非线性常微分方程的混沌运动

王光瑞 陈光旨 著

FEI XIAN XING CHANG WEI FEN FANG CHENG DE HUN DUN YUN DONG

广西科学技术出版社

非线性常微分方程的混沌运动

王光瑞 陈光旨 著

广西科学技术出版社

(桂)新登字06号

非线性常微分方程的混沌运动

王光瑞 陈光旨 著

*

广西科学技术出版社出版

(南宁市东葛路东段)

广西新华书店发行

广西民族印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 9.625 字数 112 200

1995年7月第1版 1995年7月第1次印刷

ISBN 7-80619-224-7 / O·2 定价:12.00元

内容提要

混沌现象的理论与实验是70年代末期以来非线性科学中研究的主要方向，它广泛地渗透于自然科学与社会科学之中。本书着重阐述常微分方程中的混沌运动，主要以强迫布鲁塞尔振子为具体研究对象，结合本书作者及其合作者的一些研究成果，讲述在微分方程系统中研究混沌运动的数值方法和得到的主要结果。本书前两章概述混沌的一般概念和基础知识；第三章是研究混沌的数值方法；第四章概述研究所取得的主要结果；第五章对奇怪吸引子进行了专门讨论。本书可作为高等院校物理系或其它专业高年级学生及研究生的教材或专门读物，也可供从事涉及非线性方程的各个领域的科技工作者参考。

序　言

物质系统的演化规律通常可用数学方程来描写。用线性方程描写系统及其运动规律而形成的线性科学在解决各种科学技术问题中取得了巨大成功，并导致了时代的进步。但世界是极其复杂的，物体间的相互作用是客观存在的，这就必然存在非线性现象。非线性问题是科学研究与科学技术中不可回避的问题。但直到本世纪 50 年代，对各类非线性问题的研究，在数学上主要是用微扰方法对原来的线性解进行修正。显然，这种近似方法远未揭示出非线性问题中丰富的内在规律。60 年代以来，学者们发现，不同的非线性系统存在着一系列共同的性质，存在着一些带有普遍意义的规律，从而逐渐形成了一门包括耗散结构、孤立子、分形、混沌、班图动力学……等及其应用的非线性科学。

大量研究事例表明，非线性系统的行为和性质与方程的控制参数及初始条件密切相关。一个由确定的非线性演化方程描述的物质系统，在远离平衡的情况下，当控制参数变化时，可能经过分岔而进入时空有序且对称性更低的耗散结构状态或更为无序的混沌状态。混沌不是简单的无序状态，而是混乱中有规律，但又不具备明显对称特征的一种“序”。混沌中有着极其丰富多彩的内在规律。

目前研究混沌运动规律的主要途径是数学解析、计算机模拟或具体的实验。由于混沌现象的复杂性，在研究方法和手段上也因新现象、新属性、新规律的发现而日异更新。分形几何学、符号动力学和重整化群就是近年来发展并进入混沌研究的方法，它们几乎是三位一体地构成了混沌理论的数学框架。至今多数

研究工作已对一维和二维映象，作为离散时间的演化方程，进行了若干解析处理。但对于许多由非线性微分方程（包括差分方程、常微分方程、偏微分方程和微分积分方程等）描述的实际物理系统出现的混沌现象研究，数值实验是非常重要的研究手段。特别是要提高分辨率而又出现临界慢化现象的情况下，只有靠增加数值计算的时间来达到目的。在本书中，我们将以强迫布鲁塞尔振子为例，结合作者自己所作的部分工作，着重介绍数值计算方法和一些数值计算结果。这些方法和结果在研究其它微分方程混沌现象时也是有参考价值的。因为在一定意义上，模型的选择并不十分重要，只要物理上比较合理，各种模型的分岔和混沌行为就具有某种普适性。

为了加深对微分方程系统中混沌运动的理解，我们在书中还简述了必不可少的基础知识，例如一维映象的重要结果，保守系统的混沌现象等，最后对奇怪吸引子进行了专门讨论。

本书的初稿是 1984 年王光瑞在广西师范大学和东北师范大学给研究生讲课的简略讲义。以后王光瑞又在中国科技大学等几所高校及研究所讲课试用。在此基础上修改，陈光旨完成了对第一第二章的改写和增补，第三至第五章由王光瑞改写和增补，最后由陈光旨统稿。

郝柏林教授热情地为本书作者给予鼓励，于希令帮助整理了第二次修改稿，薛郁同志还为本书的参考文献、插图、校对作了大量的工作。于此作者向他们表示衷心感谢。

作者水平有限，书中不当之处，敬请指正。

目　录

第一章 混沌运动概述

第一节 确定性描述与统计性描述

物理学对自然界的描述有确定性与统计性两类不同的方法。确定性描述以三百年前牛顿发表《自然哲学和宇宙体系的数学原理》为标志，在这本划时代的不朽著作中，牛顿提出了力学三大定律和万有引力定律，从而对宏观物体的运动给出了精确的描述。由牛顿第二定律我们知道，如果作用于某一质量为 m 的物体的力 F 已经知道，则可以求出其加速度 a。而根据微积分学的规则，只要给出一个物体在某一瞬间的位置和速度，即在确定的初始条件下，我们可以知道这个物体其它时刻的运动状态，这个物体的运动永远就确定了。牛顿第二定律公式的重要特点之一，还在于具有时间反演不变性，即当用 $-t$ 代换 t 时，公式的形式和解保持不变，时间是对称的。这意味着过去和将来没有区别。我们只要知道初始条件，不仅可以预测未来，也可以推算历史。这个定律把物体运动变化的规律用轨道特性表示出来，而轨道的基本性质就在于确定性和可逆性，因而也具有合法性和普适性。海王星和冥王星的发现就是牛顿力学理论的一个光辉佐证。牛顿力学的成功曾使人们看到自然界似乎变成有规律的、驯良的和能够预言的而不再是随机、无序或混沌的了。

牛顿力学的成功不仅使物理学在 17－19 世纪期间得以迅速发展，而且曾一度成为所有自然科学的纲领和规范，当时对所有物质运动的研究都要追溯或探究其是否符合牛顿的运动定律。在 17、18 世纪的科学界形成一种思想方法：总想大事化小，

繁事化简，希望把复杂的自然现象力图还原为简单的力学定律来处理。对牛顿力学的崇拜以 18 世纪拉普拉斯确定论的形成而达到了顶峰。拉普拉斯认为，自然规律意味着严格的确定性，因而未来事件是完全可以预测的。他以极其乐观的心情写道："智慧，如果能在某一瞬间知道鼓动着自然的一切力量，知道大自然所有组成部分的相对位置，再者，如果它是如此浩瀚，足以分析这些材料，并能把上至庞大的天体，下至微小的原子的所有运动，统统包括在一个公式中。那么，对于它来说，就再也没有什么是不可靠的了。在它的面前，无论是过去或是将来，一切都将会昭然若揭。"[1]所以他认为，如果我们想像某一位天才在一给定时刻洞悉了宇宙所有事物间的全部关系，那么他就能够说出在过去或未来任何时刻所有这些事物的相对位置、运动及总的作用。如果人们能够找到一个无所不包的宇宙方程和某一瞬间的初始条件，那么人们就能知道宇宙的过去和将来的一切。这就是所谓的"拉普拉斯确定论"或"宇宙宿命论"。

确定性描述由确定性方程来体现，通常可分为两大类。一类以牛顿方程为代表，其主要特征，正如前述，它描述的是时间上可逆、遵循确定"轨道"运动的保守系统，只要不存在和时间有关的外力影响，或者外力不发生突变，这种系统的运动方式就不会自发地产生突变。这是一种"可积"系统，在一定初始条件下，它们的解是完全确定的。这类方程原则上适用于上至天体下至无相互作用的微观粒子，具有相当的普适性。动力学中著名的正则方程就是一个时间和速度反演可逆而守恒的方程。

但有另一类确定性方程是一批非线性的宏观方程，用以描述耗散的、具有不可逆的时间演化的系统，例如描述流体速度场 V 的 Navien-Stokes 方程：

$$\frac{\partial V}{\partial t}+(V\nabla)V=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\gamma\nabla V$$

式中 p 是压强,γ 是粘滞系数,ρ 是密度,γ 表征着耗散因素。又如不均匀系统中的化学反应扩散方程为:

$$\frac{\partial x_i}{\partial t}=f_i(x_1,\cdots\cdots,x_N)+D_i\triangle x_i,\quad i=1,2,\cdots\cdots,N$$

式中 f_i 是描写化学反应动力学的非线性函数,第二项中的 D_i 代表耗散效应的组元 x_i 的扩散系数。这些非线性方程就因耗散项的存在和时间不对称而具有不可逆性,虽然它们原则上可以从微观方程用统计平均方法推导出来,但方程本身是确定性的,只要适当地给出初始条件和边界条件,这些方程的解似乎也应当是完全确定的。

必须指出的是,确定性描述另一重要特点是运动对初值不敏感,即初值微小的变动不至于引起结果的巨大变化,这一特点又和轨道的可预测性是相互联系互为依存的。这与下面将要讲到的某些具有内随机特性的确定性系统对初值的敏感性形成鲜明的对照。

确定论观念给科学界打上的深刻烙印影响了若干代人,尤其在 18 世纪前后几乎成为不可违抗的真理,以致玻耳兹曼在 19 世纪看到确定论的缺点而提出统计力学思想时,竟然得不到他同代科学权威的支持,因感到压抑而自杀。

但拉普拉斯的确定论在其荣耀的顶峰于 1811 年遇到了第一次挫折,富里叶发现了热流与温度梯度成正比的简单定律与牛顿定律不一致。尽管拉普拉斯和拉格朗日及其门徒曾联合起来竭力批评富里叶的理论,但他们不得不在事实面前败下阵来。尤其在处理分子运动和热的本质问题时,拉普拉斯决定论遇到了不可克服的困难。一个由大量粒子组成的系统,个别粒子按牛

顿力学规律运动，但其整体行为却不是个体行为的机械相加，因而不能实现拉普拉斯的决定论描述。个别粒子的机械运动已成为非本质的规律，而大量粒子的集体平均行为才是最本质的东西，这种建立在个别粒子的力学规律基础之上，而又与个别粒子运动规律有本质区别的大量粒子的集体运动效应就是所谓的统计规律性，物质运动由低级到高级的发展是统计规律性的结果。

玻耳兹曼第一个提出，为了使“轨道”的物理学能扩展到包括热力学和相互作用的多体系统所描述的情形中去，必须引入概率的观点，用统计的方法去描写复杂系统，他把熵的不可逆增长看成是分子无序性增长的表述，“逐渐忘记任何初始非对称性的表达”，从而使物理概念第一次用概率观点来解释，用统计方法求出了宏观物理量。这使人们认识到，复杂现象从一开始就和非对称的时间联在一起，无论是热力学还是在其它自然现象中，时间的非对称性和过程的不可逆性不仅是自然现象的基本特征，而且并非都是消极和讨厌的，而有着很大的建设性作用，没有不可逆就没有生命，也不会有世界。今天我们已经知道，就动力学的有效性而言，无论是系统的整体还是个体行为都遵守动力学规律，统计物理仍然利用这种规律通过概率分布从整体上求统计平均，从而得出宏观上决定性的解答，这就是一种统计确定论描述。统计性描述是与确定性描述同样重要的方法。

但拉普拉斯确定论的影响是根深蒂固的，有些学者对物理学中使用统计描述的必要性仅仅把它归结为系统自由度和方程数目太多，不可能完全列出初始条件，不能计入一切次要因素等等外在和技术的原因，或由于我们对众多的个体行为的无知而不得不采用的权宜之计而已。

不过到廿世纪，拉普拉斯确定论真正趋于失势的原因之一，是量子力学中海森堡不确定关系的发现，该原理指出，粒子的位

置及速度的测量精度存在一定的限度，不可能精确地同时确定，特别是发现了微观粒子的全同性之后，所谓精确区别或测定个别粒子的行为就更无意义了；原因之二是在一些大尺度现象中存在的不可预测的随机现象，确定论描述也无能为力。例如小溪中的潺潺流水，流经溪中一块屹立不动的岩石时，尽管流量恒定而连续，但却出现无规则的旋涡，形成湍流，其发生的机制至今仍是流体力学的一个大难题；某些庆典中向空中放的大量气球，尽管每个气球的初态可以测定，它们也各自遵守牛顿定律，但在空中四处乱窜，路径是不可预测的；至于社会生活中随机现象就更多了，“踏破铁鞋无处寻，得来全不费功夫”就是随机发现的写照。如果某人要“守株待兔”似地专门寻找这种不费功夫的好事，那就犯了拉普拉斯确定性的毛病。

大量事实已证明，即使是确定性系统，只要稍微复杂一些，就会出现随机行为，例如三体或多体的运动方程是不可积系统，更不能解析地求解，甚至太阳系能否永恒地稳定运行，也是悬而未决的。特别是发现了一些确定性方程在一定条件下出现似随机的混沌现象之后，就使人们有理由说，牛顿力学与统计力学间没有不可逾越的鸿沟，牛顿力学本身既是确定论的又是随机论的，具有二重性。即使拉普拉斯的梦想真的实现，知道了宇宙的一切初态和一切力学方程，未来也有可能是随机的，“拉普拉斯确定论乃是关于个体事物或能够简化为单因果关系事物的客观规律的表现形式，而统计决定论乃是关于群体事物或具有无限多因果关系的事物的客观规律的表现形式”。[2]而且在一定条件下两类决定论又可以相互转化。

但统计规律性是复杂系统所特有的，要把它还原为简单的力学规律，即使计入一切次要因素，也不可能反应系统的本质。一切复杂的力学系统存在随机性是一种本质特征，大量随机性

中蕴藏着必然性就是统计规律性的表现，也即是一种统计确定论。而统计确定论本身又可分为经典统计和量子统计。前者适用于服从牛顿力学规律的系统，后者适用于全同粒子组成的系统，这些粒子服从量子力学规律。

我国一位物理学家写道："决定论还是概率论？二者的关系可能是非此非彼，亦此亦彼。真实地反映宏观世界的观念应是基于有限性的混沌论。"[3]这就是我们要得的结论。

第二节 确定性系统的随机性

所谓确定性系统，一般是指动力学系统，它们可用常微分方程、偏微分方程、差分方程或一些简单的迭代方程来描述，而方程中的系数都是确定的，只要给定初始值和边界条件，方程就能给出确定的解或过程。

前面讲到，确定性系统也可能出现随机现象，人们自然希望揭示随机性产生的原因。传统的看法曾认为，随机性是由于系统受到外界环境中大量并存事物的影响而产生，这种由外因导致的随机现象称为外在随机性，人们熟悉的布朗运动就是外在随机性的典型例子。用显微镜观察浮悬在水中的花粉或微小尘粒，可以发现花粉微粒在水中总是以不太高的速度忽前忽后、时左时右、或上或下的无规则游动着，对同一微粒而言，液体温度越高粒子运动越剧烈，布朗粒子是由于受到处于热运动中数目极多的液体分子从四面八方不断撞击，而每时每刻各方面受力不均等产生位移的结果，显微镜下观察到的宏观位移是多次微观无规运动积累的结果。布朗运动不是分子运动的直接形象，而仅是分子运动的见证。布朗粒子的运动是外界液体分子"热涨落"导致的，所以是一种外在随机现象；又如一个弹性振动的平台，其结构将因外加载荷的作用而产生反应运动，通常可用确定的

微分方程来描写，如果方程是线性的，则只有当外加载荷是随机的情况下，平台的反应才是随机过程；日常生活中随机性也屡见不鲜，我们的工作计划被一位“不速之客”打乱，或因上级一个突然命令而改变，某个人的某种打算不能如愿以偿等等都是因外界因素导致的随机现象。

外在随机性的主要特点是，出现随机的初值区域在相空间中的测度为零，为了计入随机性，必须在原方程中加随机项。

但人们发现，某些确定性系统在无外随机因素的情况下，由于对初值的依赖十分敏感，微小的扰动将导致解的巨大变化，有时甚至会面目全非。从物理上看，得到的解似乎是随机的过程，这种“假”随机是由确定性系统固有的内在随机性引起的。

最早认识到确定性系统可能出现内在随机性的是法国数学家庞加莱(H. poincare，1854－1912)，他在研究微分方程解的性质时，发现系统在演化过程中任意小的不确定因素可能会逐渐被放大，使得遥远的未来情况变得不可预测。他写道：“一种非常微小的，以致于我们察觉不到的起因可能产生一个显著的，我们决不会看不到的结果，这时我们就说这结果是偶然产生的……可能会有这种情况：初始条件的微小差异将导致最终出现根本不同的现象，前者的微小差异将使后者出现巨大误差。于是我们不可能作出预言，这现象就被认为是偶然性的现象。”

例如前述的弹性振动平台，如果其结构对外加载荷的反应方程是非线性的，即使在确定的周期载荷作用下，也可能产生似随机的运动，我们无法知道某时刻该平台结构的准确位移，这种无规性，并非计算方法的近似引起，而是因为实验中初始数据不可能“绝对无限精确”而系统对初始异常敏感引起的；又如一个将闭未闭的水龙头，尽管水压是恒定的，但若将龙头稍微开大一点点，可以发现滴水的时间间隔忽长忽短，很不规则，这实际上

是由水管内水流的微小变化造成的“混沌”;玩扑克牌时,只要洗牌中有一张牌的变化,都会使各人得牌结果产生巨大差异,玩牌中的得牌是不可预测的;小溪流水因岩石阻挡形成的一个个大小不同的旋涡,也是一种内在随机性的表现,因为在水流量一定,毫无其它影响的情况下,流水似乎是“自作主张”无规则地卷起浪花与旋涡。现在已发现越来越多的确定性差分方程、微分方程或非常简单的迭代方程,在不附加随机项、随机系数或随机初始条件的情况下,其数值实验在一定条件下也是随机分布的。在非线性电路、光学双稳设备、浅水波的受迫振动、化学振荡反应,以及一些生理实验中,都发现了与外噪声无关而产生的随机现象,显然也是由于系统内在的动力学因素决定的。上述内在随机性的主要特点是:出现随机性的初值范围在相空间中具有非零测度,其随机参数范围在参数相空间中也具有非零测度,这些方程原则上是非线性的确定性方程,不需外加随机项也可能出现随机性。

我们知道一个无内随机性的系统,只要初始条件的数值足够精确,就可期待对其运动过程作出较精确的预测,其误差将被控制在一定范围内。而具有内随机的系统,我们不可能对其运动过程作出精确的计算,这并非由于计算方法的近似或误差引起,而是由于这类系统对初值十分敏感,微小的差异都会带来后果的巨大变化,而初值又不可能做到“无限”精确,因此实际的计算结果总是无规的,是不可预测的,而且往往导致混沌。

以人们熟知的一维映射为例,

$$x_{n+1}=\begin{cases}2x_n & \text{当 } 0\leqslant x_n<\dfrac{1}{2}\\[2ex] 2x_n-1 & \text{当 } \dfrac{1}{2}\leqslant x_n\leqslant 1\end{cases} \tag{1.2-1}$$