高中同步训练

GAO ZHONG TONG BU XUN LIAN

精讲 精练 精测

代数

第一册

天津教育出版社

高中同步训练

精讲 精练 精测

代 数

第 一 册

储瑞年

天 津 教 育 出 版 社

责任编辑：翟　跃

高中同步训练
精讲　精练　精测
代数　第一册
*
天津教育出版社出版
（天津市张自忠路189号）
邮政编码：300020
新华书店天津发行所发行
天津市武清县永兴印刷厂印刷
*
787×1092毫米　32开　10.625印张　226千字
1993年5月 第1版
1996年6月 第5次印刷
印数38681—45680
ISBN　7-5309-1618-1
G·1327　定价：9.30元

目　录

第一章　幂函数　指数函数和对数函数 …………………… 1
　一　集合 ………………………………………………… 1
　二　映射与函数 ……………………………………… 18
　三　幂函数 …………………………………………… 44
　四　指数函数和对数函数 …………………………… 81
第一学期期中测试题 …………………………………107
第二章　三角函数 ……………………………………112
　一　任意角的三角函数 ……………………………112
　二　三角函数的图象和性质 ………………………146
第一学期期末测试题 …………………………………175
第三章　两角和与差的三角函数 ……………………181
第二学期期中测试题 …………………………………226
第四章　反三角函数和简单三角方程 ………………230
　一　反三角函数 ……………………………………230
　二　简单三角方程 …………………………………261
第二学期期末测试题 …………………………………276
答案与提示 ……………………………………………281

第一章　幂函数
指数函数和对数函数

一　集　合

1.1　集合

本节要点　集合与元素两个基本概念，以及它们的表示方法与符号．

集合是数学中的基本概念（不能引用别的概念来定义，且又用来定义其它概念的概念，叫做基本概念，简称为原名），具有十分广泛的应用．集合与元素的关系是全体与个体的关系，是讨论集合与集合的关系的基础和依据．集合与元素关系的两个基本特征是：

确定性——对于任何一个给定的集合A和任何一个给定的元素a，$a\in A$，或$a\notin A$，二者必居其一，二者仅居其一；

互异性——每一集合中的任意两个元素都互不相同．

集合的表示有描述法和列举法，描述的方式可以用语言或式子，同一个集合可以用几种不同的方式来描述．着眼于元素数量，集合可分为有限集和无限集．

自然数集N，整数集Z，有理数集Q，实数集R，是几种最常见的数集．

例题与分析

例1　用描述法或列举法写出下列集合：

（1）全体偶数的集合；

（2）全体奇数的集合；

（3）直角坐标平面内，第一象限的点的集合；

（4）直角坐标平面内，x轴上的点的集合；

（5）方程$x^2-2x-2=0$的解集；

（6）不等式$|x|\leqslant 1$的解集；

（7）方程组$\begin{cases}2x-3y=7,\\3x+y=5\end{cases}$的解集；

（8）平面α内，以O为圆心，r为半径的圆.

解：（1）{偶数}，或$\{x|\ x=2n,\ n\in Z\}$；

（2）{奇数}，或$\{x|\ x=2n+1,\ n\in Z\}$，或$\{x|x=2n-1,\ n\in Z\}$；

（3）$\{(x,y)|\ x>0,\ y>0\}$；

（4）$\{(x,y)|y=0,\ x\in R\}$；

（5）$\{x|x^2-2x-2=0\}$，或$\{1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}\}$；

（6）$\{x||x|\leqslant 1,\ x\in R\}$，或$\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$；

（7）$\left\{(x,y)\ \middle|\ \begin{cases}2x-3y=7,\\3x+y=5\end{cases}\right\}$，或$\{(2,-1)\}$；

（8）{在平面α内与点O距离等于r的点}，或$\{P|OP=r,\ P\in\alpha\}$.

说明：（1）集合与元素具有多样性的特点，数学中最常见的是数集和点集；

（2）同一集合的表示形式可以不同，一般应选择简明的方式，但构成一个集合应符合纯粹性（凡集合中的元素都具有某种性质）和完备性（凡具有某种性质的元素都在集合

中）两项要求．例如，将第一象限的点集写成$\{(x,y)|\ x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$的形式，就不符合纯粹性的要求；当$x=0$，或$y=0$时，点$(x,y)$在$x$轴或$y$轴上，而不在第一象限内；又如，将偶数集写成$\{x\ |x=4n,\ n\in Z\}$的形式，就不符合完备性的要求，偶数2不在此集合中．

（3）第（7）题中，方程组的解集不能写成$\{2,-1\}$，也不能写成$\{(-1,2)\}$，这是因为方程组的解是一个有序数对，解集是以有序实数对为元素的集合．

（4）在小学讲奇数和偶数，是在正整数范围考虑的，在引进零和负整数后，奇数和偶数的概念应扩充在整数范围内来定义．

例2　用图形表示下列点集：

（1）$\{(x,y)|\ y=x^2-2x-2,\ 0\leqslant x\leqslant 3\}$；

（2）$\{(x,y)|\ y^2=-x^2+4x,\ y>0\}$；

（3）$\{(x,y)|\ -2<x\leqslant 0,\ y\in R\}$；

（4）$\{(x,y)|\ 1<x\leqslant 4, -\frac{x}{2}\leqslant y<x+1\}$．

解：（1）在平面直角坐标系中，作二次函数$y=x^2-2x-2=(x-1)^2-3$的图象，并取出$0\leqslant x\leqslant 3$的一段（如图1-1-1）；

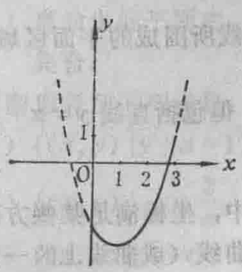

图1-1-1

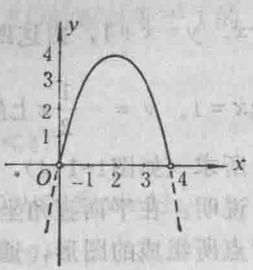

图1-1-2

（2）在平面直角坐标系中，作二次函数 $y=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$的图象，并取出位于x轴上方的部分（如图1-1-2）；

（3）在平面直角坐标系中，作直线$x=-2$，并取位于直线$x=-2$与y轴（即直线$x=0$）之间的平面区域（不包括直线$x=-2$上的点，但包括y轴上的点）（如图1-1-3）；

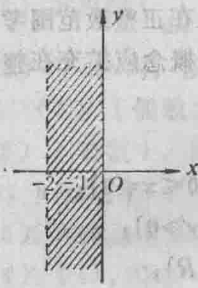

图1-1-3

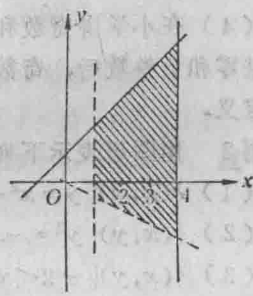

图1-1-4

（4）在平面直角坐标系中，作直线$x=1$，$x=4$，$y=-\frac{1}{2}x$，$y=x+1$，由这四条直线所围成的平面区域（不包括直线$x=1$、$y=-\frac{1}{2}x$上的点，但包括直线$y=x+1$上的点）即为所求（如图1-1-4）。

说明：在平面直角坐标系中，坐标满足某些方程或不等式的点所组成的图形，通常是曲线（或曲线上的一段）或平面区域，要注意端点或边界上的点是否包括在内。

练　习　题

1. 用列举法写出下列集合：

（1）{小于10的自然数}；$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,$

（2）{平方后等于 3 的数}；$\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

（3）方程$x^2+2x=0$的解集；$\{0, -2\}$

（4）满足$x^2-x-6<0$的整数组成的集合；$\{x \mid -2<x<3$

$\{-1, 0, 1, 2\}$

（5）方程组$\begin{cases} x+y=0, \\ 2x-y=6 \end{cases}$的解集；$\begin{cases} x=2 \\ y=-2 \end{cases}$ $\{2, -2\}$

（6）方程组$\begin{cases} x+y+z=6, \\ x+2y=5, \\ y+2z=8 \end{cases}$的解集。$\{1, 2, 3\}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$

2. 用描述法写出下列集合：

（1）所有能被 3 整除的数的集合；$\{x \mid x=3n \quad n\in Z\}$

（2）所有不能被 3 整除的整数的集合；$\{x \mid x=3n+1$ 或 $x=3n+2 \quad n\in Z\}$

（3）不等式$x^2-3x-4<0$的解集；$\{x \mid -1<x<4\}$

（4）直角坐标平面内，第二、四象限的点的集合；

（5）直角坐标平面内，y轴正半轴上点的集合；

（6）直角坐标平面内，到原点O的距离等于 1 的点的集合。

3. 用图形表示下列点集：

（1）$\{(x, y) \mid y=x+1, 0\leqslant x\leqslant 4\}$；

（2）$\{(x, y) \mid y=\dfrac{2}{x}, -1<y<2 \text{且} y\neq 0\}$；

（3）$\{(x, y) \mid y=x^2-4x, \ y<0\}$；

（4）$\{(x, y) \mid y=x^2-3, \ |x|\leqslant 2\}$；

(5) $\{(x, y) | -1 \leqslant y \leqslant 2,\ x \in R\}$;

(6) $\{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant 4, 0 \leqslant y \leqslant \frac{x}{2}\}$.

1.2 子集 交集 并集 补集

本节要点 子集、真子集、空集、集合的相等、交集、并集、补集等基本概念，以及它们的表示方法与符号.

子集的概念揭示了两个集合之间的包含关系，它是用集合与元素的关系来定义的：属于A的任何一个元素都属于B，则说A是B的子集，即由任一$x \in A$，都能推出$x \in B$，则$A \subseteq B$，或$B \supseteq A$；应注意的是，$\in$与$\subseteq$(或$\subset$)这两个符号的涵义是不同的：$\in$用在元素与集合之间，表示从属关系；$\subseteq$(或$\subset$)用在集合与集合之间，表示包含（或真包含）关系.

集合相等是一个重要的概念，$A = B$是用$A \subseteq B$且$B \subseteq A$来定义的，揭示出集合A与B的元素完全相同，解集相等的两个方程（或不等式）是同解方程（或不等式），依此表述解方程（或不等式）的理论和方法，十分有益.

交集、并集、补集的概念揭示了集合与集合之间的三种基本的运算关系，是逻辑上的“且”，“或”、“非”三种关系在数学中具体体现；这三个概念也是用集合与元素的关系来定义的：

$A \cap B = \{x | x \in A,\ 且 x \in B\}$,

$A \cup B = \{x | x \in A,\ 或 x \in B\}$,

$\overline{A} = \{x | x \in I,\ 且 x \notin A\}$;

不仅如此，中学范围内，还研究这三种基本关系所满足的算律及运算性质，因此，处理集合与集合之间的运算关系的问

题也都归结为集合与元素的关系来解决的。

例题与分析

例 1 写出集合$\{a,b,c\}$的所有子集及真子集。

解：集合$M=\{a,b,c\}$的所有子集是$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$,$\{c\}$，$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{b,c\}$，$\{a,b,c\}$（共 8 个），其中$\varnothing$,$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{b,c\}$是真子集。

说明：空集$\varnothing$是集合$M=\{a,b,c\}$的真子集：$\varnothing\subset M$。但必须注意：不能将此关系写成$\{\varnothing\}\subset M$或$\varnothing\in M$。

例 2 已知集合$M=\{x|\ x=2n+1,\ n\in Z\}$，$N=\{x\ |\ x=4m\pm 1,\ m\in Z\}$，则$M$与$N$的关系是

（A）$M\subset N$。（B）$M\supset N$。

（C）$M=N$。（D）$M\neq N$。

解：M是奇数集（全体奇数组成的集合），当$m\in Z$时，$4m$是偶数，$4m\pm 1$是奇数，故$N\subseteq M$；

设x是M的任意一个元素，则$x=2n+1(n\in Z)$。当n是奇数时，可将n表示为$2m-1$，可得$x=2(2m-1)+1=4m-1\in N$；当n是偶数时，可将n表示为$2m$，可得$x=2(2m)+1=4m+1\in N$；由此可知，$x\in M$时，必有$x\in N$，故$M\subseteq N$。

由$N\subseteq M$，且$M\subseteq N$可得$M=N$，故正确答案是(C)。

说明：此例中，$N\subseteq M$与$M\subseteq N$这两个结论都是归结为元素与集合的关系得出的，这是处理两个集合关系的基本方法。

例 3 设集合$A=\{x|\ x^2-4x+3\leqslant 0\}$，$B=\{x|\ x^2-ax<x-a\}$，若$A\supseteq B$，求$a$的取值范围。

解：解不等式$x^2-4x+3\leqslant 0$，得$A=\{x|\ 1\leqslant x\leqslant 3\}$。

$\because x^2-ax<x-a \Longleftrightarrow (x-a)(x-1)<0$，

$\therefore$ 当$a<1$时，$B=\{x|\ a<x<1\}$，此时$A\supseteq B$为不可能；

当$a=1$时，$B=\varnothing$，此时$A\supseteq B$一定成立；

当$a>1$时，$B=\{x\ |1<x<a\}$，若$A\supseteq B$，则a的取值范围是$1<a\leqslant 3$；

综上所述，若$A\supseteq B$，则a的取值范围是$1\leqslant a\leqslant 3$。

说明：处理含字母系数的不等式的解集时，要按照不重不漏的原则对字母进行分类和讨论。

练 习 题

1. 用适当的符号（$\in$，$\notin$，$\subset$，$\supset$，$\not\subset$，$=$）填空：

（1）记集合$A=\{x\ |\ x=2n-1,\ n\in Z\}$，$B=\{x\ |\ x=2n,\ n\in Z\}$，则$0\underline{\quad}A$，$0\underline{\quad}B$，$\{0\}\underline{\quad}A$，$\{0\}\underline{\quad}B$，$A\underline{\quad}Z$，$\{x\ |x=4m\pm 2,\ m\in Z\}\underline{\quad}B$；

（2）$\{1,-2,0\}\underline{\quad}\{x|\ x^3+x^2-2x=0\}$；

（3）$\{0,-1,1\}\underline{\quad}\{x\ |x^2<4,\ x\in Z\}$；

（4）$\{(x,y)\ |x>0,\ y>0\}\underline{\quad}\{(x,y)\ |xy>0\}$；

（5）$\{(x,y)\ |y=|x|\ \}\underline{\quad}\{(x,y)\ |x^2=y^2\}$。

2. 已知$\{a,b\}\subset X\subseteq\{a,b,c,d\}$，写出$X$的所有可能的情况。

3. 已知$A=\{x\ |1\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x|\ x^2-(a+1)x+a\leqslant 0\}$

（1）当$A=B$时，求a的值。

（2）当$A\subset B$时，求a的取值范围。

4. 设$A=\{a^2,\ 2a-1,\ -4\}$，$B=\{a-5,\ 1-a,\ 9\}$，已知$A\cap B=\{9\}$，求a。

5. 设$A=\{x\ |x^2+px+q=0\}$，$B=\{x|\ x^2+2(p-1)x+q+2=0\}$，已知$A\cap B=\{1\}$，求$A\cup B$。

6. 设$A=\{x|\ x^2-2x-3<0\}$，$B=\{x|\ x^2-2x\geqslant 0\}$，求$A\cup B$，$A\cap B$.

7. 已知全集$I=R$，$A=\{x|\ x^2+3x-4<0\}$，求$\overline{A}$.

本单元知识总结

一组具有某种共同属性的对象的全体形成一个集合，集合里的各个对象就是这个集合的元素. 对象同集合的关系是属于或不属于.

集合A是集合B的子集，记作$A\subseteq B$. 如果$A\subseteq B$，且$B\subseteq A$，则$A=B$，如果$A\subseteq B$，且$B\nsubseteq A$，则$A\subset B$，A是B的真子集.

集合A、B的公共元素组成的集合，是A，B的交集，记作$A\cap B$；$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$；特殊地，$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$.

集合A、B的所有元素组成的集合是A、B的并集，记作$A\cup B$；$A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$，特殊地$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=\varnothing$.

一个集合的补集是相对于给定的全集来说的. 如果A是全集I的子集，则由属于I而不属于A的元素组成的集合是A的补集，记作$\overline{A}$，自然，$\overline{A}$也是I的子集，且$\overline{\overline{A}}=A$，$A\cup\overline{A}=I$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$. 特殊地，当$A=I$时，$\overline{A}=\varnothing$.

解决集合的关系，需转化为元素与集合的关系.

综合例题与分析

例 1　已知点集$M=\{(x,y)|\ |x|\leqslant a,\ |y|\leqslant a,\ a>0\}$，$N=\{(x,y)|\ x^2+y^2\leqslant 1\}$. 问$a$为何值时，（1）$M\cap N=N$；

（2）$M\cap N=M$.

解：点集M是直角坐标平面上，四条直线 $x=\pm a$，$y=\pm a$所围成的正方形及其内部；

点集N是以原点为圆心，1为半径的圆O及其内部.

当圆O位于正方形内部时，$N\subseteq M$，则$M\cap N=N$，此时，正方形最小应是圆O的外切四边形（如图1-2-1），$a\geqslant 1$，即$a\geqslant 1$时，$M\cap N=N$；

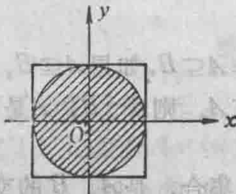

图1-2-1

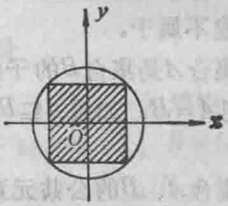

图1-2-2

当正方形位于圆O内部时，$M\subseteq N$，则$M\cap N=M$，此时，正方形最大是圆O的内接四边形（如图1-2-2），$a\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，即$0<a<\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$M\cap N=M$.

说明：当集合$A\subseteq B$时，$A\cup B=B$，$A\cap B=A$，这一性质在韦恩图上很容易得出.（如图1-2-3）

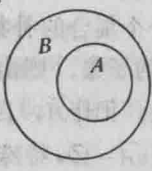

图1-2-3

例2　某班共有学生50名，其中参加数学奥林匹克学校（简称数学奥校）学习的学生有22名，参加物理奥林匹克学校（简称物理奥校）学习的学生有18名，其中既参加数学奥

校、又参加物理奥校学习的学生有13名。问：（1）两所奥校中，至少参加一所奥校学习的学生有多少名？（2）两所奥校学习都不参加的学生有多少名？

解：设全集 $I=\{$某班学生$\}$，

$A=\{$参加数学奥校学习的学生$\}$，

$B=\{$参加物理奥校学习的学生$\}$，

则 $A\cap B=\{$既参加数学奥校，又参加物理奥校学习的学生$\}$

$A\cup B=\{$至少参加一所奥校学习的学生$\}$。

据已知 $n(I)=50$，$n(A)=22$，$n(B)=18$，$n(A\cap B)=13$；

由韦恩图（图1-2-4）可以看出：

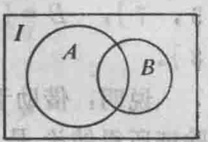

图1-2-4

（1）$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=22+18-13=27$

（2）$n(\overline{A\cup B})=n(I)-n(A\cup B)=50-27=23$。

答：至少参加一所奥校学习的学生有27名；两所奥校学习都不参加的有23名。

说明：$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$，$n(\overline{A})=n(I)-n(A)$是计算有限集及其子集的元素个数的重要公式。

例3　设全集 $I=\{$小于10的自然数$\}$，集合 A、B 满足 $A\cap B=\{2\}$，$\overline{A}\cap B=\{4,6,8\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,9\}$，求集合 A、B。

解：$I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$。

$\because\ A\cap B=\{2\}$，$\therefore\ 2\in A$，且 $2\in B$，

$\because\ \overline{A}\cap B=\{4,6,8\}$，$\therefore\ 4,6,8\in B$，且 $4,6,8\notin A$，

∵ $\overline{A}\cap\overline{B}=\{1，9\}$，

∴ $1，9\notin A$，且$1，9\notin B$，

假设$3，5，7\notin A$，则$3，5，7\in\overline{A}$，可知

$3，5，7\in\overline{A}\cap B$，或$3，5，7\in\overline{A}\cap\overline{B}$，均与已知矛盾，故$3，5，7\in A$；

假设$3，5，7\in B$，则$3，5，7\in A\cap B$，或$3，5，7\in\overline{A}\cap B$，均与已知矛盾，故$3，5，7\notin B$；

综上所述，$A=\{2，3，5，7\}$，$B=\{2，4，6，8\}$。

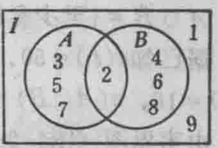

图1-2-5

说明：借助于韦恩图，可以验证所得结论是正确的。（如图1-2-5）

例4　已知集合$A=\{x|x^2-x-6<0\}$，$B=\{x|x^2+2x-8>0\}$，$C=\{x|x^2-4ax+3a^2<0\}$。（1）试求a的取值范围，使$C\supseteq A\cap B$；（2）试求a的取值范围，使$C\supseteq\overline{A}\cap\overline{B}$。

解：∵ $A=\{x|x^2-x-6<0\}=\{x|-2<x<3\}$，

$B=\{x|x^2+2x-8>0\}=\{x|x<-4，或x>2\}$，

∴ $\overline{A}=\{x|x\leqslant-2，或x\geqslant3\}$，$\overline{B}=\{x|-4\leqslant x\leqslant2\}$，

$A\cap B=\{x|2<x<3\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{x|-4\leqslant x\leqslant-2\}$。

∵ $x^2-4ax+3a^2<0\Longleftrightarrow(x-a)(x-3a)<0$。

∴ 当$a<0$时，$C=\{x|3a<x<a\}$，

当$a=0$时，$C=\varnothing$，

当 $a>0$ 时，$C=\{x\mid a<x<3a\}$.

（1）$C\supseteq A\cap B \Longleftrightarrow \begin{cases} a>0, \\ a\leqslant 2, \\ 3a\geqslant 3 \end{cases} \Longleftrightarrow 1\leqslant a\leqslant 2$（如图1-2-6）.

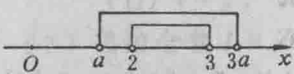

图1-2-6

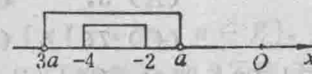

图1-2-7

（2）$C\supseteq \overline{A}\cap\overline{B} \Longleftrightarrow \begin{cases} a<0, \\ 3a<-4, \\ a>-2 \end{cases} \Longleftrightarrow$

$$-2<a<-\frac{4}{3}\text{（如图1-2-7）}.$$

说明：将 $A\cap B$，$\overline{A}\cap\overline{B}$ 及 C 标在数轴上，则 $C\supseteq A\cap B$ 与 $C\supseteq\overline{A}\cap\overline{B}$ 的包含关系可直观地解释为数轴上区间的覆盖关系，这样就可以将集合的包含关系转化为与之等价的不等式组，从而通过解不等式组确定 a 的取值范围．值得注意的是：用一个开区间或一个闭区间覆盖一个开区间，或用一个闭区间覆盖另一个闭区间时，允许一个或两个端点重合；但用一个开区间覆盖一个闭区间时，不允许端点重合．

综合练习题

A 组

1． 选择题：

（1）设集合 $M=\{x\mid x\leqslant\sqrt{13}\}$，$m=2\sqrt{3}$，则 m 与