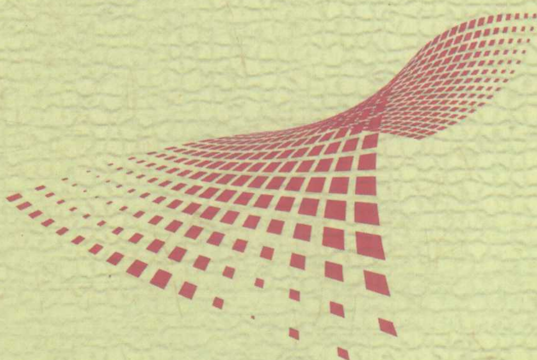
高等院校“十二五”应用型人才培养规划教材
大学数学实践教学创新系列教材

线性代数

LINEAR ALGEBRA

主编　谭玉明
副主编　王圣祥 黄述亮
主审　北京航空航天大学　李尚志 教授



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高等院校“十二五”应用型人才培养规划教材
大学数学实践教学创新系列教材

线性代数

主　编　谭玉明

副主编　王圣祥　黄述亮

主　审　北京航空航天大学 李尚志 教授

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

内 容 简 介

本书是根据教育部对工科线性代数的教学基本要求和经济管理类数学基础课程教学基本要求,结合作者在线性代数教学改革实践中的经验与体会,并参考了硕士研究生入学考试大纲编写而成.内容包括矩阵和行列式、线性方程组和向量、矩阵的相似对角形和二次型等基础知识.

本书精简整合了线性代数的内容,以矩阵为主线贯穿全书,突出了矩阵的初等变换和初等矩阵的作用.将行列式作为矩阵的行列式,与矩阵合并在一起讲授,讨论矩阵的初等变换对其行列式的影响;将线性方程组作为矩阵方程来讨论,用增广矩阵行等价刻画方程组的同解;将列向量的线性关系用矩阵乘积表示,从而使向量的线性关系与线性方程组解的存在性及其解的表达问题紧密地联系在一起;用矩阵的相似与合同对角形问题,把特征值与特征向量、二次型的标准形问题联系起来.

本书内容系统、重点突出、由浅入深、通俗易懂,充分体现教学的适用性.每章后均配有较多的习题,分为A、B两组,其中A组属基础题,B组属综合题.书末附有习题的答案和提示.

本书教学时数约36学时,可供高等院校非数学类专业作为工程数学和经济数学的"线性代数"教材,也可供科技工作者、自学者和准备考研者参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/谭玉明主编. —杭州:浙江大学出版社,2013.6

ISBN 978-7-308-11649-7

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①谭… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第124379号

线性代数

谭玉明 主编

责任编辑 邹小宁
文字编辑 王珊珊
封面设计 东方慧文
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路148号 邮政编码 310007)
(网址: http://www.zjupress.com)
排　　版 东方慧文
印　　刷 南京文博印刷厂
开　　本 710mm×960mm 1/16
印　　张 10
字　　数 208千
版 印 次 2013年6月第1版 2013年6月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-11649-7
定　　价 29.80元

前　言

自从高等教育由精英教育转向大众教育以来，许多一般本科院校将目标定位于培养应用型人才，学生学习数学的目的是应用数学，而不是一味追求理论的系统和完整. 而在实际教学中，我们往往还总是舍不得放弃那些繁杂艰深的理论推导，唯恐知识不系统教学不严谨，而影响数学的“形象”，这种观念长期束缚着我们. 另一方面，学生在学习线性代数时，常常感到概念抽象难理解，证明方法灵活不易掌握，计算过程繁琐而出错，这些都是长期困扰学生学习的实际问题.

在整个线性代数教学过程中，矩阵这一工具具有独特的作用，矩阵的初等变换简单直观，而且具有普遍意义. 特别是矩阵的初等行变换更具有极其重要的作用. 掌握了矩阵的初等行变换，线性代数学习上的许多问题就可以迎刃而解.

基于以上认识，本书精简整合了线性代数的内容，以矩阵作为主线贯穿全书，突出了矩阵的初等行变换和初等矩阵的作用；将行列式作为矩阵的行列式，与矩阵合并在一起讲授，讨论矩阵的初等变换对其行列式性质的影响；将线性方程组作为矩阵方程来讨论，用增广矩阵行等价刻画方程组的同解；将列向量的线性关系用分块矩阵乘积表示，从而使向量的线性关系与线性方程组解的存在性及其解的表达问题紧密地联系在一起；用矩阵的相似与合同对角形问题，把特征值与特征向量、二次型的标准形问题联系起来.

在定理教学上，略去了一些繁复的证明，代之以对理论的诠释和直观说明，通过较多的典型例题使学生熟悉理论，掌握应用理论解决问题的方法和技巧.

内容编排上注重由浅入深，强调基本概念及其之间的本质联系，强调数学的基本思想、基本方法，将抽象内容与具体例子有机结合，并注意线性代数课程的几何背景，充分体现教材的教学适用性.

本书有较多的习题，意在贯彻“精讲多练”的教学方法. 即教学内容简洁明了，通俗易懂，方便学习；加强习题训练，掌握解题方法和技巧，增强思维能力. 习题分为 A、B 两个层次，A 层次题属于基本要求，多数学生应当达到. B 层次题属较高要求，对于部分学有余力，并准备进一步深造的学生可以尝试解决这类问题. 书末附有每题的答案或提示，便于学生自学.

本书教学参考时数约为 36 学时，可供高等院校非数学类专业作为工程数学和经济数学的“线性代数”教材，也可供科技工作者、自学者和考研者参考. 对经济管理类学生，或硕士研究生入学考试考数学二和数学三的读者，打*号的内容不作要求. 理工类学生，或硕士研究生入学考试考数学一的读者，需学完全书.

本书由谭玉明担任主编，王圣祥、黄述亮担任副主编，北京航空航天大学李尚

志教授担任主审，其中正文部分由谭玉明编写，第 1 章和第 4 章的习题及答案提示由王圣祥编写，第 2 章和第 3 章的习题及答案提示由黄述亮编写，全书的统稿和整理由谭玉明完成.

滁州学院教务处处长李庆宏教授、数学学院院长翟明清教授一直十分关心支持作者撰写教材，大学数学教研室的老师也对教材编写给予了很多帮助，对此我们深表感谢.

北京航空航天大学李尚志教授在百忙之中仔细阅读了书稿，并提出了宝贵的修改意见，同时也对我们出版本书给予了极大的鼓励. 为了不耽误本书的出版，李教授在国外访问期间，通过电子邮件给出版社发来了审稿意见，对此我们表示衷心感谢.

浙江大学出版社各位编辑同志的大力支持，使本书得以面世，我们也一并深表感谢.

虽然我们从事高等代数和线性代数的教学近二十年，但由于水平有限，本书不足之处在所难免，恳请读者批评指正. 若有疑问，请发邮件至：iteditor@126.com.

编　者

2013 年 4 月

目　录

第 1 章　矩阵和行列式

矩阵和行列式概念的创立和发展源于解线性方程组. 矩阵理论作为一种基本工具, 在现代数学的各个分支有着广泛的应用. 由于计算机科学的迅速发展, 使得矩阵理论和方法在科学技术和经济管理等很多领域得到重要的应用. 行列式在数学以及其他科学分支(如物理学, 力学)中也有非常广泛的应用, 是一种常用的计算工具.

在本课程中, 矩阵和行列式是研究向量的线性关系、线性方程组求解以及二次型的有力工具, 在线性代数中具有重要地位.

§1.1　矩阵及其运算

1.1.1　矩阵的概念

在科学技术和经济管理工作中存在大量与矩形数表有关的问题.

例 1.1.1　某市有 3 家企业 A_1, A_2, A_3 生产某种家电产品, 出口到 4 个国家 B_1, B_2, B_3, B_4, 那么一个出口方案就可以用一个矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

来表示, 其中 a_{ij} 表示由企业 A_i 出口到国家 B_j 的该产品的数量 $(i=1,2,3;\ j=1,2,3,4)$.

例 1.1.2　设 x_1, x_2, x_3 和 y_1, y_2, y_3 是两组变量, 它们之间的线性关系式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

称为由变量 x_1, x_2, x_3 到变量 y_1, y_2, y_3 的**线性变换**[①], 变换的系数可用矩形数表

① 一般线性变换概念可参见[1]或[2].

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{1.1.2}$$

来表示，数表(1.1.2)称为线性变换(1.1.1)的**系数矩阵**.

定义 1.1.1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 m 行 n 列**矩阵**, 简称 $m\times n$ **矩阵**. 通常用大写拉丁字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 表示, 也可记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}$ 以标明其行数和列数. 第 i 行第 j 列处的元素 a_{ij} 称为矩阵的 (i,j) **元**. 元素均为实数的矩阵称为**实矩阵**. 本书中的矩阵除特别说明外, 都指的是实矩阵, 即 $a_{ij}\in\mathbf{R}, i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$, 其中 $\mathbf{R}$ 表示实数集.

矩阵的行数和列数都等于 n 的矩阵称为 n **阶矩阵**或 n **阶方阵**. n 阶矩阵可记作

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

方阵 $\boldsymbol{A}$ 从左上角到右下角的对角线上的元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**主对角元**.

特别地, 我们把一阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{11})$ 视为数 a_{11}, 即 $\boldsymbol{A}=a_{11}$.

主对角线下侧所有元素都为零的方阵称为**上三角形矩阵**; 主对角线上侧所有元素都为零的方阵称为**下三角形矩阵**.

主对角线以外的元素全为零的方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

称为**对角形矩阵**, 记作 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

主对角元都相同的对角形矩阵称为**数量矩阵**.

特别地, 主对角元全为 1 的 n 阶对角形矩阵称为**单位矩阵**, 记作

$$E_n=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

只有一行的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, 称为**行矩阵**(也称为**行向量**); 只有一列的矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$, 称为**列矩阵**(也称为**列向量**).

元素全为零的矩阵称为**零矩阵**, $m\times n$ 零矩阵记作 $\mathbf{0}_{m\times n}$ 或 $\mathbf{0}$.

两个矩阵当行数相等且列数相等时称为**同型矩阵**.

定义 1.1.2 如果同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 的对应元素都相等, 即

$$a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ **相等**, 记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

1.1.2 矩阵的加法、减法和数与矩阵的乘法

定义 1.1.3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 为 $m\times n$ 矩阵.

(1) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相加的**和**, 记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, 规定为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&\cdots&a_{1n}+b_{1n}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&\cdots&a_{2n}+b_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}+b_{m1}&a_{m2}+b_{m2}&\cdots&a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix};$$

(2) 数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相乘的**积**, 记作 $\lambda\boldsymbol{A}$, 规定为

$$\lambda\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda a_{11}&\lambda a_{12}&\cdots&\lambda a_{1n}\\\lambda a_{21}&\lambda a_{22}&\cdots&\lambda a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\lambda a_{m1}&\lambda a_{m2}&\cdots&\lambda a_{mn}\end{pmatrix};$$

(3) 记 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})$, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相减的**差**, 记作 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$, 规定为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}.$$

注意, 只有当两个矩阵是同型矩阵时, 才能进行加法和减法运算.

不难验证矩阵加法和数乘有如下运算律:

(1) 交换律: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) 结合律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

(3) 分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$,

$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$，$\lambda,\mu$ 为任意数；

(4) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$，$\lambda,\mu$ 为任意数；

(5) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{A}$；

(6) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$.

例 1. 1. 3 设同型矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}=2(2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&2\\5&1&6\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&3\end{pmatrix},$$

求矩阵 $\boldsymbol{C}$.

解 由条件得 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}=4\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{C}$，从而有 $3\boldsymbol{C}=4\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$，所以

$$\boldsymbol{C}=\frac{1}{3}(4\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}),$$

用 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 代入得

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&-1&-2\\1&1&2\end{pmatrix}.$$

1.1.3 矩阵的乘法

在例 1. 1. 2 中给出了一个由变量 x_1,x_2,x_3 到变量 y_1,y_2,y_3 的线性变换(1. 1. 1). 现又有一个由变量 y_1,y_2,y_3 到变量 z_1,z_2 的线性变换

$$\begin{cases}z_1=b_{11}y_1+b_{12}y_2+b_{13}y_3,\\z_2=b_{21}y_1+b_{22}y_2+b_{23}y_3,\end{cases}\tag{1. 1. 3}$$

其变换矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\end{pmatrix}.\tag{1. 1. 4}$$

将式(1. 1. 1)代入式(1. 1. 3)消去 y_1,y_2,y_3，得到一个由变量 x_1,x_2,x_3 到 z_1,z_2 的线性变换

$$\begin{cases}z_1=(\sum\limits_{j=1}^{3}b_{1j}a_{j1})x_1+(\sum\limits_{j=1}^{3}b_{1j}a_{j2})x_2+(\sum\limits_{j=1}^{3}b_{1j}a_{j3})x_3,\\z_2=(\sum\limits_{j=1}^{3}b_{2j}a_{j1})x_1+(\sum\limits_{j=1}^{3}b_{2j}a_{j2})x_2+(\sum\limits_{j=1}^{3}b_{2j}a_{j3})x_3,\end{cases}\tag{1. 1. 5}$$

称线性变换(1. 1. 5)为线性变换(1. 1. 1)和(1. 1. 3)的**乘积**(**或合成**). 线性变换

(1. 1. 5) 的矩阵是

$$
C=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{3}b_{1j}a_{j1} & \sum_{j=1}^{3}b_{1j}a_{j2} & \sum_{j=1}^{3}b_{1j}a_{j3}\\ \sum_{j=1}^{3}b_{2j}a_{j1} & \sum_{j=1}^{3}b_{2j}a_{j2} & \sum_{j=1}^{3}b_{2j}a_{j3}\end{pmatrix}. \tag{1.1.6}
$$

由矩阵 (1. 1. 6) 和矩阵 (1. 1. 4) (1. 1. 2) 的元素之间的关系，我们可引入矩阵乘法的定义：

定义 1. 1. 4　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是一个 $n\times p$ 矩阵，那么规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是一个 $m\times p$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$，其中

$$
c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots m;\ j=1,2,\cdots,p),
$$

并记 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

注意，只有当左矩阵的列数等于右矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘.

乘积的 (i,j) 元是左矩阵的第 i 行元素分别与右矩阵的第 j 列对应元素的乘积之和. 如图所示：

$$
\begin{pmatrix} \\ \boxed{a_{i1}\quad a_{i2}\quad \cdots\quad a_{in}} \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \boxed{\begin{matrix} b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{matrix}} & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \\ \boxed{c_{ij}} \\ \\ \end{pmatrix}.
$$

例 1. 1. 4　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&3&-1\\2&1&0&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&1&0\\-1&1&3\\2&0&1\\1&3&4\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}9&-2&-1\\9&9&11\end{pmatrix}$，而 $\boldsymbol{BA}$ 无意义.

例 1. 1. 5　$(1,2,3)\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=(10)=10$，$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}(1,2,3)=\begin{pmatrix}3&6&9\\2&4&6\\1&2&3\end{pmatrix}$.

矩阵乘法与加法、数乘有以下运算律：

(1) 结合律：$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

(2) 分配律：$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$，

$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$；

(3) 对任意数 λ，$\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$；

(4) 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, 则 $AE_n = E_m A = A$.

证明 只证明(1), 其余由读者证明. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{jk})_{n\times p}$, $C=(c_{kl})_{p\times q}$. 令

$$U=AB=(u_{ik})_{m\times p}\ ,\ V=BC=(v_{sj})_{n\times q}\ ,$$

其中 $u_{ik}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sk}$, $v_{sj}=\sum_{k=1}^{p}b_{sk}c_{kj}$.

显然 $(AB)C, A(BC)$ 都是 $m\times q$ 矩阵, 并且 $(AB)C=UC$ 的 (i,j) 元为

$$\sum_{k=1}^{p}u_{ik}c_{kj}=\sum_{k=1}^{p}(\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sk})c_{kj}=\sum_{k=1}^{p}(\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sk}c_{kj})\ ,\ i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,q\ .$$

$A(BC)=AV$ 的 (i,j) 元为

$$\sum_{s=1}^{n}a_{is}v_{sj}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}(\sum_{k=1}^{p}b_{sk}c_{kj})=\sum_{s=1}^{n}(\sum_{k=1}^{p}a_{is}b_{sk}c_{kj})=\sum_{k=1}^{p}(\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sk}c_{kj})\ ,$$

$i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,q$.

故 $(AB)C$ 的 (i,j) 元与 $A(BC)$ 的 (i,j) 元相等, 所以 $(AB)C=A(BC)$.

由例 1.1.4 和例 1.1.5 可以看出, 矩阵乘法一般不满足交换律, 即一般地 $AB\neq BA$. 所以, 矩阵相乘分左乘和右乘, 乘积 AB 表示 A 左乘 B , 或 B 右乘 A . 由下面例子可以看出, 即使 AB 和 BA 是同型矩阵, 两者也未必相等.

例 1.1.6 设 $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$, 则 $AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}$.

此例还说明, 当 $A\neq 0$, $B\neq 0$ 时, 它们的乘积可能为 0 . 或者说, 由 $AB=0$, 不能推出 $A=0$ 或 $B=0$. 由此可知, 矩阵乘法无消去律. 即, 由 $A\neq 0$, $AB=AC$, 不能推出 $B=C$.

如果两个 n 阶矩阵 A,B 满足 $AB=BA$, 则称 A,B 是**可交换**的.

例如, 数量矩阵 λE 和同阶方阵 A 是可交换的. 即, $(\lambda E)A=A(\lambda E)=\lambda A$.

例 1.1.7 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$, 求所有与 A 可交换的矩阵.

解 设 $B=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}$ 与 A 可交换. 因 $AB=BA$ 等价于 $(A-E)B=B(A-E)$, 而

$$(A-E)B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{21}&x_{22}\\0&0\end{pmatrix};$$

$$B(A-E)=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&x_{11}\\0&x_{21}\end{pmatrix}.$$

由 $(A-E)B=B(A-E)$ 得 $x_{11}=x_{22}, x_{21}=0, x_{12}$ 为任意数. 故与 A 可交换的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & x_{11} \end{pmatrix}$$，其中 x_{11}, x_{12} 为任意数.

变量的线性变换及其乘积可以用矩阵乘积来表示. 例如，线性变换(1.1.1)和(1.1.3)可用矩阵分别表示为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \tag{1.1.7}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}=\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \tag{1.1.8}$$

将式(1.1.7)代入式(1.1.8)，由矩阵乘法结合律得

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}=\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right)=(\boldsymbol{BA})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{1.1.9}$$

(1.1.9)就是线性变换(1.1.1)和(1.1.3)的乘积(1.1.5)的矩阵形式. 线性变换(1.1.9)的矩阵 $\boldsymbol{BA}$ 正是式(1.1.6)的矩阵 $\boldsymbol{C}$，即 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{BA}$. 可见，线性变换乘积的矩阵就是对应线性变换矩阵的乘积，这给计算线性变换乘积带来了很大方便.

在线性代数中讨论的 n 个未知量 m 个方程的线性方程组的一般形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{1.1.10}$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为未知量，a_{ij} 为第 i 个方程中第 j 个未知量 x_j 的系数，b_i 为常数项，$i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$. 用方程组(1.1.10)的系数，未知量和常数排成的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

分别称为方程组(1.1.10)**系数矩阵**，**未知量矩阵**和**常数列矩阵**(也称为**常数列向量**). 利用矩阵乘法可以将方程组(1.1.10)写为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$. 这样，我们就可以利用矩阵来讨论线性方程组.

由于矩阵乘法满足结合律，所以 k 个方阵 $\boldsymbol{A}$ 按任何结合法相乘，乘积是相同的.

故可定义矩阵的乘幂. 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, k 为正整数, 则

$$\boldsymbol{A}^k = \overbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}^{k\text{个}}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次**幂**, 并规定 $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E}$.

乘幂运算满足运算律: $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{A}^{m+k}, (\boldsymbol{A}^m)^k = \boldsymbol{A}^{mk}$, 其中 m,k 为非负整数.

由于矩阵乘法不满足交换律, 所以 $(\boldsymbol{AB})^k$ 一般不等于 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$. 此外, 由 $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{0}$, 也不能推出 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$. 例如, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq \boldsymbol{0}$, 而 $\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

多项式的因式分解公式一般对矩阵也不能成立.

例如, 一般地, $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2 \neq (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$. 但是, 如果矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换, 则有

$$\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2 = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B});$$

$$\boldsymbol{A}^3 - \boldsymbol{B}^3 = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2);$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^k = \boldsymbol{A}^k + C_k^1\boldsymbol{A}^{k-1}\boldsymbol{B} + \cdots + C_k^{k-1}\boldsymbol{AB}^{k-1} + \boldsymbol{B}^k,\ k\text{ 为正整数.}$$

例 1.1.8 设 $\boldsymbol{A} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, 求 $\boldsymbol{A}^k$.

解 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{AA} = \operatorname{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_n^2), \boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A} = \operatorname{diag}(\lambda_1^3, \lambda_2^3, \cdots, \lambda_n^3)$, 由数学归纳法不难得到 $\boldsymbol{A}^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k)$.

1.1.4 矩阵的转置

定义 1.1.5 设 $m \times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

则称 $n \times m$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**, 记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$.

由定义 1.1.5 易知, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是将 $\boldsymbol{A}$ 的行和相应的列互换得到. 即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的 (i,j) 元是 $\boldsymbol{A}$ 的 (j,i) 元, $i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,m$.

例如, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$; $\boldsymbol{B}=(1,2,3)$, $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

转置有以下运算律:

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(3) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

证明　(1)、(2)、(3)是显然的, 下面证明(4). 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1p}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2p}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{np}\end{pmatrix},$$

则 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 都是 $p\times m$ 矩阵. $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 的 (i,j) 元是 $\boldsymbol{AB}$ 的 (j,i) 元, 它等于

$$\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}=a_{j1}b_{1i}+a_{j2}b_{2i}+\cdots+a_{jn}b_{ni}\ (i=1,2,\cdots,p;j=1,2,\cdots,m).$$

而 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的 (i,j) 元是 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 列与 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行的对应元的乘积之和

$$\sum_{k=1}^{n}b_{ki}a_{jk}=b_{1i}a_{j1}+b_{2i}a_{j2}+\cdots+b_{ni}a_{jn}\ (i=1,2,\cdots,p;j=1,2,\cdots,m).$$

因此, 矩阵 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的对应元相等, 所以 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

性质(2)和(4)可推广到有限个矩阵和与积的情形:

$$(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2+\cdots+\boldsymbol{A}_s)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\boldsymbol{A}_s^{\mathrm{T}};$$
$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_s)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{s-1}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}.$$

例 1.1.9　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix}$, 求 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$.

解法一　由

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&14&-3\\17&13&10\end{pmatrix},$$