数论

四道难题的证明

施冠群 著

中国农业科学技术出版社

数论

四道难题的证明

施冠群 著

中国农业科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

数论四道难题的证明/施冠群著. —北京 ： 中国农业科学技术出版社， 2011.10

ISBN 978-7-5116-0205-3

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①施… Ⅲ. ①数论-研究 Ⅳ. ①0156

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 099988 号

责任编辑 崔改泵
责任校对 贾晓红 郭苗苗

出 版 者 中国农业科学技术出版社
北京市中关村南大街 12 号 邮编：100081
电 话 （010）82109704（发行部）（010）82106631（编辑室）
（010）82109709（读者服务部）
传 真 （010）82106624
网 址 http://www.castp.cn
经 销 者 新华书店北京发行所
印 刷 者 北京华忠兴业印刷有限公司
开 本 850mm×1 168mm 1/32
印 张 6.5
字 数 157 千字
版 次 2011 年 10 月第 1 版 2011 年 10 月第 1 次印刷
定 价 20.00 元

前　言

素数问题是数论中研究的重要课题，有些命题看似简单，但长期得不到证明，成为数论难题。例如，《哥德巴赫猜想》《$(N+1)^2$与N^2之间至少有一个素数》《双生素数无穷》《费马猜想》就是难题。笔者在本书中对这些命题给出了初等方法证明。

以上数论四命题长久以来受到数学界的关注，对于研究的进展非常重视。这些命题的证明是笔者的学习心得，其中使用的方法不涉及高深难懂的理论和繁琐复杂计算，只是用到确认的合理简单计算。本书会有助于推动初等数论的进一步深入研究，同时为年轻的朋友提供初等数论一些有趣知识。过去认为某个问题是深奥的，今后有可能是常识，人的认识不断在深化。这些命题是学习初等数论入门的很好习题，从中体会初等数论解题需要巧妙构思和享受品味数学解题的乐趣。

在本书中一些篇幅还对另一个看来是"简单"的命题"素数无穷"作了一些探讨，由此将书中一些命题之间的关联进行了阐述。

为了读者阅读方便，几个命题分别独立成文，有的内容会有重复。由于写作时间不足和篇幅所限，书中用到的定义、定理等数学知识不能一一论证，加之笔者的水平有限，不妥之处请读者

予以指正。

国内外大量数论相关著作等资料，为本书的出版奠定了雄厚基础。感谢为本书编写提供过指导和帮助的专家和同仁，感谢中国农业科学技术出版社为本书顺利出版所提供的帮助。

施冠群

2011年10月于北京

目　录

§1. 初等方法哥德巴赫猜想的证明

一、概述

1742 年 6 月 7 日及 1742 年 6 月 30 日德国数学家哥德巴赫与欧拉互相通信，数学家欧拉在给哥德巴赫回信中有：

"……正如在你给我的来信中所观察到的那样，每个偶数看起来是两个素数之和，还蕴含着每个数如果是两个素数之和，则它可以是任意多个素数之和。对于 $n-2$ 也是如此，因此，n 是三个以至四个素数之和。如果 n 是奇数，则它一定是三个素数之和，因为 $n-1$ 是两个素数之和。所以，n 是一个任意多个素数之和。虽然我还不能证明，但我肯定每个偶数是两个素数之和……

欧拉"

这就是后来世人所说的哥德巴赫猜想出处。

后人把哥德巴赫猜想分为两个问题：

每个偶数 $\geqslant 6$ 都是两个素数之和；

每个奇数 $\geqslant 9$ 都是三个奇素数之和。

当确定每个偶数是两个素数之和时，则奇数是三个素数之和为显然易见。

哥德巴赫猜想可以表述为：

当 $2N \geqslant 6$，则

$$2N = p_a + p_b \tag{A}$$

当 $G \geqslant 9$，则

$$G = p_a + p_b + p_c \tag{B}$$

该问题一直为数学界重视，许多数学大师都进行了研究，经过了漫漫征途，但是，至今哥德巴赫猜想命题（A）没有得到公认的证明。笔者认为，目前在证明哥德巴赫猜想命题（A）的征途上已经取得的成就很了不起，但是，这些成果与哥德巴赫猜想命题（A）不是同一个命题，得到的是哥德巴赫猜想命题（A）的副产品。证明命题（A），则命题（B）也即可证明。

至今对于介绍哥德巴赫猜想的文章、书籍非常多。现在许多数学大师几乎都认为哥德巴赫猜想是个很难的命题，断言初等方法不可能解决。然而笔者有不同的看法，断言初等方法不可能解决，是在把哥德巴赫猜想神秘化，完全不可取。笔者认为，该命题解决的方法不排除以后有高深的数学工具去解决，但是，目前有非常简单、完全可以用初等的方法解决。

本文采用简易通俗的初等方法向读者介绍证明哥德巴赫猜想。

为了介绍和读者理解的方便，以下按证明哥德巴赫猜想需要的不同知识内容和证明步骤分别按序排列。相信读者可以看懂每

一个部分,串联起来就可以了解和掌握如何证明哥德巴赫猜想。

二、基础知识一:研究小于偶数 $2N$ 的素数

定义 2.1 $[\sqrt{2N}]$ 值称为偶数 $2N$ 的控制值,方括号意为取整数部分。

例如:100 的控制值是 10;50 的控制值是 7;122 的控制值是 11,如此等等,偶数值增大控制值逐渐增大。

定义 2.2 小于偶数 $2N$ 的素数分为两类,不大于控制值 $[\sqrt{2N}]$ 的素数称为 $2N$ 的控制素数,大于控制值 $[\sqrt{2N}]$ 的素数称为 $2N$ 的非控制素数。

例如:100 的控制值是 10,其中 2、3、5、7 为 100 的控制素数,100 的非控制素数有 11、13、17、19、23、29、23、29、31、37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97。

例如:50 的控制值是 7,其中,2、3、5、7 为 50 的控制素数,11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47 为 50 的非控制素数。

定义 2.3 大于偶数 $2N$ 的素数称为"超 $2N$ 的非控制素数"。

例如:超 100 的非控制素数是无穷的,有 101、103、107、109、……

偶数 $2N$ 的控制值是 $[\sqrt{2N}]$,其中 2、3、5、……p_k 为 $2N$ 的控制素数;p_{k+1}、p_{k+2}、……、p_W 为 $2N$ 的非控制素数。其中 p_k 为 $2N$ 的最大控制素数,p_W 为 $2N$ 的最大非控制素数;大于 p_W 的素数为"超 $2N$ 的非控制素数"。

定义 2.1 和定义 2.2 实际是应用厄拉多塞筛法,由 $2N$ 的控制

素数筛选不大于 $2N$ 的全部整数，可以甄别出不大于 $2N$ 的全部非控制素数。这里定义 2.3“超 $2N$ 的非控制素数”是为了把大于 $2N$ 的非控制素数与小于 $2N$ 的非控制素数加以区分。

厄拉多塞是约公元前 200 年亚历山大城的数学家，在数论中，厄拉多塞筛法是重要的数学工具。

厄拉多塞筛法（Eratosthenes）就是把一个不大于某个正整数 U 的正整数数列，该数列中所有的有限个素数组成的“筛子”，进行“筛选”不大于整数 U^2 的正整数数列中所有的数。被此“筛子”筛选后留下的数即为素数，可以构成不大于某个正整数 U^2 的素数数列。

简而言之，这就是厄拉多塞筛法（Eratosthenes）构造素数表。可以看出，实际上就是用一定范围的控制素数可以确定一定范围的非控制素数。

厄拉多塞筛法是用于证明哥德巴赫猜想的重要基础。

在所有的素数中，唯有 $p_o=2$ 是偶素数，其他皆为奇素数。

三、基础知识二：偶数 $2N(\geqslant 6)$ 可以分为两整数之和数对的个数之研究

先看举例：

例 1：偶数 10，现在分为两个正整数之和的情况可以列出有 9 种，即

序　号	1，	2，	3，	4，	5，	6，	7，	8，	9
正整数	1，	2，	3，	4，	5，	6，	7，	8，	9

核　数	5，	5，	5，	5，	5，	5，	5，	5，	5
正整数	9，	8，	7，	6，	5，	4，	3，	2，	1

其中有不同的偶数对 2 个,不同的奇数对 3 个。

例 2:偶数 12,现在分为两个正整数之和的情况可以列出有 11 种,即

序　号	1，	2，	3，	4，	5，	6，	7，	8，	9，	10，	11
正整数	1，	2，	3，	4，	5，	6，	7，	8，	9，	10，	11
核　数	6，	6，	6，	6，	6，	6，	6，	6，	6，	6，	6
正整数	11，	10，	9，	8，	7，	6，	5，	4，	3，	2，	1

其中,有不同的偶数对 3 个,不同的奇数对 3 个,如此等等,偶数 $2N$ 分为两个正整数之和有 $2N-1$ 种,可以记为如下:

序号	1,	2,	3,	4,	5,	……,	N,	……,	$2N-2$,	$2N-1$
奇数	1,	2,	3,	4,	5,	……,	N,	……,	$2N-2$,	$2N-1$
核数	N,	N,	N,	N,	N,	……,	N,	……,	N,	N
奇数	$2N-1$,	$2N-2$,	$2N-3$,	$2N-4$,	$2N-5$,	……,	N,	……,	2,	1

N 为奇数时,其中有不同的偶数对$\frac{N-1}{2}$个,不同的奇数对$\frac{N+1}{2}$个;

N 为偶数时,其中有不同的偶数对$\frac{N}{2}$个,不同的奇数对$\frac{N}{2}$个。

在研究证明哥德巴赫猜想时,偶数对就不必考虑,只要研究奇数对。后面研究 $2N$ 总的奇数对时指全部不同的奇数对,特此声明。在不同的奇数对中有一个数对含数 1,这个数对不符合哥德

巴赫猜想要求，应该引起注意。

其中，核数就是数对的中数，中数值恰为 N。

定义 3.1 偶数 $2N$ 分为两数之和即称为数对，每个数对都有一个中数 N，中数的值都是相等的。这些中数可以称为偶数 $2N$ 数对的核数，也可以称为数核。

在研究证明哥德巴赫猜想时，可以知道，任意偶数 $2N$ 总的奇数对数量是可以确定的，这一点非常重要，是研究证明哥德巴赫猜想计算的基础条件。

四、基础知识三：偶数 $2N(\geqslant 6)$ 分为两整数之和数对种类的研究

定义 4.1 偶数 $2N(\geqslant 6)$ 分为两个数之和，如果其中两个奇数都是素数的数对，称为哥德巴赫数对；如果其中两个奇数中含有不是素数的数对，称为非哥德巴赫数对。

例：当 $2N=10$ 时，则奇数和的数对有 3 对

$10=1+9=3+7=5+5$

$(1+9)$ 的数对中含数 1，1 不是素数，也不是合数，该数对是非哥德巴赫数对。

$(3+7)$ 的数对中 3、7 都是素数，其中，3 是 10 的控制素数，是含控制素数的哥德巴赫数对。

$(5+5)$ 的数对中只有 5，是非控制素数，是不含控制素数的哥德巴赫数对。

为此，偶数 $2N(\geqslant 6)$ 分为两个奇数之和，数对可以进行区分：

<table>
<tr><td rowspan="7">数
对</td><td rowspan="2">哥德巴赫数对</td><td>控制素数对</td><td></td></tr>
<tr><td>非控制素数对</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">非哥德巴赫数对</td><td>偶数对</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">奇数对</td><td>奇素数与奇合数数对</td></tr>
<tr><td>奇合数与奇合数数对</td></tr>
<tr><td>数 1 与奇合数数对</td></tr>
<tr><td>数 1 与素数数对</td></tr>
</table>

这样处理，为厄拉多塞筛法的使用打下了基础，偶数 $2N$（$\geqslant 6$）分为两个正整数之和，后面要把非哥德巴赫数核和控制素数对数核都剔除，留下的还有非控制素数对，这样就证明了哥德巴赫猜想。情况如何，后面的研究将给出明确的结论。

五、基础知识四：偶数 $2N$ 分为两数之和连续的 p_i 个数对中最多只能有 2 个数对含素因数 p_i

先看举例：

例：当 $2N=106$，不同的奇数对个数 $S=\dfrac{N+1}{2}=27$，$2N$ 控制值 10，控制素数 3、5、7，奇数对如下：

序号 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, ……, 9, ……, 12, 24, ……, 27

奇数 $\boxed{1}$, $\boxed{\underline{3}}$, $\boxed{\underline{5}}$, $\boxed{\underline{7}}$, $\boxed{9}$, $\boxed{\underline{11}}$, ……, $\underline{17}$, ……, $\underline{23}$, $\underline{47}$, ……, $\underline{53}$

核数 $\boxed{53}$, $\boxed{53}$, $\boxed{53}$, $\boxed{53}$, $\boxed{53}$, $\boxed{53}$, ……, 53, ……, 53, 53, ……, 53

奇数 $\boxed{105}$, $\boxed{\underline{103}}$, $\boxed{\underline{101}}$, $\boxed{99}$, $\boxed{\underline{97}}$, $\boxed{95}$, ……, $\underline{89}$, ……, $\underline{83}$, $\underline{59}$, ……, $\underline{53}$

以上数对用 106 的控制素数去甄别，含控制素因数的数对与不含控制素因数的数对进行区分。

数对有方框的数表示其中的奇数对含有奇控制素因数，其数对予以删除，即被筛去，序号也用方框标出。数字下有横线的是素数，没有方框的数表示其中的奇数对非控制素数，其数对不删除，即筛留。其中 17、89；23、83；47、59；53、53 总共 4 个数对是不含控制素因数的数对。

在该例中可以发现有很重要的规律：

1. $2N(\geqslant 6)$本身不含有其某个控制筛素因数时，所有奇数对按次序排列，则在每连续的素数 p_i 个数对中，可以有两次机会含有控制筛素因数 p_i，有 (p_i-2) 个数对不与素因数 p_i 相遇。

以 $p_i=3$ 为例，任意每连续的 3 个数对，有两个数对必定含控制筛素因数 3。有一个数对不含控制筛素因数 3。

以 $p_i=5$ 为例，任意每连续的 5 个数对，有两个数对必定含控制筛素因数 5。有三个数对不含控制筛素因数 5。

……，如此等等。

2. $2N(\geqslant 6)$本身含有其某个控制筛素因数 p_i 时，所有奇数对按次序排列，则在每连续的素数 p_i 个数对中，可以有一次机会相遇其控制筛素因数 p_i，有 (p_i-1) 个数对不与素因数 p_i 相遇。

例：当 $2N=100$，N 含有控制筛素因数 5，因此，奇数对按次序排列，则在每连续的 5 个数对中，可以有一次机会相遇其控制筛素

因数5,有4个数对不含素因数5。

以上两条很重要的规律的机理是$2N(\geqslant 6)$可以分为不同的奇数数对,数对按序排列后可以有上下两行奇数的数列,每行奇数的数列每连续的素数p_i个数必定有一个素数p_i。两行奇数的数列中如果素数p_i发生错位,则在每连续的素数p_i个数对中,可以有两次机会含有控制筛素因数p_i。两行奇数的数列中如果素数p_i不发生错位,则在每连续的素数p_i个数对中,可以有一次机会含有控制筛素因数p_i。

根据以上两条很重要的规律可以归纳为一条定理:

定理5.1 $2N(\geqslant 6)$分为两数和,所有奇数对按次序排列,则在每连续的素数p_i个数对中,最多可以有两次机会含有控制筛素因数p_i,至少有(p_i-2)个数对不与素因数p_i相遇。

证明:该定理实质可以说是自然数数列性质的推演结果,上面的机理分析就是本定理的证明方法基础。$2N$分为奇数对按次序排列,可以有两个数列,每个数列含有自然数列的规律与性质。

自然数列的奇数数列在每连续的素数p_i个数中,最多可以有1个数含有控制筛素因数p_i,现在$2N$分为奇数对按次序排列形成的两个数列,实际就是一个自然数列的奇数数列分裂成两段,素因数p_i有错位及不错位的情况,因此在每连续的素数p_i个数对中,最多可以有两次机会含有控制筛素因数p_i,至少有(p_i-2)个数对不含素因数p_i。

证毕。