

# 数学物理方程

申建中 刘峰 编著



西安交通大学出版社  
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

# 数学物理方程

申建中 刘峰 编著



西安交通大学出版社  
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

## 内容简介

本书是在编者 2008 年出版的《数学物理方法》一书中后半部分内容的基础上,为适应高等学校非数学类理工科专业数学物理方程课程的教学需要而编写的。

本书主要包括偏微分方程定解问题的建立、分离变量法、积分变换法、格林函数法和特征线法等内容。除了在原有内容上做了较大的修改和完善外,还增加了勒让德多项式一章。

本书以解的结构为主线,比较系统地介绍了求解偏微分方程定解问题的基本思想和主要方法。它既可以作为高等学校相关专业本科生和研究生的教材或参考书,也可供教师和科学技术工作者阅读参考。

---

### 图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程/申建中,刘峰编著. —西安:西安交通大学出版社,2010.8  
ISBN 978-7-5605-3618-7

I. ①数… II. ①申… ②刘… III. ①数学物理方程—高等学校—教材  
IV. ①0175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 128869 号

---

书 名 数学物理方程  
编 著 申建中 刘峰  
责任编辑 李慧娜

---

出版发行 西安交通大学出版社  
(西安市兴庆南路 10 号 邮政编码 710049)  
网 址 <http://www.xjtupress.com>  
电 话 (029)82668357 82667874(发行中心)  
(029)82668315 82669096(总编办)  
传 真 (029)82668280  
印 刷 陕西元盛印务有限公司

---

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 11.125 字数 265 千字  
版次印次 2010 年 8 月第 1 版 2010 年 8 月第 1 次印刷  
书 号 ISBN 978-7-5605-3618-7/O·339  
定 价 19.00 元

---

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。  
订购热线:(029)82665248 (029)82665249  
投稿热线:(029)82664954  
读者信箱:jdjgy@yahoo.cn

版权所有 侵权必究

# 序 言

数学物理方程作为一门大学基础课,对于非数学理工类专业无疑是十分重要的。它通过对一些具有典型意义的实际模型的深入剖析,阐明和讲述偏微分方程的基本理论、处理问题的典型技巧以及应用的物理背景。它既是数学联系其他自然科学和技术领域最重要的桥梁之一,同时也为非数学理工科专业的后继课程提供必要的数学工具,更重要的是对提高学生应用数学理论和方法解决实际问题的能力大有裨益。把数学理论、解题方法和物理实际这三者有机地结合是本课程有别于其他课程的一个鲜明特点。因此,学习该门课程对于提高理工类大学生的综合素质有着极其重要的作用。

本课程内容广泛,综合性强,应用面广。一方面它涉及到高等数学、线性代数、大学物理等方面的基础知识,另一方面其讲述的理论和方法也能广泛地应用于自然科学与工程领域。例如,在电磁学、化学、力学、生物学和信息科学等领域,一些重要的问题是由偏微分方程所支配的定解问题来刻画的,也正是由于这些偏微分方程问题的引入和研究促进了相关学科的发展。因此,学好本门课程对学生未来的发展也将产生深远的影响。

本课程围绕偏微分方程定解问题的解法这一中心问题,比较系统地介绍与之相关的数学理论与方法。主要包括数学模型的建立、分离变量法、积分变换法、格林函数法和特征线法等内容。面对如此丰富的内容,本书力图做到陈述简明,条理清晰。既注意各部分内容之间的相互联系,又注意使各部分内容具有相互独立的单元式结构。对于一些重要结果,本书采用叙而不证的方式,重在介绍分析问题和解决问题的基本思想和方法,以使读者对所学数学理论的实际背景和本质有比较深入的理解。编者以为:只讲方法不讲原理的教学态度是不可取的。在某种意义上,数学学习就是通过方法学习,从而达到明白道理的目的。只有这样,才能使读者得到思想上的升华,对所学知识能够举一反三,运用自如。为达到此目的,本教材每章都配备了较多的练习题,其中既有不少的基本练习题,也包括了一些富有启发性的题目,读者可根据自己的实际情况灵活选用。另外,对于一些必要的证明,本书也不追求完备,以避免使用过多的数学知识和一些特殊的计算技巧。这样处理使得本教材篇幅适中,内容充实,且便于掌握和应用。对于编者认为重要的内容,例如变分法和偏微分方程数值方法等,由于学时有限,本书未曾涉及。但这两部分内容独立性强,如读者需进一步学习,可在参考文献中找到所需要的参考书目。

由于求解偏微分方程本质上是利用微分运算的逆运算——积分法,故定解问题解的表达式将不可避免地以无穷级数或含参变量积分形式给出。这样就使得解的表达式显得冗长,有些公式看起来还很繁杂。编者建议:读者在学习时应把主要精力放在对基本理论和方法的理解、应用以及对一些公式的推导思路上。通过认真听课、看书和做适量的习题,做到能比较熟练地应用基本理论和方法,或者通过查阅各种公式能独立地解决某些具体问题就可以了。要从繁杂的公式和过量的重复性练习题中解放出来,透过现象抓本质,真正掌握和学到那些最基

本的知识和方法,并深切领会数学在解决实际问题时所发挥出的巨大作用,提高对数学课程学习的积极性,及分析和解决实际问题的能力。

本书由七章组成,主要介绍来自物理学中三类典型方程支配的定解问题的求解思想和方法。第1章包括数学模型的建立、叠加原理、齐次化原理和方程的化简等。其中方程和边界条件的导出既是重点也是难点,而叠加原理的应用则贯穿着整个教材,是求解偏微分方程的理论基础。建议读者要认真学习这些内容,为后面章节的学习打下坚实的基础。第2章介绍分离变量法,首先通过弦振动问题介绍分离变量法的主要思想和求解步骤,然后给出大量例子讲解分离变量法的各种应用。第3章和第7章与第2章的内容相似,也是介绍分离变量法,区别仅在于特征值问题的求解要用到两类特殊函数。这两章学习的重点是两类特殊函数的定义和基本性质。由于这两类函数均是以无穷级数的形式给出的,表示式显得稍微复杂一些,读者需耐心地学习这一部分内容,有意识地培养自己的数学运算能力和韧性。第4章介绍求解偏微分方程的积分变换法,它是分离变量法的推广,除可用于求解偏微分方程一些定解问题外,现今在自然科学的其他领域也有广泛的应用。在第5章中简单介绍格林函数法,它在电磁学理论和应用研究中被广泛使用,特别是在偏微分方程理论研究中起着重要的作用。第6章介绍特征线法,它是求解一阶方程的基本方法,在以往的大多数数学物理方程教材中很少涉及到这一内容。以往的数学物理方程教材主要介绍三类典型方程定解问题的求解,而这三类方程都是二阶方程,对一阶方程几乎没有涉及,内容上显得有些欠缺。更主要的是三类典型方程的求解本质上都是随着对拉普拉斯算子的不断研究而展开的,而许多一阶方程都与另一类一阶微分算子有关,这类一阶算子是伴随着偏微分方程的产生而出现的,在偏微分方程理论和应用研究中发挥着越来越大的作用。现今的一些学者甚至认为,这类一阶微分算子是仅次于拉普拉斯算子的一类具有广泛应用的算子。基于以上的考虑,本教材增加了特征线法这一部分内容,以作为内容和方法上的互补。

本书可作为非数学类理工科各专业本科教材使用,同时也希望本教材能够帮助教师灵活地组织自己的课堂教学内容。根据编者以往的教学经历,除去打\*号的选学内容外,各章的授课学时可分别安排为:第1章和第3章为8学时,第4章为4学时,其余各章均为6学时。

编者十多年来曾数次为西安交通大学非数学类理工专业的学生讲授“数学物理方程”课程。本教材是在编者总结多年从事本课程教学经验和从事数学理论和应用研究体会的基础上编著而成的。本书的写作主要参考了本书参考文献中所列的众多书目,在此,谨向各书的作者们表示诚挚的谢意。本书的写作得到了西安交通大学教务处和西安交通大学理学院“大学数学中心”的资助,对此,编者也深表感谢。

西安交通大学理学院王绵森教授审阅了本书初稿并提出许多宝贵意见。西安交通大学理学院李惜雯教授在本书作为讲义试用期间,对本书做了认真地审阅并提出了许多宝贵建议。在此,编者对两位老师表示衷心的感谢。同时,非常感谢李田老师为本书提供了部分习题解答。西安交通大学出版社李慧娜编辑对本书的出版甚为关注,并提出了具体的指导和建议,对此,编者表示衷心的感谢。

限于作者的学识与水平,书中错误和不妥之处恐在所难免,诚请读者批评指正。

西安交通大学理学院 申建中 刘峰

2010.5.20

# 目 录

<b>第 1 章 数学建模和基本原理介绍</b> .....	(1)
1.1 数学模型的建立 .....	(1)
1.1.1 弦振动方程和定解条件 .....	(1)
1.1.2 热传导方程和定解条件 .....	(4)
1.1.3 泊松方程和定解条件 .....	(8)
1.2 定解问题的适定性 .....	(8)
1.2.1 一些基本概念 .....	(8)
1.2.2 适定性概念.....	(10)
1.3 叠加原理.....	(11)
1.3.1 叠加原理.....	(11)
1.3.2 叠加原理的应用.....	(14)
1.4* 齐次化原理 .....	(16)
1.4.1 由含参变量积分或无穷级数表示的变换.....	(16)
1.4.2 常微分方程中的齐次化原理.....	(19)
1.4.3 偏微分方程中的齐次化原理.....	(23)
1.5* 二阶线性方程分类和化简 .....	(24)
1.5.1 二阶偏微分方程的分类.....	(24)
1.5.2 两个自变量二阶偏微分方程的化简.....	(26)
习题 1 .....	(29)
<b>第 2 章 分离变量法</b> .....	(34)
2.1 特征值问题.....	(34)
2.1.1 矩阵特征值问题.....	(34)
2.1.2 一个二阶线性微分算子的特征值问题.....	(35)
2.2 分离变量法.....	(38)
2.2.1 弦振动方程定解问题.....	(38)
2.2.2 热传导方程定解问题.....	(43)
2.2.3 平面上位势方程边值问题.....	(45)
习题 2 .....	(49)
<b>第 3 章 贝塞尔函数</b> .....	(53)
3.1* 二阶线性常微分方程的幂级数解法 .....	(53)
3.1.1 常系数线性方程的基解组.....	(53)

3.1.2	变系数线性方程的幂级数解法	(54)
3.2	贝塞尔函数	(57)
3.2.1	$\Gamma$ 函数	(57)
3.2.2	贝塞尔方程和贝塞尔函数	(59)
3.2.3	贝塞尔函数的性质	(61)
3.2.4	贝塞尔方程的特征值问题	(63)
3.2.5	圆域上拉普拉斯算子的特征值问题	(67)
3.2.6	一些例子	(67)
3.3	多个自变量分离变量法举例	(70)
3.3.1	矩形域上定解问题	(70)
3.3.2	圆柱体或圆域上定解问题	(72)
习题 3		(76)
<b>第 4 章</b>	<b>积分变换法</b>	(79)
4.1	热传导方程柯西问题	(79)
4.1.1	一维热传导方程柯西问题	(79)
4.1.2*	二维热传导方程柯西问题	(82)
4.2	波动方程柯西问题	(83)
4.2.1	一维波动方程柯西问题	(83)
4.2.2*	二维和三维波动方程柯西问题	(85)
4.2.3*	解的物理意义	(88)
4.3	积分变换法举例	(89)
习题 4		(92)
<b>第 5 章</b>	<b>格林函数法</b>	(95)
5.1	格林公式	(95)
5.2	拉普拉斯方程基本解和格林函数	(97)
5.2.1	基本解	(97)
5.2.2	格林函数	(98)
5.3	半空间及圆域上的狄利克雷问题	(99)
5.3.1	半空间上狄利克雷问题	(99)
5.3.2	圆域上狄利克雷问题	(100)
5.4*	一维热传导方程和波动方程半无界问题	(101)
5.4.1	一维热传导方程半无界问题	(101)
5.4.2	一维波动方程半无界问题	(102)
习题 5		(103)
<b>第 6 章</b>	<b>特征线法</b>	(107)
6.1	一阶偏微分方程特征线法	(107)
6.1.1	特征线法	(107)
6.1.2*	特征线法的应用举例	(111)

6.1.2.1 交通流问题 .....	(111)
6.1.2.2 人口发展方程 .....	(113)
6.2 一维波动方程的特征线法 .....	(115)
习题 6 .....	(118)
<b>第 7 章 勒让德多项式</b> .....	(120)
7.1 勒让德多项式 .....	(120)
7.1.1 勒让德方程及勒让德多项式 .....	(120)
7.1.2 勒让德多项式的生成函数和递推公式 .....	(122)
7.1.3 勒让德多项式的微分表示形式 .....	(124)
7.1.4 勒让德方程特征值问题 .....	(126)
7.2* 球面调和函数和球形贝塞尔函数 .....	(127)
7.2.1 拉普拉斯算子的其他表示形式 .....	(127)
7.2.2 球面调和函数(与 $\theta$ 无关) .....	(128)
7.2.3 球面调和函数(与 $\theta$ 有关) .....	(132)
7.2.4 球形贝塞尔函数 .....	(134)
习题 7 .....	(136)
<b>附录 1 测验题</b> .....	(138)
<b>附录 2 部分习题答案,提示或解答</b> .....	(140)
<b>附录 3 参考文献</b> .....	(170)



# 第 1 章 数学建模及基本原理介绍

用数学理论和方法研究实际问题时,要建立合理的数学模型。在很多情况下,所建立的模型多为偏微分方程的某种定解问题。本章将对几个典型的实际问题进行分析,建立起相应的数学模型。并结合这些模型,介绍本门课程的一些主要数学概念及研究此类问题的一些基本思想和方法。

## 1.1 数学模型的建立

微分方程本质上是函数的某种局部平衡关系,其中含有该函数导数。在初等数学中我们知道,含有未知数的等式叫方程。而建立方程的过程主要有三步:先设所求解的量为未知数  $x$ , 然后找出所研究问题满足的等量关系式,最后利用一些基本的关系式将等量关系式两边用已知量和未知数  $x$  表示即成。本节我们用类似过程,导出几个来自物理学领域的实际问题所满足的微分方程和定解条件。除用到几个基本的物理公式外,主要是利用高等数学中的“微元法”思想。

### 1.1.1 弦振动方程和定解条件

#### 物理模型

一长为  $l$  的柔软、均匀细弦,拉紧之后,让它离开平衡位置在垂直于弦线的外力作用下作微小横振动,求弦线上任一点在任一时刻的位移。

在这里,弦线“充分柔软”的假设是指当它发生变形时只抗伸长而不抗弯曲,即只考虑弦线上不同部分之间张力的相互作用,而对弦线反抗弯曲所产生的力矩忽略不计。而“均匀”的含义是弦线的线密度为常数。所谓“横振动”,是指弦的运动发生在同一平面内,且弦线上各点位移与平衡位置垂直。

#### 导出方程

以弦线所处的平衡位置为  $x$  轴,垂直于弦线且通过弦线的一个端点的直线为  $u$  轴建立坐标系(见图 1.1)。

以  $u(x, t)$  表示在时刻  $t$  弦线横坐标为  $x$  的点离开平衡位置的位移。

设  $\rho$  为弦的线密度(kg/m),  $f_0$  为作用在弦线上且垂直于平衡位置的强迫力密度(N/m)。任取一小段弦线,不包括两个端点,如图 1.1 中所示。

其中  $T_1$  和  $T_2$  分别是弦线在两端所受到的张力,即其余部分弦线对该小段弦线的作用力,  $\alpha_1$  为  $T_1$  与水平方向的夹角,  $\alpha_2$  为  $T_2$  与水平方向的夹角。将所取小段弦线

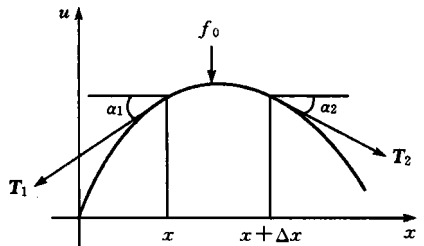


图 1.1

近似视为质点,由牛顿第二定律得

$$F = ma \quad (1.1.1)$$

式(1.1.1)是弦线运动所服从的物理定律,数学上即是等量关系式。 $F$ 为该段弦线所受垂直于平衡位置,即 $u$ 轴方向的合外力。

对(1.1.1)中各项分别计算并作简化处理如下。首先易见 $F$ 包含三部分:

$$\begin{aligned} F &= T_1 \text{ 在 } u \text{ 轴方向的分量} + T_2 \text{ 在 } u \text{ 轴方向的分量} + \text{强迫外力} \\ &= F_1 + F_2 + F_3 \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

设 $i_u$ 为 $u$ 轴正向的单位向量,利用向量的点乘运算可得

$$\begin{aligned} F_1 &= T_1 \cdot i_u = |T_1| \cos(T_1, i_u) = |T_1| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right) \\ &= -|T_1| \sin\alpha_1 \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

$$\begin{aligned} F_2 &= T_2 \cdot i_u = |T_2| \cos(T_2, i_u) = |T_2| \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_2\right) \\ &= -|T_2| \sin\alpha_2 \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

由于弦线的弧微分为 $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx$ ,故有

$$F_3 = \int_x^{x+\Delta x} f_0(x, t) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx \quad (1.1.5)$$

弦线作微小横振动,所以 $\alpha_1, \alpha_2$ 充分小,因此有 $\sin\alpha_1 \sim \tan\alpha_1, \sin\alpha_2 \sim \tan\alpha_2, \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + o\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\right) \approx 1$ 。由于假设弦线是均匀、柔软的,可认为弦线每点处张力 $T(x)$ 的方向为弦线的切线方向,弦线各点处张力的大小相等。故有 $|T_1| = |T_2| = T_0$ (常数)。利用 $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \tan\alpha_1, \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) = \tan(\pi - \alpha_2) = -\tan\alpha_2$ 和等价无穷小代换得

$$F = T_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - T_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + f_0(x, t) \Delta x \quad (1.1.6)$$

其次,将弦线近似为质点可得

$$a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\bar{x}, t), \quad m = \rho \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} dx \approx \rho \Delta x \quad (1.1.7)$$

其中 $x \in [x, x + \Delta x]$ 。将式(1.1.6)和(1.1.7)代入到(1.1.1)中便得

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\bar{x}, t) = T_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - T_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + f_0(x, t) \Delta x \quad (1.1.8)$$

假设 $u(x, t)$ 具有二阶连续偏导数,对(1.1.8)式右端前二项利用微分中值定理得

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\bar{x}, t) = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\bar{x}_2, t) \Delta x + f_0(x, t) \Delta x \quad (1.1.9)$$

其中 $\bar{x}_2 \in [x, x + \Delta x]$ 。(1.1.9)式两边同除 $\Delta x$ ,再令 $\Delta x \rightarrow 0$ 便得到 $u(x, t)$ 所满足的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (1.1.10)$$

其中 $a^2 = \frac{T_0}{\rho}, f(x, t) = \frac{f_0(x, t)}{\rho}$ 。

方程(1.1.10)刻画了柔软均匀细弦微小横振动时所服从的一般规律,即局部等量关系,人们称它为弦振动方程(vibrating string equation)。

一根弦线的特定振动情况除满足弦振动方程外,还依赖于初始时刻弦线的状态和弦线两端所受到外界的约束。因此,为了确定一个具体的弦振动,除了列出它满足的方程以外,还必须给出它适合的初始条件(initial value condition)和边界条件(boundary value condition)。

**初始条件:**分为初始位移和初始速度。即弦线在时刻  $t=0$  时的位移和速度。

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.1.11)$$

这里  $\varphi(x)$  和  $\psi(x)$  是已知函数。

**边界条件:**一般说来有三种:

(1) 已知端点的位移变化,即

$$u(0,t) = g_1(t), \quad u(l,t) = g_2(t), \quad t \geq 0 \quad (1.1.12)$$

当  $g_1(t) = g_2(t) = 0$  时,称弦线具有固定端。

(2) 已知端点所受的垂直于弦线的外力,即

$$-T_0 u_x(0,t) = g_1(t), \quad T_0 u_x(l,t) = g_2(t), \quad t \geq 0 \quad (1.1.13)$$

应当注意,在推导边界条件时,在小弦线左端,张力  $T_1$  在  $u$  轴方向的分量为  $-T_0 u_x(x,t)$ ,而在右端,张力  $T_2$  在  $u$  轴方向分量为  $T_0 u_x(x+\Delta x,t)$ 。因此,在  $x=0$  端,已知的外力  $g_1(t)$  相当于该端点的张力,即  $-T_0 u_x(0,t) = g_1(t)$ ;同理,在  $x=l$  端,边界条件为  $T_0 u_x(l,t) = g_2(t)$ 。当  $g_1(t) = g_2(t) = 0$  时,称弦线具有自由端。

(3) 端点与弹性物体连接。设弦线两端分别连接在弹性系数为  $k_1, k_2$  ( $k_1 > 0, k_2 > 0$ ) 的两个弹簧上,弹簧的长度分别为  $l_1$  和  $l_2$ 。这两个弹簧的另一端还分别连接在由函数  $Q_1(t)$  和  $Q_2(t)$  所表示的位置上(见图 1.2),这时相当于两个弹簧的下端也随时间在运动。若  $Q_1(t) = a, Q_2(t) = b$ , 此时相当于两个弹簧的下端固定。

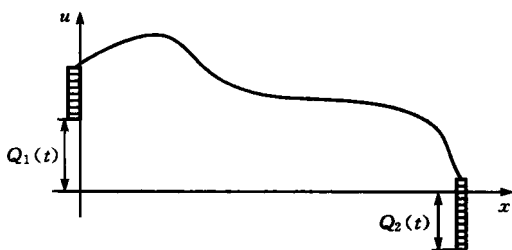


图 1.2

在任意时刻  $t, x=0$  端弹簧的实际伸缩量为  $u(0,t) - Q_1(t) - l_1$ 。由胡克(Hooke)定律可知该端的弹性恢复力(相当于张力)为  $-k_1(u(0,t) - Q_1(t) - l_1)$ 。取区间  $[0, \Delta x]$  上相应的弦线,利用和建立弦振动方程完全相同的方法可得

$$T_0 u_x(\Delta x, t) - k_1(u(0,t) - Q_1(t) - l_1) + f_0 \Delta x = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\bar{x}, t)$$

令  $\Delta x \rightarrow 0^+$  得

$$T_0 u_x(0,t) - k_1(u(0,t) - Q_1(t) - l_1) = 0, \quad t \geq 0$$

即

$$u_x(0,t) - \sigma_1 u(0,t) = g_1(t), \quad t \geq 0$$

这里  $\sigma_1 = \frac{k_1}{T_0} > 0, g_1(t) = -\sigma_1 [Q_1(t) + l_1]$ 。

类似可得在  $x=l$  端边界条件为

$$u_x(l,t) + \sigma_2 u(l,t) = g_2(t), \quad \sigma_2 = \frac{k_2}{T_0} > 0, \quad g_2(t) = \sigma_2 (Q_2(t) + l_2)$$

因此,在具有弹性支撑的边界,弦线的边界条件如下

$$x = 0 \text{ 端} \quad u_x(0, t) - \sigma_1 u(0, t) = g_1(t), \quad t \geq 0 \quad (1.1.14)$$

$$x = l \text{ 端} \quad u_x(l, t) + \sigma_2 u(l, t) = g_2(t), \quad t \geq 0 \quad (1.1.15)$$

初始条件和边界条件通常称为定解条件。一个微分方程连同它相应的定解条件组成一个定解问题。当考虑的弦线比较长时,一般认为弦长是无穷大。这时定解条件中就没有边界条件而只有初始条件,这也是一个定解问题。以下两个问题

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(0, t) = g_1(t), \quad u(l, t) = g_2(t), & t \geq 0 \end{cases} \quad (1.1.16)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases} \quad (1.1.17)$$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(0, t) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (1.1.18)$$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(0, t) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (1.1.19)$$

都是弦振动方程的定解问题。在定解问题(1.1.16)—(1.1.18)中,既含有初始条件又含有边界条件,通常称为弦振动方程的混合问题。而在定解问题(1.1.19)—(1.1.20)中只含有初始条件,称为弦振动方程的初值问题(或柯西(Cauchy)问题)。

**注1** 如果考虑膜的振动或者是声波在空气中的传播,利用和弦振动方程类似的过程可以导出膜振动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t)$$

而声波在空气中传播所满足的方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t)$$

这些方程统称为波动方程(wave equation)。

## 1.1.2 热传导方程和定解条件

### 物理模型

在三维空间中考虑一个均匀、各向同性的导热体,假定它内部有热源,并且与周围介质有热交换,求物体内部温度的分布。

这里“均匀”是指导热体的密度为常数,“各向同性”是指导热体内任一点处在各个方向上的传热特性相同。如导热体是由同一种金属构成的,就认为是具有各向同性性。

### 导出方程

设导热体在空间占据的区域为  $\Omega$  (如图 1.3 所示),边界记为  $\partial\Omega$ 。导热体的密度为  $\rho(\text{kg}/\text{m}^3)$ ,比热容为  $c(\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K}))$ ,热源强度为  $f_0(x, y, z, t)(\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{s}))$ 。以  $u(x, y, z, t)(\text{K})$  表示导热体在时刻  $t$  点  $(x, y, z) \in \Omega$  处的温度。

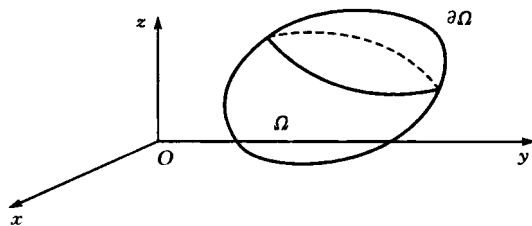


图 1.3

任取一点  $(x, y, z) \in \Omega$ , 并取该点的一个充分小邻域  $G \subset \Omega$ ,  $G$  的边界为  $\partial G$ 。在充分小的时段  $[t_1, t_2]$  上,区域  $G$  的热量变化满足下面的等量关系式(1.1.21):

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{热量 } Q_2 \\ t = t_2 \end{array}} - \boxed{\begin{array}{c} \text{热量 } Q_1 \\ t = t_1 \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} \text{热源生成热量 } W \\ t_1 \leq t \leq t_2 \end{array}} + \boxed{\begin{array}{c} \text{通过边界 } \partial G \text{ 流入量 } \Phi \\ t_1 \leq t \leq t_2 \end{array}} \quad (1.1.21)$$

此式即为热力学第二定律的积分形式。完全类似于弦振动方程的推导过程,下面分别计算并简化关系式(1.1.21)中各项。

从物理学中我们知道,  $Q = mcu$ 。由于区域  $G$  充分小,时段  $[t_1, t_2]$  也充分小,故可视  $u$  为常数,因而有

$$Q_2 = \rho \Delta x u(x_1, y_1, z_1, t_2) \quad (1.1.22)$$

$$Q_1 = \rho \Delta x u(x_1, y_1, z_1, t_1) \quad (1.1.23)$$

$$W = f_0(x_1, y_1, z_1, \bar{t}_1) \rho \Delta v \Delta t \quad (1.1.24)$$

其中  $(x_1, y_1, z_1) \in G, \bar{t}_1 \in [t_1, t_2], \Delta v$  为区域  $G$  的体积,  $\Delta t = t_2 - t_1$ 。

为计算边界流入热量  $\Phi$ , 要利用傅里叶(Fourier)热定律: 在一定条件下, 导热体内热流量  $q$  ( $J/(m^2 \cdot s)$ ) 与温度的梯度成正比, 即  $q = -k(x, y, z) \nabla u$ , 其中  $k(x, y, z)$  为导热体内的导热系数, 与介质的性态有关; 负号表示热量从温度高处向温度低处流动。由于我们考虑的是均匀、各向同性的导热体, 故  $\rho(x, y, z) = \rho, k(x, y, z) = k$  均为正常数。

利用高等数学中的通量计算公式可得

$$\Phi = \iint_{\partial G} q \cdot (-n) ds \Delta t \quad (1.1.25)$$

这里  $n$  为  $\partial G$  的单位外法向量,  $-n$  表示计算通过边界  $\partial G$  的流入热量。

假设  $u$  对空间变量具有二阶连续偏导数, 对时间变量具有一阶连续偏导数, 利用高斯公式可得

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{\partial G} q \cdot (-n) ds \Delta t = \iint_{\partial G} k \nabla u \cdot n ds \Delta t \\ &= \iint_{\partial G} k \frac{\partial u}{\partial n} ds \Delta t = k \iiint_G \Delta u dv \Delta t \\ &= k \Delta u(x_2, y_2, z_2, \bar{t}_1) \Delta v \Delta t \end{aligned} \quad (1.1.26)$$

这里  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, (x_2, y_2, z_2) \in \bar{G}$ 。

将式(1.1.22)–(1.1.26)代入到(1.1.21)中并对等式左端利用微分中值定理可得

$$\rho c u_t(x_1, y_1, z_1, \bar{t}_2) \Delta v \Delta t = k \Delta u(x_2, y_2, z_2, \bar{t}_1) \cdot \Delta v \Delta t + f_0(x_1, y_1, z_1, \bar{t}_1) \rho \Delta v \Delta t$$

上式两边同除以  $\Delta v \Delta t$ , 并令  $\Delta v \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$  得

$$\begin{aligned} \rho c u_t(x, y, z, t_1) &= k \Delta u(x, y, z, t_1) + \rho f_0(x, y, z, t_1) \\ u_t(x, y, z, t_1) &= a^2 \Delta u(x, y, z, t_1) + f(x, y, z, t_1) \end{aligned}$$

由于  $t_1$  的任意性可得

$$u_t(x, y, z, t) = a^2 \Delta u(x, y, z, t) + f(x, y, z, t) \quad (1.1.27)$$

或简写为

$$u_t = a^2 \Delta u + f \quad (1.1.28)$$

其中  $a^2 = \frac{k}{\rho c} > 0, f(x, y, z, t) = \frac{1}{c} f_0(x, y, z, t)$ 。

方程(1.1.28)刻画了导热体内温度分布和变化所服从的一般规律, 人们称其为三维热传导方程(heat equation)。

**注2** 如果读者对高等数学中的微积分运算掌握比较熟练,式(1.1.21)中各项也可以写成如下积分式

$$Q_2 = \iiint_G \rho c u \Big|_{t=t_2} dv, \quad Q_1 = \iiint_G \rho c u \Big|_{t=t_1} dv$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_G \rho f_0 dv, \quad \Phi = \int_{t_1}^{t_2} \iint_{\partial G} \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n}) ds$$

将上面各项代入到式(1.1.21)中,并用前面类似方法可导出式(1.1.28)。

**注3** 方程(1.1.28)虽然通常称为热传导方程,但绝不是仅用来表示热传导现象的。自然界中还有很多现象可用方程(1.1.28)来刻画,如分子在介质(如空气、水……)中的扩散等,因此也称(1.1.28)为扩散方程。

**注4** 如果考虑侧面绝热的均匀细杆或均匀薄板的温度分布,可分别得到一维热传导方程和二维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t)$$

为了具体确定某特定物体内部的温度分布,还需要知道该物体内部的初始温度分布以及在物体的边界所受到的约束或受到周围介质的影响。

**初始条件:**导热体内在初始时刻  $t=0$  的温度分布,即

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \bar{\Omega} \quad (1.1.29)$$

**边界条件:**通常为三类(记  $\Sigma = \partial\Omega \times [0, \infty)$ ):

(1) 已知边界  $\partial\Omega$  上的温度分布,即

$$u \Big|_{\Sigma} = g(x, y, z, t) \quad (1.1.30)$$

(2) 已知通过边界  $\partial\Omega$  的热流量,即

$$k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = g(x, y, z, t) \quad (1.1.31)$$

$g \geq 0$  表示流入,  $g \leq 0$  表示流出,  $g=0$  表示在边界绝热。

(3) 已知通过边界  $\partial\Omega$  与周围介质有热交换。设  $u_1(x, y, z, t)$  为  $\partial\Omega$  处介质的温度,  $k_1$  为两种介质之间的热交换系数 ( $k_1 > 0$ )。根据牛顿定律(热传导的另一实验定律),从物体内部流到外部的热流量与两介质间的温差成正比,即有  $q_1 = k_1(u - u_1)\mathbf{n}$ , 其中  $\mathbf{n}$  为  $\partial\Omega$  的单位外法向量。为了推导边界条件,完全类似于热传导方程的推导,任取一充分小区域  $G$ (如图 1.4 所示),边界为  $\partial G = \sigma_1 \cup \sigma_2$ ,  $\sigma_1 \subset \partial\Omega$ ,  $\sigma_2 \subset \Omega$ ,  $\mathbf{n}_2$  为  $\sigma_2$  上的单位法向量。

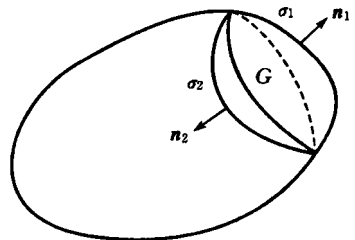


图 1.4

在  $G$  上等量关系式(1.1.21)成立,其中  $Q_2$ 、 $Q_1$  和  $W$  如注2中的各式,而  $\Phi$  分为两部分,一部分是通过  $G$  的边界  $\sigma_2$  由导热体流入的热量,另一部分是经  $\sigma_1$  由周围介质流入的热量,故有

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\sigma_1} (\mathbf{q}_1) \cdot (-\mathbf{n}_1) ds + \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\sigma_2} (\mathbf{q}) \cdot (-\mathbf{n}_2) ds \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\sigma_1} (-k_1) \cdot (u - u_1) ds + \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\sigma_2} k \frac{\partial u}{\partial n_2} ds\end{aligned}$$

将  $Q_1, Q_2, W$  和  $\Phi$  代入到式(1.1.21)中得

$$\iiint_G \rho c (u|_{t=t_2} - u|_{t=t_1}) dv = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_G \rho f_0 dv + \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\sigma_1} k_1 (u_1 - u) ds + \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\sigma_2} k \frac{\partial u}{\partial n_2} ds$$

利用  $u|_{t=t_2} - u|_{t=t_1} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt$ , 上式成为

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_G \rho c \frac{\partial u}{\partial t} dv = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_G \rho f_0 dv + \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \iint_{\sigma_1} k_1 (u_1 - u) ds + \iint_{\sigma_2} k \frac{\partial u}{\partial n_2} ds \right]$$

由  $t_1, t_2$  的任意性可得

$$\iiint_G \rho c \frac{\partial u}{\partial t} dv = \iiint_G \rho f_0 dv + \iint_{\sigma_1} k_1 (u_1 - u) ds + \iint_{\sigma_2} k \frac{\partial u}{\partial n_2} ds \quad (1.1.32)$$

令  $\sigma_2$  趋于  $\sigma_1$ , 此时  $n_2$  趋于  $-n_1 = -n$ , 且区域  $G$  的体积趋于零, 式(1.1.32)中三重积分趋于零, 故有

$$\iint_{\sigma_1} \left[ k \frac{\partial u}{\partial n} - k_1 (u_1 - u) \right] ds = 0$$

由  $\sigma_1 \subset \partial\Omega$  的任意性可得

$$\begin{aligned}k \frac{\partial u}{\partial n} - k_1 (u_1 - u) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u &= g, \quad (x, y, z, t) \in \Sigma\end{aligned} \quad (1.1.33)$$

其中  $\sigma = \frac{k_1}{k} > 0, g = \sigma u_1$ 。(1.1.33)式称为热传导方程的第三类边界条件, 有时也记为  $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right) \Big|_{\Sigma} = g$ , 其物理意义为导热体在边界上与周围介质按牛顿定律进行自然的热交换。

**注5** 前面比较详细地给出了边界条件(1.1.14)和(1.1.33)的推导过程, 主要目的是告诉读者边界条件的导出和方程的导出过程是基本相同的。唯一的区别在于在导出方程时, 在  $(a, b)$  或  $\Omega$  内取小区间或小区域; 而在推导边界条件时, 要取包含区间端点的小区间或包含边界的小区域。

**注6** (1.1.33)式也可以利用热流量公式直接给出。在导热体边界内部和外部的热流量分别为  $q = -k\nabla u$  和  $q_1 = k_1(u - u_1)n_1$ , 在边界上二者应相等, 即有

$$q_1 \cdot n = q \cdot n$$

或

$$k_1 (u - u_1) = -k \frac{\partial u}{\partial n} \quad (1.1.34)$$

(1.1.34)式即为(1.1.33)式。

**注7** 如果导热体体积充分大, 可认为导热体体积为无穷大, 这时定解条件就只有初始条件而无边界条件, 此类问题通常称为柯西问题。

### 1.1.3 泊松方程和定解条件

在上面研究导热体的温度分布问题中,如果  $f$  和边界条件中的  $g$  与  $t$  无关,则经过相当长时间后,区域  $G$  内各点温度趋于定值,因而有  $u_t = 0$ 。由(1.1.28)式得

$$-\Delta u = \frac{1}{a^2} f \quad (1.1.35)$$

(1.1.35)式称为泊松(Poisson)方程,当  $f \equiv 0$  时称为拉普拉斯(Laplace)方程。由于  $u, f$  与  $t$  无关,所以泊松方程的定解条件只有边界条件而无初始条件。下面给出泊松方程的三个定解问题。

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & (x, y, z) \in \Omega \\ u = \varphi, & (x, y, z) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1.36)$$

其中  $f(x, y, z), \varphi(x, y, z)$  为已知函数。(1.1.36)通常称为狄利克雷(Dirichlet)问题。

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & (x, y, z) \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi, & (x, y, z) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1.37)$$

式(1.1.37)称为诺伊曼(Neumann)问题。

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & (x, y, z) \in \Omega \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right) = \varphi, & (x, y, z) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1.38)$$

式(1.1.38)称为泊松方程的第三边值问题。

在上面的三个定解问题中,如果  $f(x, y, z) = 0$ ,则称  $u$  为区域  $\Omega$  内的调和函数。调和函数在偏微分方程的理论和应用研究中起着重要的作用,在后面的章节中将多次遇到这类函数。

**注8** 考虑带有稳定电流的导体,如果内部无电流源,可以证明导体内的电位势满足拉普拉斯方程。类似地对带有稳定电荷的介质,稳定电荷产生的静电势也满足泊松方程。因而拉普拉斯方程和泊松方程有时也称为位势方程。

## 1.2 定解问题的适定性

### 1.2.1 一些基本概念

凡含有未知函数以及未知函数偏导数的等式称为偏微分方程。方程中最高阶导数的阶数称为偏微分方程的阶数。如果方程关于未知函数及它的偏导数是线性的(一次的),称方程为线性偏微分方程,否则称为非线性偏微分方程。方程中不含有未知函数或它的偏导数的项称为自由项。自由项为零的方程称为齐次偏微分方程,否则称为非齐次偏微分方程。例如下面各方程均为偏微分方程。

$$x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} + \frac{1}{2} u_y = x^2 y \quad (1.2.1)$$

$$xu_t - 2u_{xx} + e^x u = 3x \quad (1.2.2)$$

$$\cos x u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad (1.2.3)$$

$$u_x u_y + 2u = 0 \quad (1.2.4)$$



$$u_{xxxx} + u_{yyyy} + \cos u = u_x^2 + xy \quad (1.2.5)$$

其中(1.2.1)–(1.2.3)是二阶线性偏微分方程,(1.2.1)、(1.2.2)是非齐次的,而(1.2.3)是齐次的。(1.2.4)是一阶非线性齐次方程,这是由于  $u_x u_y$  这一项是二次项。(1.2.5)是四阶非线性非齐次方程,非线性产生于  $\cos u$  和  $u_x^2$  两项,自由项为  $xy$ 。

1.1 节中导出的三类方程均为二阶线性偏微分方程。

如果在一个定解问题中,方程和定解条件关于未知函数及它的偏导数全是线性的,称该问题为线性定解问题,否则称为非线性定解问题。在1.1节建立的定解问题中,它们都是线性定解问题。考虑下面定解问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x, y, z, t), & (x, y, z) \in \Omega, \quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = u^2, & (x, y, z) \in \partial\Omega, \quad t \geq 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), & (x, y, z) \in \bar{\Omega} \end{cases}$$

其中方程是线性偏微分方程,但边界条件为非线性的,所以该问题是一个非线性定解问题。

一般来讲,研究线性问题比较容易,非线性问题的研究要困难许多。本书主要讨论线性定解问题。

如果一个函数在自变量的某区域内具有某偏微分方程中所有的各阶连续偏导数,并且将它代入该方程时使方程成为恒等式,则称此函数为该方程的古典解。同理,对一个定解问题,如果一个函数是该定解问题中偏微分方程的古典解,并且满足定解条件,则称此函数为定解问题的古典解。

**例 1.1** 设  $F(x)$ 、 $G(x)$  在直线  $\mathbf{R}$  上具有二阶连续导数,  $u_1(x, t) = F(x + at)$ ,  $u_2(x, t) = G(x - at)$ , 验证  $u_1$  和  $u_2$  在  $xOt$  平面上都是  $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$  的古典解。

**解** 直接计算可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= F'(x + at), & \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} &= F''(x + at) \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} &= F'(x + at)a, & \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= F''(x + at)a^2 = a^2 F''(x + at) \end{aligned}$$

代  $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$  到方程中即得结论成立。类似可证  $u_2$  也是方程的古典解。

**例 1.2** (1) 记  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ ,  $u = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$ , 验证  $u$  在  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x_0, y_0)\}$  上是方程  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  的一个古典解。

(2) 记  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ ,  $u = \frac{1}{4\pi r}$ , 验证  $u$  在  $\mathbf{R}^3 \setminus \{(x_0, y_0, z_0)\}$  上是方程  $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$  的一个古典解。

**解** (1)  $u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} = -\frac{1}{2\pi} \ln r = -\frac{1}{4\pi} \ln r^2$ , 直接计算可得

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{(x - x_0)^2}{\pi r^4} - \frac{1}{2\pi r^2}, & u_{yy} &= \frac{(y - y_0)^2}{\pi r^4} - \frac{1}{2\pi r^2} \\ u_{xx} + u_{yy} &= \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{\pi r^4} - \frac{1}{\pi r^2} = \frac{r^2}{\pi r^4} - \frac{1}{\pi r^2} = 0 \end{aligned}$$

(2) 类似可验证。