

初中奥林匹克数学读本

(初一分册)

顾问 裘宗沪 主编 魏有德



$$\sqrt{a^2 + b^2}$$



成都科技大学出版社

初中奥林匹克数学读本

初一分册

顾问 裘宗沪

主编 魏有德

成都科技大学出版社

(川)新登字 015 号

责任编辑:黄文龙

封面设计:刘智银

初中奥林匹克数学读本 初一分册

主编 魏有德

成都科技大学出版社出版发行

成都市盲哑学校印刷厂印刷

787×1092 1/32 7.375 印张 220 千字

1994 年 5 月第一版 1994 年 5 月第一次印刷

印数:1—8000 册

ISBN7—5616—2190—6/O. 138

定价:4.60 元

初中奥林匹克数学读本

初一分册

顾问 裘宗沪 主编 魏有德

参加编写人员 (以笔画为序)

叶长春	安树纵	刘荣辉	刘 祥	吴通英
吴 伟	邱敬联	陈爱民	陈玉龙	何星樵
杨开理	罗辉荣	段小龙	施为孝	赵文成
唐德全	徐平明	徐宗燮	梁晋旭	曾寒松
曾兴发	喻贞踊	樊代兴	廖长清	蓝家贵

修改 魏有德 唐德全 叶长春

校审 肖成勋

校对、制图 梁晋旭 向朝进 杜 斌

前 言

为推动我省初中数学课外活动的开展，我曾先后组稿出版了两套初中数学奥林匹克辅导书，从返回的信息知还是比较受欢迎的。近几年我省数学普及工作蓬勃发展，我省的中学生在国内“冬令营”和国际数学奥林匹克中取得的突出成绩从一个侧面也说明了它所起的作用。

国家教委初中义务教学大纲的颁布、实施，中国数学会初中数学竞赛大纲的修改（简称“双纲”），为开展初中数学课外活动提出了新精神和新要求，因此有必要重新为初中学生提供一套适应新形势的教材，以便更好地推动我省初中数学课外活动的开展。我们编写这套书遵循了如下原则：

1. 不超“双纲”

这套教材严格控制在“双纲”的知识范围内，并以巩固、提高和补充课内所学知识为主，辅以竞赛知识的讲解。读者只要把课内所学的内容学好，就可以顺利地学习这本教材，不需补充其他知识。

2. 与课内严格同步

数学课外活动的开展必须与课内教学密切配合，才能既促进初中数学教学质量的提高，又使学生开阔视野，数学思想、方法得到培养。因此，我们这套教材严格与课内教学次序同步，无需超前补充其他知识和方法就可阅读。

3. 大众化、普及型、少而精

“以普及为主，在普及基础上提高”、“减少内容、降低难度”是我们中国数学会和省数学会搞初中数学普及工作的基本原则。这套教材删去了过去“辅导讲座”中许多竞赛大纲

不要求的内容，适当地降低难度和要求，真正体现教材的大众化、普及型。在我主持的省数学会初中数学奥林匹克班的试用中，反映是：老师好辅导，学生易于接受。

4. 多练悟要领

做练习是学习的一个重要环节。它既能达到巩固所学知识，又能从中学到新知识、新方法和技巧，培养学生的独立思维能力。我们这套书几乎在每讲的后面都配有适量的A、B两组练习。在一般情况下，A组以巩固、提高课内知识多些，是基本要求；B组涉及竞赛题多些，属于较高要求，老师和学生可根据实际情况选用。书末配有较详解答供参考。

根据省数学会数学奥林匹克班试用此教材的实践经验，我建议：(1) 各数学奥林匹克学校(班)、课外活动小组在使用这套教材时，要先用点时间复习一下相关讲的课内基础知识，借以达到承前启后的作用，收到更好的效果；(2) 各分册所安排讲的次序不一定是“教学”次序，根据实际情况可先后调整，并只选讲其中一部分(包括一讲内的某些例子)，其余留给学有余力的学生自学。

在编写这套教材过程中，曾多次得到我的同事好友中国数学会普及工作委员会主任裘宗沪、副主任杜锡录、副主任刘玉翘的赐教，在此我代表全体编者表示衷心地感谢！

感谢曾支持、帮助过我们的同仁们、朋友们！由于你们的无私奉献和通力合作才有今日四川普及工作的大好局面。在此致以崇高的敬意！

水平所限，编审中难免出现错误，恳请读者批评斧正！

魏有德

四川大学数学系(邮：610064) 一九九四年五月

目 录

一年级上期

第一讲	代数式	(1)
第二讲	归纳、猜想代数式	(10)
第三讲	有理数的概念及其巧算	(18)
第四讲	绝对值和相反数	(29)
第五讲	整式的加减	(39)
第六讲	带字母系数的一元一次方程	(44)
第七讲	同解方程简介	
	含绝对值的一元一次方程	(50)
第八讲	列方程解应用题 (一)	(57)
第九讲	列方程解应用题 (二)	(66)
第十讲	列方程解应用题 (三)	(76)
第十一讲	新运算	(83)
第十二讲	集合概念简介	(90)

一年级下期

第十三讲	带字母系数的二元一次方程组	(96)
第十四讲	一次方程组的应用问题	(103)
第十五讲	非常规的一元一次不等式 (组)	(110)
第十六讲	一元一次不等式 (组) 的应用	(116)
第十七讲	整式乘法	(122)

第十八讲	整式除法.....	(129)
第十九讲	数的大小比较.....	(137)
第二十讲	数的整除.....	(145)
第二十一讲	质数与合数.....	(154)
第二十二讲	质因数分解式的简单应用.....	(160)
第二十三讲	最大公约数与最小公倍数.....	(165)
第二十四讲	数的奇偶性及简单二色法.....	(171)
第二十五讲	简单不定方程.....	(180)
练习答案		(188)

一年级上期

第一讲 代数式

中学代数跟小学算术最明显的不同是：用字母表示量，并研究由这些字母、数和运算符号组成的代数表示式的数量关系。

所谓代数表示式(简称代数式)，就是由数、(表数的)字母和运算符号组成的式子。如， $3a+4b$ ， $2x^2+\frac{xy}{x+y}+1$ ，等等。

一、列代数式

列代数式的基本步骤：

(1)选设(基本)量。在题目涉及的多量中，确定一个或多个为基本量，并用字母表示。确定基本量的标准是：用它(们)能较容易的表示出题中所涉及的其他量或数量关系。

(2)用所设的字母表示题目中的其他相关量。

(3)利用题中的关键词语(应用问题中则是已知结论)列出关系式即代数式。

例如，“甲数的4倍与乙数的一半的和”，它的基本量是甲数、乙数，我们可用 a 、 b 字母来分别表示它们；“甲数的4倍”、“乙数的一半”为其他相关量，我们可用基本量 a 、 b 表示为 $4a$ 、 $\frac{b}{2}$ ；最后抓住关键词语“和”，则“甲数的4倍与乙数的一半的和”的代数表示式为： $4a+\frac{b}{2}$ ，其中 a 、 b 分别表示甲、乙数。

例1 用代数式表示：甲、乙两数的积与乙数的四分之一

的差.

解 设 x, y 分别表示(基本量)甲、乙两数, 则所求的代数式为 $xy - \frac{1}{4}y$. (相关量为 $xy, \frac{1}{4}y$, 关键词为“差”).

说明 用字母表示数相乘时, 中间可不写乘号, 如 $x \times y$ 可写成 xy ; 字母与数字相乘时, 数字应写在字母的前面, 并省略乘号, 如 y 与 $\frac{1}{4}$ 相乘, 不要写成 $y \frac{1}{4}$, 应写为 $\frac{1}{4}y$.

代数式可以表示用语言文字叙述的数值关系, 用代数式表示这种数值关系时, 要注意语言文字所叙述的运算是什么以及它们的顺序.

例2 用代数式表示: a, b 两数的平方和与 x 的差.

分析 此题中有三种运算: 平方、和、差, 其运算顺序是:

$$a^2, b^2 \rightarrow a^2 + b^2 \rightarrow a^2 + b^2 - x$$

解 所求代数式为: $a^2 + b^2 - x$.

例3 如图 1·1 所示, 各小圆的半径都相等, 用代数式表示:

- (1) 阴影的边界长 l ;
- (2) 阴影部分的面积 S .

解 如图 1·1, 设小圆半径为 r .

(1) $l = \widehat{AB} + \widehat{BC} + \widehat{CO} + \widehat{OD} + \widehat{DA}$. 而 $\widehat{BC}, \widehat{CO}, \widehat{OD}, \widehat{DA}$ 弧长恰好均为小圆周长的四分之一, 所以它们的和就等于小圆周长 $2\pi r$; $\widehat{AB}$ 弧长为大圆周长的四分之一,

即 $\frac{1}{4} \times 2\pi \times 2r = \pi r$, 故 $l = 3\pi r$.

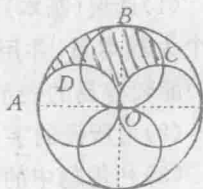


图1·1

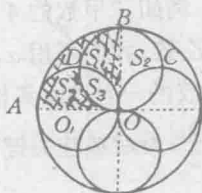


图1·2

(2) 根据题给的图形的特征,我们可以把阴影中 OB 右侧部分 S_2 移到 OA 上来(如图 1·2),这样就有

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} \times \text{大圆面积} - S_3 \\ &= \frac{1}{4} \pi (2r)^2 - [2(\frac{1}{4} \times \text{小圆面积}) - \text{正方形 } OO_1DE] \\ &= \pi r^2 - [2(\frac{1}{4} \times \pi r^2) - r^2] = \pi r^2 - \frac{1}{2} \pi r^2 + r^2. \end{aligned}$$

说明 (1) S_3 的求法中,前项 $2(\frac{1}{4} \times \text{小圆面积})$ 包含了正方形 OO_1DE 的面积和一个 S_3 ,所以减去正方形 OO_1DE 的面积后就为 S_3 ;

(2) S 的代数式以后还可以化简为 $(\frac{1}{2}\pi + 1)r^2$;

(3) 在应用问题中,选设基本量(用什么字母表示无关紧要,如:可用字母 x 表小圆半径,则所求的代数式为 $(\frac{1}{2}\pi + 1)x^2$.)是很重要的.选设好了,就容易求出代数式,否则,不易求出.如何才能选设好基本量呢?这就要根据题目内容,看选设的量能否容易表示出题中的其它数量关系.

注意:选设的量不一定唯一.例如:本例中也可设大圆半径为 R ,则有 $l = \frac{3}{2}\pi R$, $S = \frac{1}{4}\pi R^2 + \frac{1}{8}\pi R^2 + \frac{1}{4}R^2$ 或者 $\frac{1}{4}(\frac{1}{2}\pi + 1)R^2$. 它们与前者在形式上有区别,但实质上是一样.

例 4 火车从 A 城匀速的开往 B 城,经过 4 小时,一架飞机由 A 城飞往 B 城,它的速度是火车速度的 7 倍,并在 A 、 B 两城的中点处追上火车,求 A 、 B 两城间距离 S 的一个代数式.(假设火车和飞机都是沿 A 、 B 城的连结直线上行驶).

分析 由于飞机的速度是火车的速度的 7 倍,因此,若选

设火车速度(为基本量)为 v 千米/小时,用它就可表示飞机速度为 $7v$ 千米/小时,飞机起飞时,它与火车相距 $4v$ 千米.这样,我们就可以根据运动问题基本公式:路程=速度 $\times$ 时间,及它的变形公式得到解法.

解 设火车速度为 v 千米/小时,则飞机的速度为 $7v$ 千米/小时,飞机起飞时,它与火车相距 $4v$ 千米,当它们都到 A 、 B 两城的中点时,飞机追上火车的飞行时间等于

距离差 $\div$ 飞机与火车的速度差(见说明后的注)

$$=4v \div (7v-v) = \frac{2}{3} \text{ (小时)},$$

故 $\frac{S}{2} = 7v \times \frac{2}{3}$, 即 $S = \frac{28}{3}v$ 为所求.

说明 如果选设飞机的速度为 x ,则同样可得 S 的一个代数式 $\frac{4}{3}x$.

注:这个公式可以如下推得:设飞机到中点的时间为 t ,速度为 v_1 ,而火车到中点的时间为 $t+t_1$,速度为 v_2 ,则 $v_1t = (t+t_1)v_2$,即 $v_1t = v_2t + v_2t_1$,两边同减以 v_2t (等量减等量仍相等)得 $v_1t - v_2t = v_2t_1$,即 $(v_1 - v_2)t = v_2t_1$,两边同除以 $v_1 - v_2$ 得 $t = v_2t_1 \div (v_1 - v_2)$,即飞机追上火车的飞机时间(t)等于距离差(v_2t_1) $\div$ 飞机与火车的速度差($v_1 - v_2$).这个公式具有一般性.

二、代数式的值

代数式中字母代表它允许取的诸多数量(所以这些字母又叫变量).当这些字母取特定的数值时,其代数式就得相应的数值.

例 5 当 $x = 0.5$, $y = 2$ 时,代数式 $\frac{4x+3y}{xy}$ 的值 =

解 当 $x=0.5, y=2$ 时, $\frac{4x+3y}{xy} = \frac{4 \times 0.5 + 3 \times 2}{0.5 \times 2} = 8$.

例6 在整数 $0, 1, 2, \dots, 9$ 中, 质数有 x 个, 偶数有 y 个, 完全平方数有 z 个, 求代数式 $2x+y+3z$ 的值.

解 在 $0, 1, 2, \dots, 9$ 中, 质数有 $2, 3, 5, 7$ 四个, 故 $x=4$; 偶数有 $0, 2, 4, 6, 8$ 五个, 故 $y=5$; 完全平方数有 $0, 1, 4, 9$ 四个, 故 $z=4$, 因此代数式 $2x+y+3z=2 \times 4 + 5 + 3 \times 4 = 25$.

注: 完全平方数是指能写成 a^2 形式的数, 其中 a 为整数. 例如, $0=0^2, 1=1^2, 4=2^2, 9=3^2$. 则 $0, 1, 4, 9$ 为完全平方数.

例7 已知 $x=1\frac{7}{11}$, 求 $2(x-1)(11x-7)+3(x+\frac{4}{11})^3$ 的值.

解 由 $x=1\frac{7}{11}$ 知, $x-1=\frac{7}{11}, x+\frac{4}{11}=2$, 所以

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 2 \times \frac{7}{11} \times (11 \times 1\frac{7}{11} - 7) + 3 \times 2^3 \\ &= 2 \times \frac{7}{11} \times 11 + 3 \times 8 = 38.\end{aligned}$$

说明 这里用了一点技巧来求值, 先求出 $x-1=\frac{7}{11}, x+\frac{4}{11}=2$. 当然, 也可以如例1那样直接把 $x=1\frac{7}{11}$ 代入求值.

例8 已知 $a-b=1, c-a=2$, 求 $(a-b)^3 + (c-b)^3 + (c-a)^3$ 的值.

分析 此题若要先从已知 $a-b=1, c-a=2$ 中求出 a, b, c 的值(然后再代入求代数式的值), 是不可能的. 由观察知, 只需求出 $c-b$ 的值就可求出要求的代数式的值.

解 根据等量加等量仍相等, 可得(已知两式相加): $(c-a) + (a-b) = 2+1$ 即 $c-b=3$, 故所求的值等于 $1^3 + 3^3 + 2^3 =$

例9 已知 $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{7}$, 求 $\frac{3x+y+z}{y}$ 的值.

分析 如例8的分析, 已知条件只有两个独立等式, 要从这两个已知等式分别求出 x, y, z 的值是不可能的. 这里我们采用“比值”转换的方法来求值.

解 令 $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{7} = k$, 则 $x = 3k, y = 4k, z = 7k$,

故 $\frac{3x+y+z}{y} = \frac{3 \times 3k + 4k + 7k}{4k} = \frac{20k}{4k} = 5$.

求代数式值的方法除最基本的方法(直接代入法)外, 例7、8、9分别介绍了其他一些方法: 变形代入法(例7), 整体代入法(例8), 转换代入法(例9). 求值的方法还很多, 随着学习的深入, 以后我们会逐步介绍.

三、简单的列方程举例

例10 用代数式表示(或列方程)

(1) 浓度为63%的酒精溶液 x 克, 其中含纯酒精多少克? 含水多少克?

(2) 有含盐15%的盐水60克, 要配制含盐40%的盐水, 应加盐多少克或蒸发掉多少克水?

分析 (1) 在浓度问题中, 必须掌握浓度计算公式: 浓度 = $\frac{\text{溶质重量}}{\text{溶液重量}}$. 在酒精溶液中, 纯酒精是溶质; 在盐水中, 盐水是溶液, 纯盐是溶质. (2) 在列方程解浓度问题时, 以配制过程前与配制过程后的溶质相等为建立方程的依据.

解 (1) 浓度为63%的酒精溶液 x 克中含纯酒精 = $\frac{63}{100}x$

克,含水 $(x - \frac{63}{100}x)$ 克.

(2) 如果设加盐 x 克,则方程为

$$60 \times 15\% + x = (60 + x) \cdot 40\%.$$

如果设应蒸发掉水 y 克,则方程为

$$60 \times 15\% = (60 - y) \cdot 40\%.$$

同学们可以自己比较一下问题(2)中两个方程的异同.

例 11 列方程解应用题:某部队行军,步行 40 千米后,再乘车 3 小时,共行军 136 千米,这个部队乘车每小时行多少千米?

解 设部队乘车每小时行 x 千米,那么 3 小时行 $3x$ 千米. 据题意得方程 $40 + 3x = 136$

$$\therefore 3x = 96, \quad \therefore x = 32.$$

答:部队乘车每小时行 32 千米.

练习一

(A 组)

1. 用代数式表示:

(1) 比 x 与 y 的积大 13 的数;

(2) 比 a, b 两数的和的 2 倍小 c 的数;

(3) a, b, c 三数的立方和减去 a, b, c 三数的积.

2. 设甲数为 x , 乙数 y , 用代数式表示:

(1) 甲数的立方与 3 的差除以乙数的商;

(2) 甲、乙两数的立方差与甲、乙两数乘积的和;

(3) 甲数的 4 倍与乙数的一半的和乘以甲数的平方的 3 倍与乙数的立方的差.

3. 填空:

(1) a 亩地亩产花生 m 千克, b 亩地亩产花生 n 千克, 则两地共产花

生____千克·平均亩产花生____千克·

(2)有含盐 5% 的盐水 a 千克,其中含纯盐____千克,含水____千克;若在这种盐水中加盐 b 千克,这时纯盐与盐水的比是____.

4. 有一片稻田需要灌水,单独用甲抽水机 a 小时可以灌完,单独用乙抽水机 b 小时可以灌完,用代数式填空:

(1)单独用甲抽水机,1 小时完成任务的____;

(2)单独用乙抽水机,1 小时完成任务的____;

(3)同时使用甲、乙抽水机,1 小时完成任务的____.

5. 新建的四川成渝高等级公路长约 340 千米,设汽车每小时行 v 千米,用代数式填空:

(1)从成都到重庆需行____小时;

(2)如果每小时少行 3 千米,需行____小时;

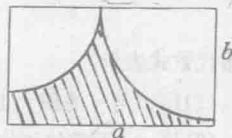
(3)如果每小时多行 10 千米,可以提前____小时到达.

6. (1)已知 $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{25}$ 时,求代数式

$$\frac{50}{63}(a^2 - b) - \frac{5}{9}(a - b - 0.16) + 0.625(1 - a) \div \left(\frac{21}{20} + 5b\right) \text{ 的值.}$$

(2)如图 1·3,以长方形的两个顶点分别作两个半圆,求阴影部分的面积 S ,并计算当 $a=30$, $b=24$ 时, S 的值.

图 1·3



(3)已知 $x : y : z = 4 : 5 : 6$, 则 $\frac{2xy + (z-x)^2}{xz + y^2}$ 的值是多少?

7. 三个连续偶数,中间的一个是 $2n$,用代数式表示这三个偶数的平方和,当 $n=3$ 时,求这三个数的平方和.

8. 三个连续整数的和是 141,设中间的一个是 x ,求这三个整数.

(B 组)

1. 将甲、乙两种糖混合出售,甲种取 a 斤,每斤 m 元.乙种取 b 斤,每斤 n 元,问混合后的每斤糖价为多少元时,才能保持分开售的收入?

2. 填空: 一个数 a 增加 $m\%$ 得另一数, 再将所得的另一个数减少它的 $m\%$ 得到_____.

3. 开挖一条渠道, 甲队单独挖 a 天可以完成, 甲队单独挖了 3 天后, 其余部分由其他队完成. 用代数式表示余下的任务.

4. 一长方形铁片如图 1.4, 现需将此铁片四个角分别截去边长 x 的小正方形, 做成一个无盖的长方形体盒子, 用代数式表示该盒子的容积.

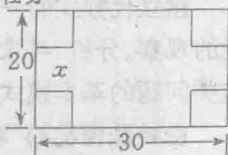


图 1.4

5. 一水池由甲抽水机单独注满需要 a 小时, 由乙抽水机单独注满水池需要 b 小时. 现单独开放甲抽水机 y 小时后, 再单独开放乙抽水机注满水池需要多少小时?

6. 某工厂第一个月的机器产量是 m 台, 第二个月比第一个月增产 $x\%$, 第三个月比第二个月增产 $x\%$, 求第三个月的产量.

7. 一人上山和下山的路程都是 S , 上山的速度是 v_1 , 下山的速度是 v_2 , 那么此人上山和下山的平均速度是(). ①

(A) $\frac{v_1+v_2}{2}$

(B) $\frac{2S}{v_1+v_2}$

(C) $\frac{S}{\frac{S}{v_1} + \frac{S}{v_2}}$

(D) $\frac{2S}{\frac{S}{v_1} + \frac{S}{v_2}}$

① [注] 这类题型叫选择题, 本书的所有选择题都是单一选择题, 即给出的四个选项只有一个正确, 读者仅需把你判断的选择项记号字母填在括号内.