中等专科学校通用教材

中专数学教程

第二册

主编 吴 坚 陈士屏

上海交通大学出版社

主　编　吴　坚　陈士屏

中专数学教程

第二册

本册主编　丛　山

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本数学教程适用于各类中等专科学校通用，全书共分四册，第二册的主要内容为空间图形、平面解析几何、复数及数列等。可供招收初中毕业生的中等专科学校各专业作为教材使用，也可供职业高中选用。

中专数学教程
（第二册）
上海交通大学出版社出版、发行
上海市番禺路 877 号　邮政编码 200030
全国新华书店经销
常熟市文化印刷厂・印刷
开本:850×1168(毫米) 1/32　印张:7.875　字数:211000
版次:1997 年 6 月　第 1 版　印次:1997 年 6 月　第 1 次
印数:1—4800
ISBN 7-313-01814-2/O・116　　定价:9.60 元

前　言

为了适应中专为主体的我国中等职业技术教育的改革需要，构造以通用基础课程加模块式的专业课程为特征的新型课程体系，上海交通大学出版社将陆续出版中等专科学校基础课系列教程。《中专数字教程》就是其中之一。

本套《中专数学教程》面向新世纪，以培养高素质的服务于21世纪的初中级专业人才为宗旨，编写中以国家教委1991年审定的工科类专业《中等专科学校数学教学大纲》和正在修订的财经类《中等专科学校数学教学大纲》为根据，突出应用性，强调通用性，确保先进性，注意与现行9年制义务教育的数学基础相衔接，适当渗透数学建模思想。

本套教程共分四册，其中第一、第二册内容包括代数、三角、空间图形和平面解析几何；第三册的内容为一元函数微积分。第一、第二、第三册可作为各类中专学校通用教材。

考虑到各专业对数学的需求侧重面之不同，第四册分甲、乙两种版本。甲种本可供工科类学校选用，内容包括常微分方程、行列式与矩阵、概率与统计、级数及积分变换；乙种本可供非工科类中专学校选用，内容包括矩阵与线性方程组、线性规划简介、投入产出简介、概率论初步及数理统计初步。

针对数学学科的教学特点，本教程精心配置了适量的习题。考虑到地域、专业类别和生源基础差异诸因素，每章习题分A、B两组。A组习题着重于巩固大纲要求的基本知识点；B组习题侧重于数学知识的综合运用，且适当增加了难度，故B组习题可供各校教师教学中灵活取舍。正文中有“*”号者，教学中也可灵活

取舍。

为了有利于教学，我们同时编写了本套教材的《教学参考书》，可供教师在教学中参考。

安徽农业大学吴坚和合肥电力学校陈士屏担任本套教程的主编，安徽省邮电学校赵大公、合肥电力学校丛山、合肥物价学校杨光慎、合肥电力学校臧永翠和安徽农业大学张长勤分别担任各分册主编。统稿工作由陈士屏（第一、第二、第三册）、吴坚（第四册甲、乙版本）担任，全书由中国科学技术大学博士生导师苏淳教授担任主审。

在编写过程中，曾得到安徽省教委职教处、安徽省中专数学教学研究会的大力支持和帮助，在此一并致谢。

由于编者的水平所限，加之编写时间仓促，编写过程中缺点错误在所难免，恳请各地读者和教师不吝指正。

主　编

1997 年 1 月

目　录

第一章　空间图形

本章将从公理出发，建立空间的点、线、面的概念，介绍空间图形在平面上的表现方法，并对空间直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系进行一般性的讨论，对我们建立空间图形的概念和空间图形的位置关系的判定、推理、计算提供理论依据。之后，本章在对常见的空间图形加以分类，在描述的基础上给出常见的空间图形（多面体和旋转体）的体积、表面积、侧面积的计算公式。

§1.1　平面、平面的基本性质

一、平面

平面的概念大家并不陌生，如平板玻璃面、平静的水面、教室的四壁等都给人以“平面”的印象，然而这些所见的“平面”都是直观的、有限的。在数学中，平面的概念是**无限延展**的。譬如我们将一本书放在空间某位置时，我们说该书所在的平面，不仅指书面占有的空间位置，而是指该书面向四周无限延展的空间位置，就好像直角坐标系所表示的平面虽然画出的仅是它的有限部分，但两轴可以无限延展一样。

请大家想象一下黑板表示的平面、课桌表示的平面、半开的门表示的平面位置，这里之所以让大家“想象”，是因为平面是无限的。由于视角关系，在空间中矩形看起来像平行四边形，因此在平面图上表示平面时，为了看上去有立体感，总是将平

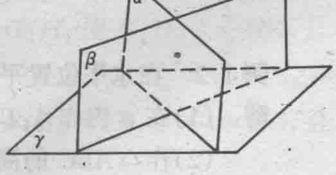

图 1.1

面画成平行四边形。通常我们记空间平面为 α、β、γ…等。

一般规定：

(1)当平面是水平放置时，通常把平行四边形的锐角画成 45°，水平边长画成邻边的两倍；

(2)当画一个平面被另一个平面遮住时，被遮部分线段画成虚线或不画。

下面通过几个例子来介绍空间平面图形的作法。

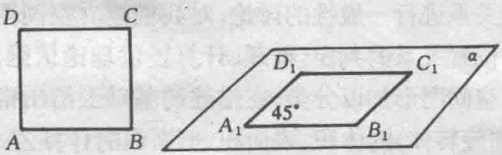

图 1.2

例 1.1 在水平面位置的平面 α 内作正方形 $ABCD$。

解 (1)在平面 α 内作 $A_1B_1 = AB$；

(2)取 $A_1D_1 = \frac{1}{2}AD$，过 A_1 在平面 α 内作 A_1D_1，使 $\angle D_1A_1B_1 = 45^\circ$；

(3)过 B_1、D_1 作 $D_1C_1 /\!/ A_1B_1$、$B_1C_1 /\!/ A_1D_1$，得平行四边形 $A_1B_1C_1D_1$，则 $A_1B_1C_1D_1$ 表示空间平面 α 内的正方形 $ABCD$。

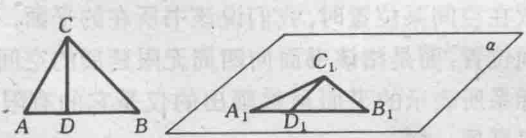

图 1.3

例 1.2 在水平位置平面 α 内作已知△ABC。

解 (1)在 α 内作 $A_1B_1 = AB$；

(2)作△ABC 的高 CD，在 A_1B_1 上取 $A_1D_1 = AD$，过 D_1 作 $D_1C_1 = \frac{1}{2}DC$，且使 $\angle C_1D_1B_1 = 45^\circ$；

(3)连 C_1A_1、C_1B_1，得平面 α 内的$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_1B_1C_1$ 即表示$\triangle ABC$ 在水平平面α 内的图形。

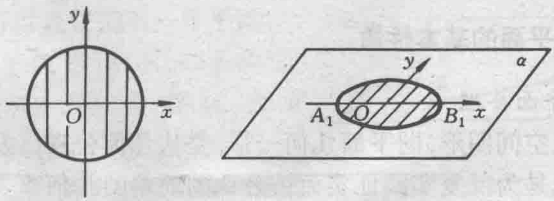

图 1.4

例 1.3　在水平位置平面 α 内作已知圆。

解　(1)在 α 内作直径 $A_1B_1 = AB$；

(2)将 AB n 等分作垂直于 x 轴的直线。在 α 内分 A_1B_1 为 n 等分，过等分点作与 A_1B_1 成 45°角的弦，使弦长为原弦长的一半；

(3)用光滑曲线连各弦的端点，得平面 α 内圆的图形。

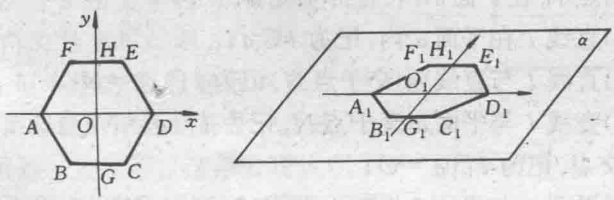

图 1.5

例 1.4　画水平放置的正六边形的图形。

解　(1)在平面 α 内作 $A_1D_1 = AD$；

(2)取 $A_1o_1 = Ao$，过 o_1 点作 G_1H_1 使 $G_1H_1 = \frac{1}{2}GH$，且 $\angle H_1o_1D_1 = 45°$；

(3)以 H_1、G_1 为中点分别作 $F_1E_1 = FE$，$B_1C_1 = BC$，且 $F_1E_1 /\!/ A_1D_1 /\!/ B_1G_1$；

(4)连 A_1B_1、C_1D_1、D_1E_1、F_1A_1 即得平面 α 内的正六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$。

通过以上几个例题，读者应大致掌握了空间水平平面 α 内的平面几何图形的画法。

二、平面的基本性质

1. 平面公理

研究空间图形，同平面几何一样，是从几何公理出发的。所谓几何公理是为反复实践证实而被公认的简单的几何事实。如平面几何中“过平面上两点可以引一条直线，且只能引一条直线”就是公理。公理是一切几何推论的出发点。在空间图形的讨论中，我们首先给出空间平面上的三条公理。

为表述问题的方便起见，空间的点一般用 A、B、C……表示，空间的直线用 l、m、n……表示，空间的平面用 α、β、γ……表示，空间的点、线、面之间的相互关系可用集合符号表示。我们规定：

(1)点 A 在直线 l 上，记为 $A\in l$；

(2)点 A 在平面 α 内，记为 $A\in\alpha$；

(3)直线 l 在平面 α 内，记为 $l\in\alpha$；

(4)直线 l 与直线 m 交于点 N，记为 $l\cap m=N$；

(5)直线 l 与平面 α 交于点 N，记为 $l\cap\alpha=N$；直线 l 与平面 α 没有交点，记为 $l\cap\alpha=\varnothing$；

(6)平面 α 与平面 β 相交于直线 l，记为 $\alpha\cap\beta=l$；平面 α 与平面 β 没有公共点，记为 $\alpha\cap\beta=\varnothing$。

公理 1.1　如果一条直线上有两个点在一平面内，那么这条直线上所有的点都在该平面内。

如图 1.6，直线 l 上有两点 A、B，且 $A\in\alpha$，$B\in\alpha$、则 $l\in\alpha$。即 l 落在平面 α 内。

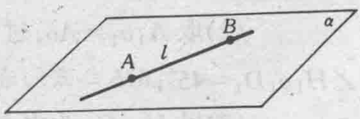

图 1.6

这条公理描述了平面的基本性质，它是用直线与平面的关系来揭示的，只要直线上有任何两点在平面内，那么直线上的所有点都落在平面内，这时，我们称直线在

平面内，或平面通过直线。

公理 1.2　过不在同一直线上的三点，可以且仅能引一个平面。

如图 1.7，点 A、B、C 不共线，C 是直线 AB 外一点，则 A、B、C 三点共面 α，且唯一确定平面 α。

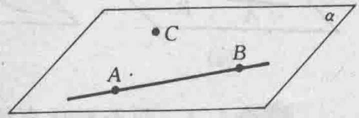

图 1.7

这条公理同样来自实践经验的积累，如日常生活中常用三根竹竿做成三角架，这样架起来是很平稳的，就是应用了上述公理，三根竹竿与地面的触点，相当于不在同一直线上的三点，因而它们可以确定一个平面。

公理 1.3　如果两平面有一公共点，那么两平面相交于过该点的直线。

如图 1.8，平面 α 与平面 β 相交于点 A，则 α 与 β 相交于过点 A 的直线 l。即 $A\in\alpha\cap\beta$，且 $A\in l$，则 $\alpha\cap\beta=l$。

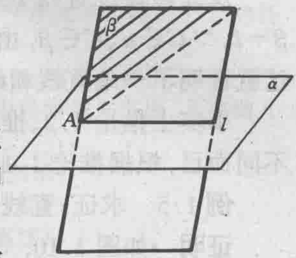

图 1.8

在很多地方都能看到这条公理的应用：如两墙面的结合处都是一直线，一张纸的折痕是一直线等。这条公理说明了一个简单的事实，两个平面如果相交，则相交的部分一定是一直线。

上述三条公理，可以凭生活经验去理解，它们是人们在实践中总结出来又被反复实践证实了的基本事实。公理 1.1 描述了平面的基本性质，公理 1.2 是确定一个平面的依据，公理 1.3 描述了两平面的相交关系。

2. 平面的确定

由公理 1.2、公理 1.1 及公理 1.3，我们可以得出确定一个平面的条件。我们可用公理的推论形式给出。

推论 1.1　一条直线和线外一点可以确定一个平面。如图 1.9(a)。

推论 1.2　两条相交直线可以确定一个平面。如图 1.9(b)。

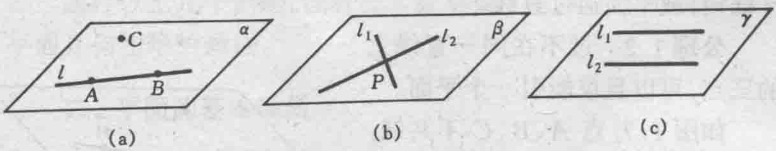

图 1.9

推论 1.3　两条平行直线可以确定一个平面。如图 1.9(c)。

下面仅就推论 1.1 加以证明。

证明　如图 1.9(a)，设 C 是直线 l 外一点，在平面 α 内的直线 l 上取点 A、B，A、B、C 不共线，由公理 1.2，A、B、C 三点可确定一个平面。

反之假设过直线 l 及点 C 可引另一平面 β，且 $\alpha \neq \beta$，则 $\alpha \cap \beta = l$，$\because C \in \alpha$、$C \in \beta$，由公理 1.3，$C \in l$，与 C 是 l 外一点矛盾。这就证明了一条直线和线外一点可以且仅可以确定一平面。

事实上推论 1.2、推论 1.3 是推论 1.1 的翻版，只是表述方式不同而已，根据推论 1.1，很容易推出推论 1.2 与推论 1.3。

例 1.5　求证：直线 AB、BC、CA 两两相交，则三直线共面。

证明　如图 1.10，$\because AB \cap AC = A$，$\therefore AB$ 与 AC 共面 α（据推论 1.2）。又 $\because B \in AB$，$C \in AC$，$\therefore B \in \alpha$，$C \in \alpha$，$\therefore$ 由公理 1.1，$BC \in \alpha$，即直线 AB、BC、CA 共面。

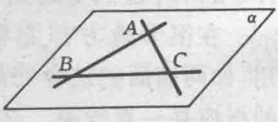

图 1.10

例 1.6　已知五边形 $ABCDE$ 中对角线 AC、BE 相交于 F，AD、BE 相交于 G，如图 1.11。求证这个五边形的五个顶点在同一平面内。

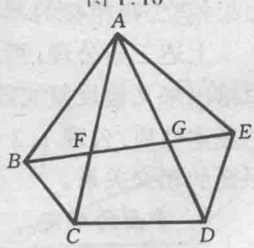

图 1.11

证明　$\because A$、B、C 是不共线三点，$\therefore A$、B、C 确定一平面 α。$\because F \in AC$，$AC \in \alpha$，$\therefore F \in \alpha$ 同理可证得 $G \in \alpha$，$\therefore$ 直线 $FG \in \alpha$，又 $\because B \in FG$，$E \in FG$，$\therefore B \in \alpha$，$E \in \alpha$。$\therefore A$、B、C、D、E 在同一平面内。

课堂练习 1.1

1. 用符号表示下列语句：

(1) 点 A 在平面 α 内，但在平面 β 外；

(2) 直线 l 经过平面 α 外一点 M；

(3) 直线 l_1 与 l_2 交于平面 α 内一点 M；

(4) 直线 l 是平面 α 和平面 β 的交线。

2. 观察图 1.12 中的两个图形，它们有什么不同？

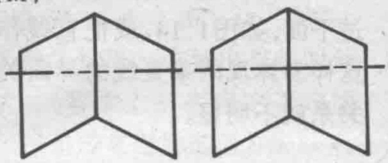

图 1.12

3. 三角形一定是平面图形吗？为什么？

4. 回答下列各问题：

(1) 一个点能不能确定一个平面？两个点呢？任意的三个点呢？

(2) 经过一点的两条直线是不是一定在同一个平面内？经过一点的任意三条直线呢？

(3) 空间有四个点，它们中间的任何三点不共线，问最多可作几个平面？

(4) 空间三条直线两两平行且不共面，过其中任两条作平面，共可做几个平面？

5. 设 l 为直线，α、β 是两个平面，作如下空间图形：

(1) l 与 α 不相交； (2) l 与 α 交于一点 P；

(3) α 与 β 不相交； (4) α 与 β 交于直线 l。

§1.2 空间直线与直线的位置关系

一、两条直线的相关位置

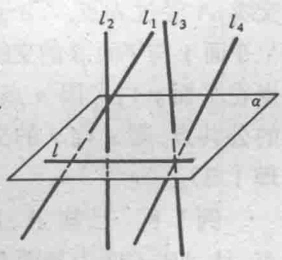

图 1.13

由推论 1.2、推论 1.3 知道两条平行或相交的直线可确定一个平面，换句话说，在平面内两条直线的位置关系有两种：即平行(包括重合)、相交。但在空间，可以作出无数对不在同一平面内的两条直线，如图 1.13。显然直线 l 与直线 l_1、l_2、l_3、l_4 都不共面，我们把不在同一平面内的两条直线称为**异面直线**。

一般地可以把空间两条直线的位置关系归纳成如下三种情况：

(1) 异面——没有公共点，不共面；

(2) 平行——没有公共点，共面；

(3) 相交——有一个公共点，共面；

作异面直线的图形，可将一条直线画在平面内，另一条直线穿过平面，如图1.14，或把直线作在两个不同的平面内，如图 1.15，这样易体现两条直线的异面关系。而图 1.16 中两条直线的异面关系就不明显。

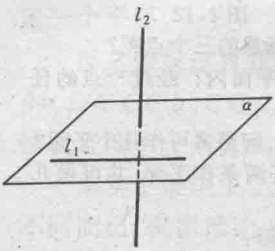

图 1.14

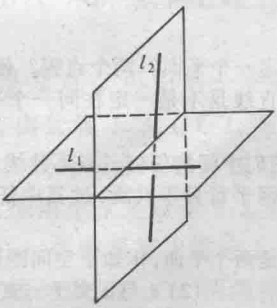

图 1.15

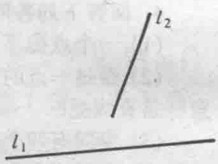

图 1.16

例 1.7　三个平面两两相交得三条直线，如果其中有两条交于一点，求证第三条也过该点。

证明　如图 1.17，$\because$ 平面 α 与平面 β 的交线 oA 经过 o 点，$\therefore o$ 点在平面 α 内。又 $\because$ 平面 γ 与平面 β 的交线 oC 经过 o 点，$\therefore o$ 点在平面 γ 内。因 o 点为平面 α 与平面 γ 的公共点，则 α 与 γ 的交线经过 o 点(由公理 1.3)。

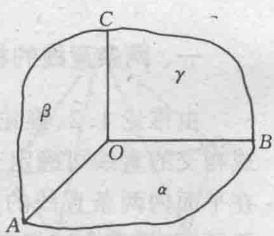

图 1.17

例 1.8　已知 A、B、C、D 是空间四点，且 AB、CD 为异面直线。求证：AB 和 BD，AD 和 BC 也是异面直线。

证明　如图 1.18(反证法)，设 AC 和 BD 共面。则点 A、B、

C、D 共面，$\therefore$ 直线 AB、CD 共面（公理 1.1）。这与 AB、CD 异面矛盾。$\therefore AC$ 与 BD 异面。同理：AD 与 BC 异面。

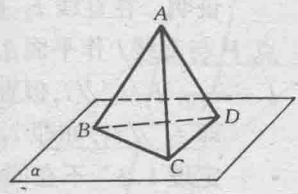

图 1.18

在以前推证问题时我们已用过反证法，这是一种间接推证问题的方法。反证法的过程是先否定原命题的结论或部分结论，经过推理而导出与已知结论或公理相抵触的结果。或导出与临时假设相违背的结果，从而证明原命题成立（哲学上的否定之否定原理）。这里需指出，在空间几何里，反证法是经常用的推理方法。

二、空间直线的平行关系

定理 1.1　如果两个相交平面分别通过两条相平行的直线，那么这两个平面的交线，一定平行于这两条平行线。

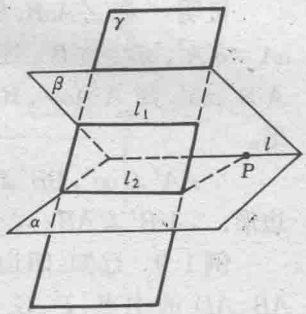

图 1.19

如图 1.19，设平面 α 过直线 l_1，平面 β 过直线 l_2，且 $l_1 /\!/ l_2$，$\alpha \cap \beta = l$。求证：$l /\!/ l_1$，且 $l /\!/ l_2$。

证明　设 l_1、l_2 确定的平面为 γ。

（反证法）：因 l_1 与 l 共面 α，如 $l_1 \not\parallel l$，则可设 $l_1 \cap l = P$，

$\because P$ 在 $\alpha \cap \beta = l$ 上，$\therefore P \in \beta$，又 $\because P \in l_1$，$\therefore P$ 在 l_1 与 l_2 所确定的平面 γ 内，$P \in \gamma$，于是由 $P \in \beta$，$P \in \gamma$，知 $P \in \beta \cap \gamma = l_2$，由 $P \in l_1$，$P \in l_2$，$P = l_1 \cap l_2$ 与 $l_1 /\!/ l_2$ 矛盾。$\therefore l_1 /\!/ l_2$。同理可证 $l_2 /\!/ l$。

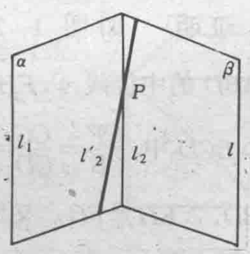

图 1.20

定理 1.2　如果两条直线各与第三条直线平行，那么这两条直线互相平行（这个定理称三线平行定理）。

如图 1.20，已知 $l_1 /\!/ l$、$l_2 /\!/ l$，求证：$l_1 /\!/ l_2$

证明 在直线 l_2 上取一点 P，过点 P 与直线 l_1 作平面 α，过点 P 与直线 l 作平面 β，设 α 与 β 相交于过点 P 的直线 l_2'，$\because l_1 /\!/ l$，$\therefore l_2' /\!/ l_1$，$l_2' /\!/ l$，但直线 l_2 也过点 P 且平行于 l，$\therefore l_2'$ 与 l_2 重合。

即 $l_2' /\!/ l_1$，亦即 $l_2 /\!/ l$。

定理 1.3 不在同一平面内的两个角，如果它们的对应边相互平行，且方向相同，那么这两个角相等。

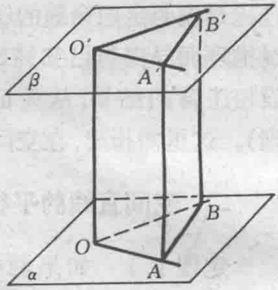

图 1.21

如图 1.21，已知 $oA /\!/ o'A'$，$oB /\!/ o'B'$ 且方向相同，求证：$\angle AoB = \angle A'o'B'$。

证明 在 $\angle AoB$ 与 $\angle A'o'B'$ 中取 $oA = o'A'$，$oB = o'B'$，连 AA'、BB'、AB、$A'B'$、oo'，则 $A'Aoo'$，$B'Boo'$ 是平行四边形。

$\because AA' \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} oo'$，$BB' \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} oo'$，$\therefore AA' \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} BB'$。$\therefore AA'B'B$ 是平行四边形，$\therefore A'B' \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} AB$。$\therefore \triangle AoB \cong \triangle A'o'B'$，$\therefore \angle AoB = \angle A'o'B'$。

例 1.9 已知：四边形 $ABCD$ 是空间四边形，E、H 分别是边 AB、AD 的中点、F、G 分别是边 CB、CD 上的点，且 $\dfrac{CF}{CB} = \dfrac{CG}{CD} = \dfrac{2}{3}$，求证：四边形 $EFGH$ 是梯形。

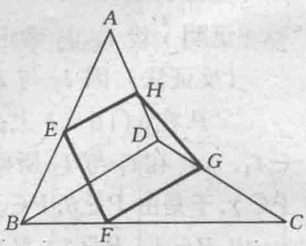

图 1.22

证明 如图 1.22，$\because EH$ 是 $\triangle ABD$ 的中位线，$\therefore EH \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} \dfrac{1}{2}BD$。又在 $\triangle BCD$ 中，$\dfrac{CF}{CB} = \dfrac{CG}{CD} = \dfrac{2}{3}$，$\therefore FG \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} \dfrac{2}{3}BD$，$\therefore EH /\!/ FG$。又 $\because FG > EH$，$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是梯形。

三、异面直线所成的角

如图 1.23，a、b 是两条异面直线，经过空间任一点 o 作直线