简明复变函数与积分变换

A Concise Course on Complex Analysis and Integral Transform

朱经浩 李雨生 周羚君 编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

简明复变函数与积分变换

朱经浩　李雨生　周羚君　编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是作者根据长期在同济大学讲授工科“复变函数”课程的讲义编写而成. 全书包括复变函数和积分变换的基本内容：复平面上的复变函数、解析函数的微积分、孤立奇点的处理方法、解析函数方法的应用、保形映照、积分变换等6章. 本书较为新颖地编排了这些内容，并罗列了大量重要、有趣并有一定难度的例题及其解答.

本书的编写以学生易学、教师易教为宗旨，思路新颖，文字浅显易懂，适用面广. 不但可作为工科相关专业的教材，也可作为其他理工科专业的教材或教学参考书，并可供各类科学技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

简明复变函数与积分变换/朱经浩，李雨生，周羚君编著. —上海：同济大学出版社，2011.8

ISBN 978-7-5608-4607-1

Ⅰ.①简… Ⅱ.①朱…②李…③周… Ⅲ.①复变函数②积分变换 Ⅳ.①O174.5②O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第129276号

简明复变函数与积分变换

朱经浩 李雨生 周羚君 **编著**

策划编辑 吴凤萍 **责任编辑** 李小敏 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路1239号 邮编：200092 电话：021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 江苏句容排印厂

开 本 787 mm×960 mm 1/16

印 张 12.25

印 数 1—3 100

字 数 245 000

版 次 2011年8月第1版 2011年8月第1次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-4607-1

定 价 25.00元

前　言

本书是在朱经浩编写的《复变函数教程》的基础上，综合作者长期在同济大学讲授工科“复变函数与积分变换”的讲义编写而成，包含复变函数和积分变换的基本内容. 本书较为新颖地编排了这些内容. 在选材上，既注重工科数学要求的计算技能的训练，又适当引导数学能力的培养. 根据笔者的经验，本书可以作为 2～3 学分课程的教材. 另外，由于复变函数和积分变换二者内容基本独立，它们各自可被用于其他短课时课程.

在编写的过程中，作者以学生易学、教师易教为出发点，所选内容充分考虑到学生所在专业的要求，而所涉及的数学证明，则以简单易懂为选取标准. 本书把复变函数与高等数学做了比较，借助高等数学以引导学生掌握复变函数的知识，例如，利用实二元函数的第二类曲线积分，使得复积分概念得以先于复导数而出现在教材中，这正是复微积分与实微积分的差异. 本书把解析函数方法的一些应用问题归为一章，使学生对于解析函数理论和应用有更多的了解. 另外，作者力求教材内容符合时代发展的步伐，例如，专业数学软件使得定积分的数值计算变得简单，本书就精简了不少围道积分的传统内容. 为使学生提高解题能力，本书罗列了大量重要、有趣并有一定难度的例题及解答. 在每一章都增加了许多经过精选的习题，并附有证明题的必要的提示和计算题答案.

本书由李雨生教授编写第 1,2 章，朱经浩教授编写第 3,4,5 章，周羚君副教授编写第 6 章. 然后，集体讨论全书的定稿.

在编写和出版过程中，作者得到了同济大学出版社和同济大学数学系的大力支持. 出版社吴凤萍老师为本书的编辑和出版付出了辛勤劳动. 本校和部分外校主讲过此课程的老师也不断向作者提出建议和具体的修改意见. 同济大学各相关专业的教师也对教学内容提出了不少要求和建议. 在此作者一并对他(她)们表示衷心的感谢.

同时，作者的教学和研究一直得到教育部和国家自然科学基金委员会多种基金的资助，如教育部归国留学人员基金，优秀年轻教师基金，自然科学面上项目基金和重点项目基金. 借此机会，谨向教育部和国家自然科学基金委员会表示诚挚的谢意.

最后，也欢迎采用此教材的各位教师和同学，就教与学的过程中出现的问题，及时与笔者沟通，给与批评、建议和指教. 本书将在以后的改编中，采纳这些忠告. 请接受作者提前的谢意.

朱经浩　李雨生　周羚君

2011 年夏

于同济大学

目　录

1　复平面上的复变函数

1.1　复数和平面向量

1.1.1　复数

首先回顾在初等代数中已引进的记号 i，其代表方程 $x^2+1=0$ 的一个根，含义为 $i^2=-1$. 对 XY 平面上一个点 $A=(x, y)$，其中 x，y 为实数，称 $x+iy$ 为点 A 对应的复数，通常记为 z. 称 x 为复数 $z=x+iy$ 的实部，记为 $\mathrm{Re}z$，称 y 为复数 $z=x+iy$ 的虚部，记为 $\mathrm{Im}z$（图 1-1）. XY 平面上的点与复数 $z=x+iy$ 形成一一对应，使得 XY 平面也称为复平面.

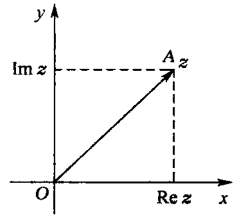


图 1-1

对点 $A=(x, y)$，有唯一的向量 $\overrightarrow{OA}=\{x, y\}$ 与之对应，所以，复数 $z=x+iy$ 也是与向量 $\{x, y\}$ 一一对应的. 这里，$A=(x, y)$ 是该向量的终点，原点是起点. 与零向量对应的复数为 $z=0$.

定义复数 $z=x+iy$ 的模（或称为绝对值）$|z|$ 为向量 $\{x, y\}$ 的长度，即

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{1-1}$$

可见，总有 $|\mathrm{Re}\,z|\leqslant|z|$，$|\mathrm{Im}\,z|\leqslant|z|$. 其几何意义是直角三角形的直角边的长度不大于斜边.

1.1.2　共轭复数

与点 (x, y) 关于实轴对称的点为 $(x, -y)$. 对 $z=x+iy$，记

$$\bar{z}=x-iy, \tag{1-2}$$

并称 $\bar{z}$ 为 z 的共轭复数，即 $\overline{x+iy}=x-iy$，如图 1-2 所示. 显然有 $\bar{\bar{z}}=z$，且 $|\bar{z}|=|z|$.

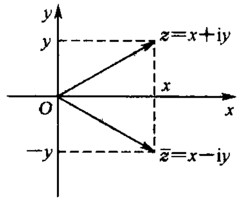


图 1-2

1.1.3 复数的线性运算

由于一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 等同于平面上一个向量 $\{x, y\}$，故全体复数相当于一个二维实线性空间. 从而复数的加减法和数乘一个实数与向量加减法和数乘相一致，图 1-3 表示复数的加法.

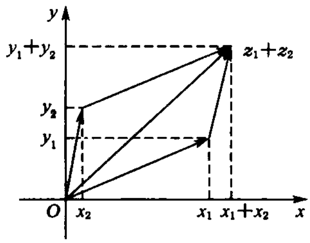


图 1-3

设有两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，$z_1=z_2$ 是指相对应的两个向量 $\{x_1, y_1\}$ 和 $\{x_2, y_2\}$ 相等，即 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$. 由于向量之间无不等式关系，故复数之间也不能比较大小. 而由向量加减法的平行四边形法则，下列关于复数的模的三角不等式成立：

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|. \tag{1-3}$$

其几何意义是三角形的一边不超过另两边之和.

1.1.4 复数的乘法运算

由 $\mathrm{i}^2=-1$，类似多项式相乘，并写成一个复数形式，可得到

$$(a_1+\mathrm{i}b_1)(a_2+\mathrm{i}b_2)=(a_1a_2-b_1b_2)+\mathrm{i}(a_1b_2+a_2b_1),$$

从而有

$$z\bar{z}=|z|^2. \tag{1-4}$$

1.1.5 复分式的分母实数化

设有复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2\ (\neq 0)$，则 z_2 除 z_1 即相当于求 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 的值. 对分式 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 进行分母实数化，可得

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(y_1x_2-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2} \tag{1-5}$$

例 1-1 设 $z=\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\dfrac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$，求 $\operatorname{Re} z$，$\operatorname{Im} z$，$|z|$.

解 易得 $\operatorname{Re} z=-\dfrac{3}{2}$，$\operatorname{Im} z=-\dfrac{1}{2}$，从而

$$|z|=\sqrt{(\operatorname{Re} z)^2+(\operatorname{Im} z)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

例 1-2 设 $z_1 = 3+4\mathrm{i}$，$z_2 = 1-2\mathrm{i}$，求 $\dfrac{z_1}{z_2}$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解 $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3+4\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} = \dfrac{(3+4\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{1+4} = -1+2\mathrm{i}$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = -1-2\mathrm{i}$.

1.1.6 复数共轭下的四则运算

在今后应用中，常进行复数共轭下的四则运算，主要规则如下：

(1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$；

(2) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$；

(3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\ (z_2 \neq 0)$；

(4) $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}\, z$，$z - \bar{z} = 2\mathrm{i}\mathrm{Im}\, z$.

例 1-3 设 z_1 及 z_2 为两个复数，试证：

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2).$$

并用此等式证明三角不等式 $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

证
$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) = (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) \\ &= z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2). \end{aligned}$$

由于 $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \leqslant |z_1\bar{z}_2| = \sqrt{z_1\bar{z}_2\bar{z}_1 z_2} = \sqrt{|z_1|^2|z_2|^2} = |z_1||z_2|$，所以

$$|z_1+z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1|+|z_2|)^2,$$

这样就得到三角不等式.

1.2 复数的三角表示

1.2.1 三角表示

设 θ 为一实数，由高等数学可知：

$$\cos\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!},\ \sin\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

可得到

$$\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k\theta^{2k}}{(2k)!}+\mathrm{i}\frac{(-1)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\theta)^k}{(k)!}.$$

类比高等数学中指数函数 e^x 的级数表达式,可记

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta. \tag{1-6}$$

这就是所谓的**欧拉公式**.这里,仅仅把欧拉公式的左边看成一个记号,表示右边的复值,在第 2 章,将给出它的严格含意.关于欧拉公式,易得到以下有趣的等式:

$$1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=0.$$

请注意,上述等式把数学上五个最常用的重要常数 0, 1, i, e, π 联系在了一起.

对非零复数 $z=x+\mathrm{i}y$,利用极坐标公式 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 和欧拉公式,有

$$z=r\cos\theta+\mathrm{i}r\sin\theta=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \tag{1-7}$$

复数的这种表示称为**三角表示**.这里,称 r 为 z 的模,θ 为 z 的辐角.显然,有 $r=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$.而辐角可有无穷多个取值,如图 1-4 所示,有

$$\theta=\theta_0+2k\pi,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots,$$

这里,$\theta_0\in(-\pi,\ \pi]$,由 z 唯一确定而被称为非零复数 z 的主辐角.记

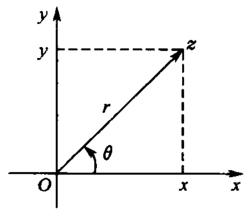


图 1-4

$$\theta=\operatorname{Arg} z,\ \theta_0=\arg z.$$

这样就有

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

于是,$\operatorname{Arg} z$ 表示复数 z 的所有辐角值的一个集合.而 $\arg z\in(-\pi,\ \pi]$ 表示复数 z 的主辐角.当 $z=0$ 时,$\operatorname{Arg} z$ 没有定义.

1.2.2 关于辐角的计算

非零复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的主辐角为从正实轴出发绕原点到向量 $\{x,\ y\}$ 所在的射线所经过的绝对值小于或等于 π 的角.若 $z=x+\mathrm{i}y$ 在上半平面及负实轴上时主辐角为正角,反之为负角.而若 z 在正实轴上时,则 $\arg z=0$;而当 z 在复实轴上时,$\arg z=\pi$.按此定义,有

$$\sin(\arg z)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\operatorname{Im} z}{|z|}. \tag{1-8}$$

例 1-4 求 $\arg(2-2\mathrm{i})$ 和 $\operatorname{Arg}(-3+4\mathrm{i})$.

解 由上述公式可知

$$\arg(2-2\mathrm{i})=\arcsin\frac{-2}{\sqrt{2^2+(-2)^2}}=\arcsin\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\pi}{4};$$

$$\arg(-3+4\mathrm{i})=\pi-\arcsin\frac{4}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}=\pi-\arcsin\frac{4}{5};$$

$$\operatorname{Arg}(-3+4\mathrm{i})=\arg(-3+4\mathrm{i})+2k\pi=-\arcsin\frac{4}{5}+(2k+1)\pi.$$

例 1-5 把 $z=1-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 进行三角表示.

解 因为 $|z|=|1-\sqrt{3}\mathrm{i}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$,

及 $$\arg(1-\sqrt{3}\mathrm{i})=\arcsin\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}=\arcsin\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{-\pi}{3},$$

所以有 $z=1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\frac{-\pi}{3}\mathrm{i}}$.

例 1-6 设 $z\neq 0$, 证明 $|z-1|\leqslant||z|-1|+|z||\arg z|$.

证 记 $\theta=\arg z$. 由 $z=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 和 $|\theta|\leqslant\pi$, 有

$$\begin{aligned}|z-|z||&=|z||1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|=|z|\sqrt{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\\&=|z|\sqrt{2-2\cos\theta}=2|z|\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\leqslant|z||\theta|\\&=|z||\arg z|.\end{aligned}$$

再由三角不等式得到

$$|z-1|\leqslant||z|-1|+|z-|z||\leqslant||z|-1|+|z||\arg z|.$$

1.2.3 复数乘积的模和辐角

把两个非零复数 z_1, z_2 表示成三角式 $z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$, $z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$, 如图 1-5 所示, 则它们的积的三角表示式为

$$\begin{aligned}z_1z_2&=(r_1\cos\theta_1+\mathrm{i}r_1\sin\theta_1)(r_2\cos\theta_2+\mathrm{i}r_2\sin\theta_2)\\&=r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}r_1r_2(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}.\end{aligned}\tag{1-9}$$

所以，

$$|z_1z_2| = r_1r_2 = |z_1||z_2|,$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2. \qquad (1\text{-}10)$$

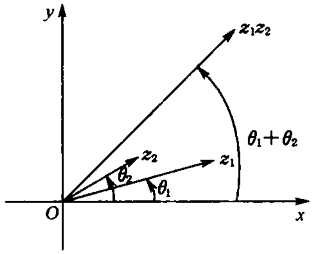


图 1-5

这表明,两个复数用三角表示后,其乘积可以按普通的结合律和指数法则进行：

$$r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

例 1-7 试求 $z=\dfrac{1+i}{1-i}$ 的模和主辐角.

解 记 $1+i=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$, $1-i=\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$, 则

$$z=\frac{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}}=e^{\frac{i\pi}{2}}.$$

故有 $|z|=1$, $\arg z=\dfrac{\pi}{2}$.

从几何上看,将复数 w 与非零复数 $z=re^{i\theta}$ 相乘相当于把 w 所代表的向量伸(或缩) r 倍后再转 θ (弧度)角. 例如, i^2 相当于将向量 $\{0, 1\}$ 逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$, 从而得到向量 $\{-1, 0\}$, 而此向量对应复数 -1, 这也可解释 i 为 $z^2+1=0$ 的根.

用数学归纳法可得到,当 $n\geqslant 2$, $|z_1z_2\cdots z_n| = |z_1||z_2|\cdots|z_n|$,

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2\cdots z_n) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2 + \cdots + \mathrm{Arg}\, z_n.$$

特别有

$$|z^n| = |z|^n,$$

$$\mathrm{Arg}(z^n) = n\arg z + 2k\pi,\ k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

作为特例,当 $z=re^{i\theta}$ 时,

$$z^n = r^ne^{in\theta}. \qquad (1\text{-}11)$$

注:一般有 $\mathrm{Arg}(z^n)\neq n\mathrm{Arg}\, z$. 例如,取 $z=-1$, $n=2$, 则 $z^2=(-1)^2=1$. 故有, $\mathrm{Arg}\,(-1)^2 = 2k\pi$, 而 $2\mathrm{Arg}(-1) = 2(2k+1)\pi$, 所以 $\mathrm{Arg}\,(-1)^2 \neq 2\mathrm{Arg}(-1)$.

1.2.4 复数方根

给定非零复数 $z=re^{i\theta}$, z 的 n 次方根为使得 $w^n=z$ 成立的复数 w. 下面利用

复数三角式求之. 设 $w=\rho e^{i\varphi}$. 由于 $w^n=z$, 故有

$$\rho^n e^{in\varphi}=w^n=z=re^{i\theta},$$

所以,

$$\rho=r^{\frac{1}{n}}, \varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n}.$$

即　$w=r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{(\theta+2k\pi)}{n}}, k=0, 1, 2, \cdots, n-1.$

例 1-8　求复数 $z=\dfrac{1+i}{-1+i\sqrt{3}}$ 的四次方根 w.

解　令 $w=\rho e^{i\varphi}$, 有 $w^4=\rho^4 e^{i4\varphi}=z=\dfrac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}$, 所以有

$$\rho=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{-1}{8}}.$$

而由 $4\varphi+\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$, 得到

$$\varphi=\frac{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)+2k\pi}{4}=-\frac{5\pi}{48}+\frac{k\pi}{2}, k=0, 1, 2, 3.$$

1.2.5　单位圆内接正 $n(\geqslant 3)$ 边形顶点的复数表示

设单位圆内接正 $n(\geqslant 3)$ 边形,其中一个顶点为 $A_0=(1,0)$, 其复数表示 $z_0=1$. 若将其余 $n-1$ 个顶点按逆时针依次在单位圆周上标出,记为 A_1, A_2, $\cdots$, A_{n-1}, 并相应以 z_1, z_2, $\cdots$, z_{n-1} 表示对应的复数,则显然有

$$|z_k|=1, k=1, 2, \cdots, n-1.$$

而对每个 $k=1, 2, \cdots, n-1$, 从 A_0 沿单位圆周逆时针转移到 A_k, 所转过的角度为 $k\dfrac{2\pi}{n}$. 若 $k\dfrac{2\pi}{n}\leqslant\pi$, 则 $z_k=e^{\frac{2k\pi}{n}i}$; 若 $k\dfrac{2\pi}{n}>\pi$, 则 $z_k=e^{-\left[\pi-\left(\frac{2k\pi}{n}-\pi\right)\right]i}=e^{\frac{2k\pi}{n}i}$. 于是有统一表达式,对 $k=1,2,\cdots,n-1$, $z_k=e^{\frac{2k\pi}{n}i}$, 这正是 1 的 n 次方根的 n 个值.

1.3　平面点集的复数表示

1.3.1　平面曲线和区域

本课程仅涉及平面上按段光滑曲线,即由有限段光滑曲线依次首尾连接而成.

而所谓光滑曲线，是指有连续切线的曲线，即该曲线的参数方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta \tag{1-12}$$

满足 $x'(t)$, $y'(t)$ 在 $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 内连续，且 $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$.

若所论按段光滑曲线已定向，则 $(x(\alpha), y(\alpha))$ 表示此曲线的始端，而 $(x(\beta), y(\beta))$ 表示此曲线的终端，这表明本课程已定向曲线的参数方程是与曲线走向相匹配的，即点在曲线上按给定方向（也称正向）移动时，参变量 t 是增大的.

若存在两相异的参数 t_1, $t_2 \in [\alpha, \beta]$，使得 $(x(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2))$，则称该点为曲线的一个**重点**. 若满足 $(x(\alpha), y(\alpha)) = (x(\beta), y(\beta))$，称此曲线为**闭曲线**. 无重点的按段光滑曲线也称为**简单曲线**. 除了起点和重点相重，无其他重点的按段光滑闭曲线称为**简单闭曲线**.

平面上以 (x_0, y_0) 为圆心、以 $r > 0$ 为半径的圆周显然是一条简单闭曲线. 记 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$，这个圆周可以用复数记为 $\left\{z \middle| \, |z - z_0| = r\right\}$，有时简记为 $|z - z_0| = r$. 对给定正数 $\delta > 0$，称

$$U_\delta(z_0) = \left\{z \middle| \, |z - z_0| < \delta\right\}$$

为 z_0 的一个邻域. 设 D 为一个复平面上的点集，若存在 $U_\delta(z_0) \subset D$，则称 z_0 为 D 的一个内点. 若 D 的每个点都是内点，则称 D 为开集.

复平面上的区域 D 为可用完全含于 D 内的按段光滑曲线连接 D 内任何两点的开集. 区域 D 满足：

(1) 对任意一点 $z_0 \in D$，存在 $\delta > 0$，使得 $U_\delta(z_0) \subset D$；

(2) D 内任意两点可用一条完全含于 D 内的折线相连接.（注意，两点之间有折线相连，等价于它们之间有分断光滑曲线相连.）

对平面上的区域 D，若存在一个正数 M，使得 $\forall z \in D$, $|z| \leqslant M$，则称 D 为有界区域，否则称为无界区域.

如图 1-6 所示，平面被以 z_0 为圆心、以 $r > 0$ 为半径的圆周所围住的部分，即圆的内部，是一个有界区域，而圆的外部则是一个无界区域.

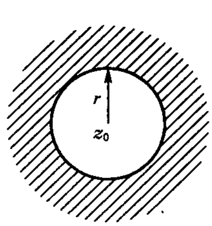


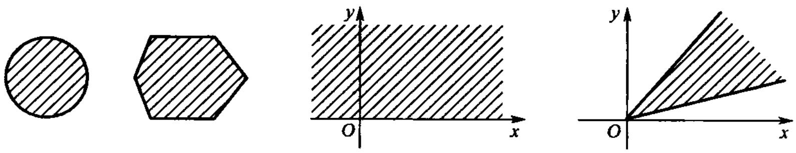
图 1-6

再看曲线的定向. 非闭简单曲线的定向依具体问题而定，一般选定其正向为对应于参数增加时点在曲线上的移动方向. 一条简单闭曲线的正向为逆时针方向. 当一条简单曲线作为一个区域的边界时，规定这条曲线关于这个区域的正向为：当设

想你在此曲线上沿此方向行走时，该区域临近边界的点位于你的左边. 例如，当一个圆周作为其内部圆盘的边界时，其正向为逆时针方向，而当它是外部区域的边界时，其正向为顺时针方向.

设 D 为一个区域，如果 D 内任一条简单闭曲线在平面上所围的内部有界区域完全含于 D 内，则称 D 为**单连通区域**，简称**单连域**.

如图 1-7 所示的圆内部、多边形内部、半平面、角域等都是单连域. 有一类重要的单连域 D 即作为一条简单闭曲线 C 的内部而形成，数学上称 D 连同 C 一起的集合为 D 的闭包，记为 $\bar{D}$，也称 C 为 D 的边界. 对于一般的开集 D，其闭包 $\bar{D}$ 包含两部分的点集，一是开集 D 本身中的点，称为内点，另一部分称为 D 的边界点，记为 ∂D，而开集 D 边界点 z_0 是这样的点：① $z_0 \notin D$；②对任意 $\delta > 0$，$U_\delta(z_0) \cap D \neq \varnothing$.



(a) (b) (c) (d)

图 1-7

多连通区域即非单连通区域，简称**多连域**. 多连域的典型例子为环域及圆内挖去有限个互不相交的闭圆盘后所剩的区域(图 1-8).

本课程中经常出现的多连域 D 为有限条简单闭曲线 $C_0, C_1, \cdots, C_m$ 按以下方式围成的区域：C_0 是 D 的外围曲线，C_0 的内部单连通区域记为 D_0；$C_1, \cdots, C_m \subset D_0$ 是 D 的内围曲线，分别围成单连通区域 $D_1, \cdots, D_m \subset D_0$，使得 $C_0, C_1, \cdots, C_m$ 互不相交，$\bar{D}_1, \cdots, \bar{D}_m$ 互不相交. 可见 D 就是 D_0 内挖去 $\bigcup_{j=1}^{m} \bar{D}_j$ 后形成的. 而复合围线 Γ: $C_0, C_1, \cdots, C_m$ 的正向就是：在 C_0 上取逆时针方向，而在 $C_1, \cdots, C_m$ 上都取顺时针方向. 我们简称复合围线 Γ 为**复围线**.

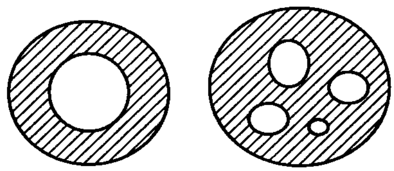

(a) (b)

图 1-8

1.3.2 平面曲线的复数表示

若平面曲线 C 的一般方程式为 $F(x, y) = 0$，经变换

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2},\ y = \frac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}},$$

可得到 C 的复数表示：

$$F\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}\right)=0. \tag{1-13}$$

若平面曲线参数方程为

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

则其复数表示为

$$z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t), \ \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \tag{1-14}$$

例 1-9 (1) 求连接 z_1 及 z_2 两点的线段的参数方程；(2) 求过 z_1 及 z_2 两点的直线的参数方程.

解 (1) 连接 z_1 及 z_2 两点的线段的参数方程为

$$z=z_1+t(z_2-z_1), \ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

(2) 过 z_1 及 z_2 两点的直线的参数方程为

$$z=z_1+t(z_2-z_1), \ -\infty<t<\infty.$$

例 1-10 求以 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 为圆心、以 R 为半径的圆周参数方程的复数形式.

解 解析几何中，该圆的参数方程为

$$\begin{cases} x=x_0+R\cos\theta, \\ y=y_0+R\sin\theta, \end{cases} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

故有以 z_0 为圆心、以 R 为半径的圆周参数方程的复数形式

$$z=z_0+R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \tag{1-15}$$

例 1-11 若平面上的曲线具有下列复数形式：$\arg(z-1)-\arg z=\frac{\pi}{4}$，给出该曲线实形式的代数方程.

解 先看满足题意的曲线上的点在平面上的性态. 考察以 $A=(0, 0)$，$B=(1, 0)$，$C=z$ 三点构成的三角形，并取点 $D=(2, 0)$.

若 $\operatorname{Im} z>0$，$\arg z=\angle A$，$\arg(z-1)=\angle DBC$，即三角形 $\triangle ABC$ 在 B 点处的外角. 于是，若 z 在曲线上，则有 $\angle C=\angle DBC-\angle A=\frac{\pi}{4}$.

即在上半平面内所论曲线上的点 z，记为 C，与 $A=(0, 0)$，$B=(1, 0)$ 三点