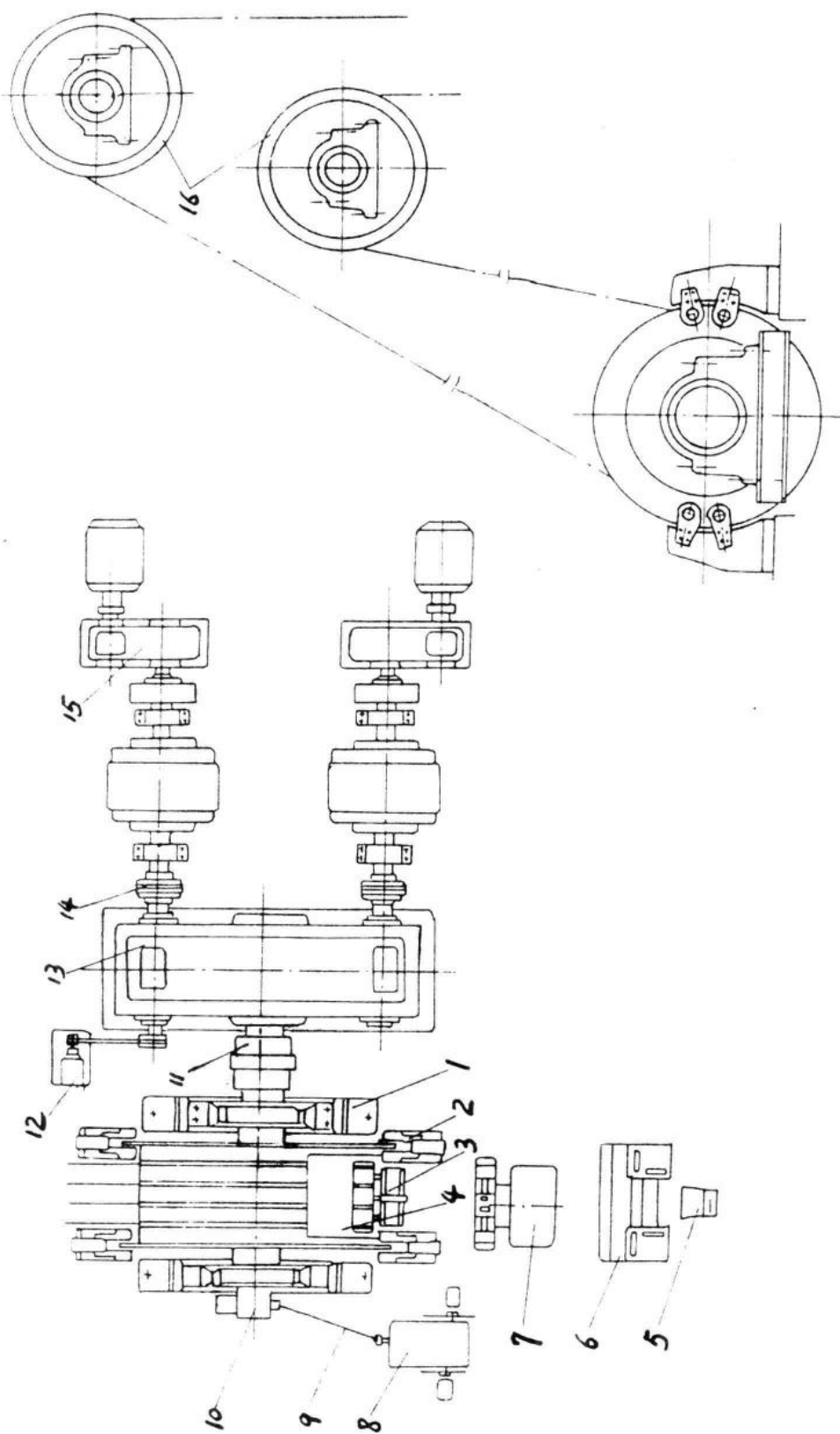


图 1-6 落地式多绳摩擦轮提升机布置图

- 1 - 主轴装置 2 - 盘形制动器 3 - 车槽装置 4 - 主导轮护板 5 - 司机椅子 6 - 操纵台 7 - 液压站
 8 - 深摩指示器 9 - 万向接头 10 - 精针发送器 11 - 齿轮联轴器 12 - 测速发电机 13 - 减速器
 14 - 弹簧联轴器 15 - 微拖动装置 16 - 天轮

表 1-2 多绳摩擦轮提升机定型产品参数表

机 器 型 号		JKM 1.35×4 (B)	JKM 2×4 (B)	JKM 2.25×4 (B)	JKM 2.8×4 (I)	JKM 2.8×4 (Ⅱ)	JKM 3.25×4 (I)	JKM 3.25×4 (I)	JKM 2.8×6 A	JKM 4×4 A
总 图 号		125 B	124 B	127 B	128 A	133 A	129 A	130 A	134 A	132 A
直 径 (米)	主 导 轮 导 向 轮	1.85 —	2 —	2.25 2	2.8 2.5	2.8 2.5	3.25 3	3.25 3	2.8 2.5	4 3
负 荷 (吨)	最大静拉力 最大静拉力差	20.4 6	24.4 6	24.4 6	30 9	30 9.5	40 14	40 14	52.9 15	60 18
钢丝绳最大直径 (毫米)	有导向轮 无导向轮	— 23	— 25	23 28	28 —	28 —	32.5 —	32.5 —	28 —	39.5 —
钢丝绳根数		4	4	4	4	4	4	4	6	4
钢丝绳间距(毫米)		200	200	200	300	300	300	300	250	300
最大提升速度(米/秒)		9.7	10.5	11.8	11.8	11.8	12	12	12	13.8
最大件外形尺寸 (主轴装置) (毫米)		长 2350 宽 2000 高 2350	2500 2000 2500	2750 2000 2750	3700 2600 3700	3700 3000 3700	3700 2700 3700	3700 3300 3700	3220 3160 3220	4420 2900 4420
主轴装置重量(吨)		8.9	9	9.4	20	18	23	22	22.5	31.2
机器总重量(吨)		29.1	29.2	29.7	50.3	46.5	60	54	60.5	80
所有旋转部分变位到主导轮圆周上的变位重量(吨)		估7	估7	估7.5	估13	估13	估13.5	估13.5	16.5	21.2
导向轮变位到主导轮的圆周上的变位重量(吨)		—	—	1.45	2.12	2.12	2.8	2.8	3.4	2.44
减 速 器 型 号 及 规 格	型 号	ZG-70	ZG-70	ZG-70	ZG-80	ZHD ₁ R -120(I)	ZG-90	ZHD ₁ R -120(I)	ZG-90	ZHG- 100
	级 数	双 级				单 级	双 级	单 级	双 级	双 级
	出 轴	单 出 轴				双 出 轴	单 出 轴	双 出 轴	单 出 轴	单 出 轴
	齿 形	渐 开 线				圆 弧	渐 开 线	圆 弧	渐 开 线	圆 弧
	速 比	7.35; 10.5; 11.5								
扭 矩 动 静 (吨-米)	7.75/ 11.6	7.75/ 11.6	7.75/ 11.6	13.3/19	28/42	22.5/39	28/42	22.5/39	38/57	
重 量 (吨)	12	12	12	17	16	24	16	25	35	
电 动 机	最大近似功率(千瓦)	640	690	780	1180	1220	1840	1840	1970	2760
	转 速 (转/分)	365; 490; 590; 735								
参考价格(不包括电机电控) (万元)		14.5	15	15.5	20	18.5	24	20	25	32
电 控 设 备		1.交流控制:带金属电阻和磁力控制站,并可带动力制动、微拖动、低频拖动。 2.直流控制:电动机发电机组,电机扩大机励磁。								

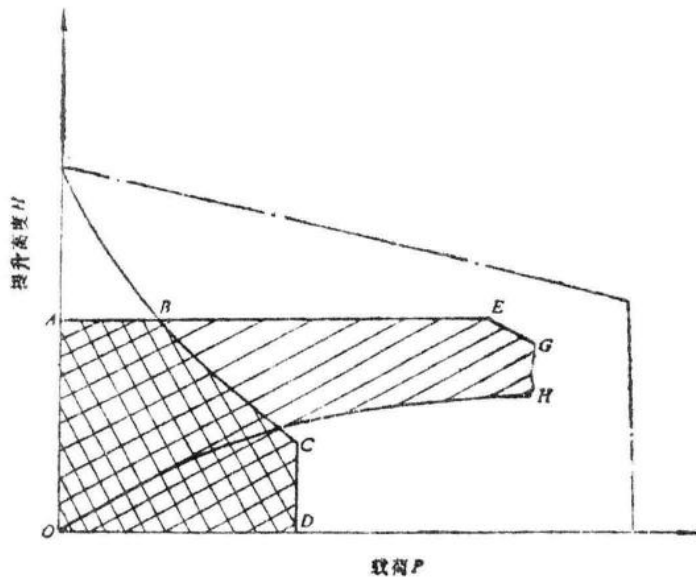


图1-7 提升机械的使用范围

参数的相互关系可分为主参数，其它参数（或称次要参数）和条件参数。

1) 条件参数：它是作为限制条件而预先给出的参数，是提升机参数所应满足的先决条件，包括其他标准已作了规定的的数据，如多绳摩擦提升机衬垫的摩擦系数，交流电动机的同步转数和额定转数等。

2) 主参数：主参数一般只有一个（或最多两个），它代表了提升机的主要性能特征，称为主参数。其基本特征是：第一，能反映产品在实际应用方面的基本特性，第二，是最稳定的参数，第三，便于应用。主参数的范围和分挡是根据实际应用的情况的统计调查来确定的。提升机的主参数一般认为是滚筒（或主导轮）的直径。其分挡的主要目的是既能满足大多数用户，即根据煤层和矿层的埋藏深度和当前的机械发展水平的需要，又能有利于生产厂家降低成本。当然分挡越细越能满足现场需要，但是产品的成本也要提高。

目前确定主参数系列分挡的比较实用的办法是绘出“提升能力”图，或称为参数型谱图，或称为同一类提升机械各种规格的“使用范围图”。图1-8是国产双滚筒缠绕式提升机的“使用范围图”。此图是从提升高度和钢丝绳每米重量为两个坐标来绘制的使用范围图，从图上可明显的看出主参数分挡的均匀性和各种机型的覆盖面，可以根据实际的情况把某区域的分挡再细一些或间距再加宽一些。

3) 其它参数或称为次要参数：它是由主参数决定的，与主参数有某种依赖关系。有的可表示为某种确定的函数关系，如滚筒直径与钢丝绳之间的关系。有的则有一定的相关关系。

主参数确定后，根据其它性能参数与主参数的关系，就可以确定其它参数。下面以缠绕式提升机为例来说明，缠绕式提升机的主参数是滚筒直径 D 。

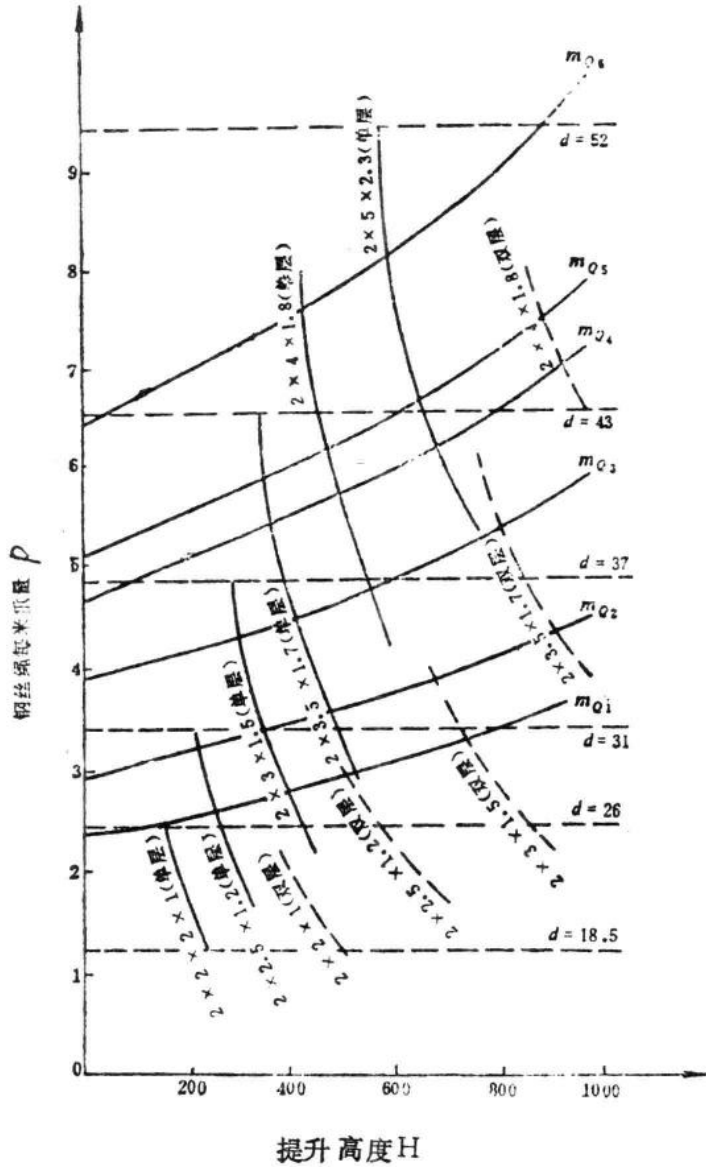


图 1-8 双卷筒缠绕式提升机的使用范围

(1) 钢丝绳直径 d : 滚筒直径 D 确定后, 选择钢丝绳直径的主要原则是使钢丝绳在绕过滚筒时不产生过大的弯曲应力。理论和实践都证明, 钢丝绳中所产生的弯曲应力大小, 取决于滚筒直径与钢丝绳直径之比。

安全规程规定:

对于缠绕式提升机, 工作在地面时

$$D/d \geq 80 \quad \text{同时满足} \quad D/d_s \geq 1200$$

式中 d_s 为绳中最粗钢丝的直径。

工作于井下时

$$D/d \geq 60 \quad \text{同时满足} \quad D/d_s \geq 900$$

(2) 卷筒宽度 B 对于缠绕式提升机，在卷筒直径已定的情况下， B 值可根据国家矿井平均深度，提升机与井筒的相对位置，以及容器的中心距等参数来确定。对于多绳摩擦轮提升机的宽度，主要由绳间距来确定。一般绳间距均在 $200 \sim 300$ mm 左右。

(3) 提升高度 H 在 D 、 B 、 d 确定后，每种提升机的最大提升高度还决定于缠绕层数，各种使用条件下的缠绕层数，安全规程中均有明确规定。

(4) 钢丝绳最大静张力 P 根据钢丝强度及钢丝绳安全系数来确定钢丝绳最大静张力 P 。

钢丝的抗张强度 σ_b ，一般取为 $1500 \sim 1700 \text{ MPa}$ 。钢丝绳的安全系数 n_0 ，由安全规程规定。从而钢丝绳的最大静张力可按下式确定

$$P = \frac{P_z}{n_0}$$

式中 P_z 为钢丝绳中所有钢丝破断力之和

(5) 钢丝绳最大静张力差 ΔP 确定最大静张力差的主要因素是容器的自重及钢丝绳的自重，它等于上升端和下降端钢绳静张力差的最大值。

(6) 最大提升速度 v_{\max} 最大提升速度 v_{\max} 的确定，应满足经济性与安全性。

分析证明，经济提升速度 $v_j = (0.4 \sim 0.5) \sqrt{aH}$

式中 a ——加速度， $[a]$ 为 m/s^2 ；

H ——提升高度， $[H]$ 为 m ；

v_j ——经济提升速度， $[v_j]$ 为 m/s 。

由于一般情况下 $a = 0.6 \sim 1.0 \text{ m/s}^2$ ，故

$$v_j = (0.3 \sim 0.5) \sqrt{H}$$

当 $H < 200 \text{ m}$ 时取下限， $H > 600 \text{ m}$ 时取上限。最大提升速度 v_{\max} 应尽量接近 v_j 。

安全规程规定：竖井升降输送人员时的最大提升速度 $\leq 0.5 \sqrt{H}$ ；竖井升降输送物料时的提升最大速度 $\leq 0.6 \sqrt{H}$ 。对于斜井，也有相应的规定。

(7) 电动机的功率 P_N 电动机的功率可近似地由下式计算：

$$P_N = \frac{K \Delta P v_{\max}}{1000 \eta} \cdot \rho$$

式中 P_N ——功率， $[P_N]$ 为 KW ；

ΔP ——钢丝绳最大静张力差， $[\Delta P]$ 为 N ；

v_{\max} ——最大提升速度， $[v_{\max}]$ 为 m/s ；

K ——矿井阻力系数， $K = 1.15 \sim 1.2$ ；

η ——减速器效率， $0.85 \sim 0.92$ ；

ρ ——动力系数， $\rho = 1.4 \sim 1.2$ 。

提升机的运行参数是指在提升过程中，提升机滚筒周边上的线速度、线加速度、线减速度及作用于周边上的力等。当不计钢绳和提升机各构件的弹性时，这些值就等于提升容器在井筒中运行的速度和加（减）速度以及作用在与滚筒分离点与相遇点上钢绳的受力。把速度和加速度用图形表示出来，称为速度图和加速度图。把作用于滚筒（主导轮）周边上的力用图表示出来，称为力图。

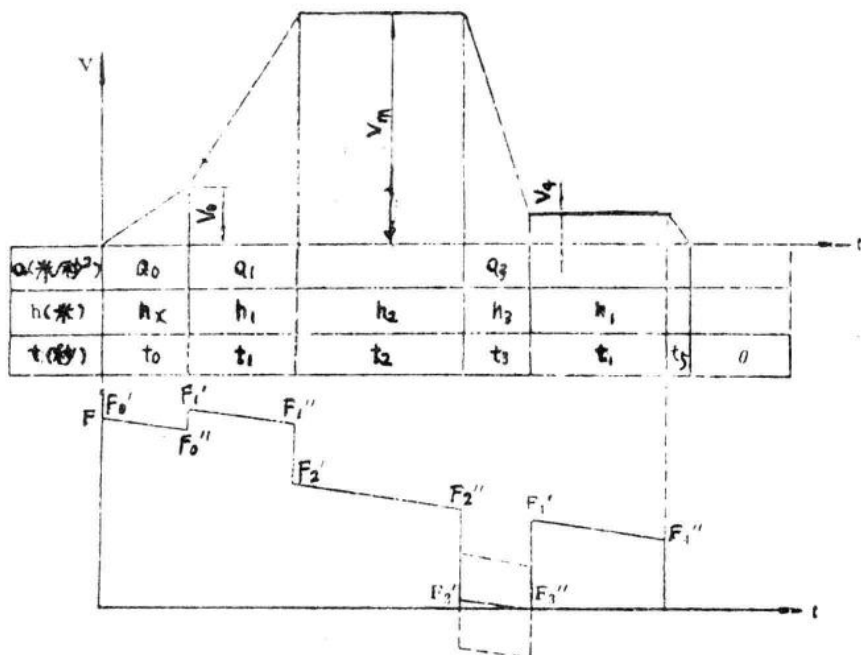


图 1 - 9 提升速度图和力图

对于箕斗提升一般采用六阶段速度图，其运行参数在速度图可表达的有： t_0 ， t_1 ， t_2 ， t_3 ， t_4 ， t_5 ， a_0 ， a_1 ， a_3 ， v_0 ， v_m ， v_4 ， h_x ， h_1 ， h_2 ， h_3 ， h_4 以及休止时间 θ ，表在图 1 - 9 中。对于箕斗提升， $h_x = 2.35$ 米， $v_0 = 1.5$ 米/秒是已知数据， h_4 ， v_m ， a_1 ， a_3 确定后其它参量可用下列分式计算出来：

$$a_0 = \frac{v_0^2}{2 h_x} \quad (\text{米/秒}^2)$$

$$t_0 = \frac{v_0}{a_0} \quad (\text{秒})$$

$$t_1 = \frac{v_m - v_1}{a_1} \quad (\text{秒})$$

$$h_1 = \frac{v_m + v_0}{2} \cdot t_1 \quad (\text{米})$$

$$t_4 = \frac{h_4}{v_4} \quad (\text{秒})$$

$$t_3 = \frac{v_m - v_4}{a_3} \quad (\text{秒}) \quad (1-1)$$

$$h_3 = \frac{v_m + v_4}{2} \cdot t_3 \quad (\text{米})$$

$$h_2 = H - h_x - h_1 - h_3 - h_4 \quad (\text{米})$$

$$t_2 = \frac{h_2}{v_m} \quad (\text{秒})$$

一次提升循环时间： $T_x = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + \theta$ (秒)

t_5 为抱闸时间，一般取 1 秒。

对于箕斗提升，动力方程式为：

$$F = KQ + (P - q)(H - 2x) \pm ma \quad (1-2)$$

式中： F ——作用于滚筒周边的力，牛顿；

K ——矿井阻力系数；

P ——提升钢绳每米重量（对摩擦提升为提升绳每米总重），牛顿/米；

q ——尾绳每米重量（对摩擦提升为尾绳每米总重），牛顿/米；

H ——提升高度；

x ——该瞬间提升容器已走过的距离，米；

m ——提升系统变位质量，公斤；

a ——该瞬间的加（减）速度值，米/秒²。

力图表示在图 1-9 中。

电动机的等效力

$$F_d = \sqrt{\int_c^T F^2 dt} / T_d \quad (\text{牛顿}) \quad (1-3)$$

$$T_d = \frac{1}{2} (t_0 + t_1 + t_3 + t_4 + t_5) + t_2 + \frac{\theta}{3} \quad (\text{秒}) \quad (1-4)$$

电动机的等效功率

$$P_d = \frac{F_d \cdot V_m}{\eta_j} \quad (\text{千瓦}) \quad (1-5)$$

式中： η_j ——为提升机减速器的效率。

第二章 提升机钢绳中动张力的计算

在以前的提升机运行参数计算中，认为提升机在起动过程中和在紧急制动过程中的加、减速度为恒值，而且并没有考虑到钢绳的弹性，也就是说认为钢绳是一个无弹性元件，显然这与实际是有较大的差距的，本章的目的是把钢绳视为一个弹性元件，在起动和紧急制动过程中施加到系统中的力为时间的某个函数时来计算钢绳中的动张力。

钢绳中动张力，实际上是指的钢绳与滚筒的相遇点和分离点的动张力，和静张力一样，动张力的最大值也出现在这两个点上。这两个点的钢绳动张力的计算办法有两种，一个是把整个提升机视为一个离散系统来计算，一个是把钢丝绳视为一个连续的弹性体来计算。

第一节 用拉格朗日方程式建立离散系统的运动方程式

建立离散系统的振动方程式的办法有直接应用牛顿第二定律法影响系数法，柔度影响系数法和利用拉格朗日方程等方法，现在先介绍用拉格朗日方程式建立离散系统振动方程式的办法。

一、虚位移原理：

世界上的事物是复杂的，虽然从原理上讲空间直角坐标系可以表达空间中任一点的位移状况和坐标。但在实际的应用上往往显得不方便，尤其是在具有某种相互联系的机构上。比如对一个手动螺旋压榨机的手的作用力 P 与压榨机对被榨物间的作用力 N 的位移之间的关系。如果用直角坐标系，就首先要确定此坐标系的原点定在那个位置，然后确定这两个力点在此坐标系中的位置。最后再找位移，就显的比较烦，但如果用虚位移来表达此两力之间的位移关系就很简单，直接可写出此两个虚位移 $\delta\varphi$ 和 δz 之间的

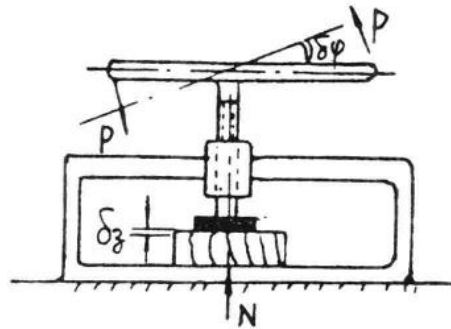


图 2-1

关系：
$$\frac{\delta\varphi}{2\pi} = \frac{\delta z}{h}$$
（ h ——为螺距）不必

去考虑这两个力点在空间中直角坐标系中的位置，因为这两个虚位移之间的关系是被机械本身确定了的。

也就是说这时我们考虑问题从力的作用点出发，从力的作用点的原来位置，在其力方向上移动一个小的位移。即所谓虚位移。这样，实际上是由几个坐标原点出发，而不是象直角坐标系那样去考虑一个坐标原点。

在下列的前提条件下：

① 约束为理想约束（即不考虑摩擦）。

② 虚位移满足几何约束，并认为在力的作用方向上的位移，如果是力矩的话，则是在此力矩作用方向下的角位移为正。

③ 系统处于平衡状态。

则虚位移原理是：该系统所有力所作的虚功之和等于零。

$$\text{用公式表达：} \quad \sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta r_i = 0 \quad (2-1)$$

式中： F_i 是作用在系统中某力点的力， δr_i 是该力（力矩）在作用方向上的虚位移。

对于静力学，比如一个机构的静平衡问题，用此虚位移原理的形式已足够，但为了把此原理推广到动力学中去用，也就是对一个多质点的，有加速度的离散系统中去用，就引出了拉格朗日方程式。

二、拉格朗日方程式：（研究 n 个质点的离散系统的公式）

1、广义位移，广义坐标和广义力：

在应用虚位移原理时，从前面的所读的例子中可以看出，关键在于找出各虚位移之间的内在关系，这个内在关系反映出该机构的特点，所以各虚位移之间并不是互相独立的。在这些虚位移中间只有一些是独立的，而另一些虚位移则可以用这些相互独立的虚

位移来表达，比如在上例中 $\delta z = \frac{2\pi}{h} \delta \varphi$ ，这些相互独立的（可能）虚位移就称为广

义位移，相对于广义位移的坐标就称为广义坐标，比如在上例中 φ 即是广义坐标。

对一个有 n 个质点的离散系统来讲，其广义坐标数等于 $3n - s$ 个， s 为约束数，也就是该离散系统的自由度数。（假设每个质点上有一个力作用）

每一个虚坐标都可用广义坐标的函数来表达即：

$$\begin{cases} r_1 = r_1(q_1, q_2, \dots, q_{3n-s}) \\ r_2 = r_2(q_1, q_2, \dots, q_{3n-s}) \\ \dots\dots\dots \\ r_n = r_n(q_1, q_2, \dots, q_{3n-s}) \end{cases}$$

对第 i 个质点的虚位移为：

$$\delta r_i = \frac{\partial r_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial r_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial r_i}{\partial q_{3n-s}} \delta q_{3n-s} = \sum_{k=1}^{3n-s} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

把此式代入到虚位移原理式中得到：