金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

2017

李永乐·王式安唯一考研数学系列

全国十二大考研辅导机构指定用书

数学历年真题权威解析

数学一

主编◎李永乐 王式安 季文铎

编委 王式安 刘喜波 李永乐 季文铎 武忠祥

（按姓氏笔画排序）

最佳搭配：《复习全书》+《660题》+《历年真题》

双色印刷

绝佳的阅读体验

哪里不会扫哪里

重难点视频讲解

APP扫书中二维码

详见封二使用说明

权威名师与命题专家联手打造 考试知识复习与能力培养并重

多角度讲解试题开拓解题思路 分析解答透彻易懂更有针对性

详尽地归纳总结典型解题方法 综合提高运用知识的分析能力

赠送

配套专属

练习册

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

金榜图书

JINBANG BOOKS · SINCE 1997

2017

李永乐 · 王式安唯一考研数学系列

全国十二大考研辅导机构指定用书

数学历年真题权威解析

数学一

主编 ◎ 李永乐 王式安 季文铎

编委 王式安 刘喜波 李永乐 季文铎 武忠祥

（按姓氏笔画排序）

西安交通大学出版社

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学历年真题权威解析. 数学一/李永乐，王式安，季文铎主编. —西安：西安交通大学出版社，2015. 11
ISBN 978-7-5605-8141-5

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①李…②王…③季…　Ⅲ. ①高等数学－研究生－入学考试－题解　Ⅳ. ①013－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 295584 号

书　　名：数学历年真题权威解析(数学一)
主　　编：李永乐　王式安　季文铎
责任编辑：张阳　张梁
出版发行：西安交通大学出版社
地　　址：西安市兴庆南路 10 号(邮编：710049)
电　　话：(029)82668315(总编办)
　　　　　(029)82668357　82667874(发行部)
印　　刷：保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：25. 25
字　　数：466 千字
版　　次：2016 年 1 月第 1 版
印　　次：2016 年 1 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5605-8141-5/O・522
定　　价：56. 80 元

金榜考研数学系列及使用说明

考研数学满分150分,数学在考研科目中的比重明显,同时又因数学学科本身的特点,考生的数学成绩历年来总是差别很大,因此有得数学者得考研之说。既然数学对考研成绩的意义如此重要,就有必要探讨一下影响数学成绩的主要因素。

本书编写老师们根据多年的命题经验和阅卷经验总结,发现考研数学命题的灵活性非常大,反映在命题中,不仅仅表现在一个知识点与多个知识点的考查难度不同,更多的是表现在考查多个知识点的综合上,这些题目在表达上多一个字或多一句话,难度都会千差万别。正是这些综合型题目拉开了考试成绩的距离,而构成这些难点的主要因素,实际上是最基础的基本概念、定理和公式的综合。同时,从阅卷反映的问题来看,考生答错题目的主要原因也是对基本概念、定理和公式记忆和掌握得不够熟练所致。总结为一句话,那就是:要想数学拿高分,就必须熟练掌握、灵活运用基本概念、定理和公式。

基于此,李永乐、王式安考研数学辅导团队结合多年来的考研辅导和研究,精心编写了本系列图书,目的就在于帮助考生有计划有步骤的完成数学复习,从基本概念、定理和公式的记忆,到对其的熟练运用,循序渐进。

一、本系列重点图书和复习建议

每年硕士研究生入学数学考试的时间一般都安排在上午,故建议考生们将数学的复习时间安排在每天早上9:00～12:00。基础、强化阶段,每天至少应安排2小时来复习数学,对于数学基础较差的同学建议提早复习基础知识,每天再多花点时间来做做习题。

重点图书	复习建议
《考研数学复习全书》	重视基础积累,纵向学习,夯实知识点 由于全书的编写起点是学完大学数学课程,所以建议基础薄弱的同学,先花点时间整体的看看书中的理论知识,然后再看例题。以章或节为单位,学习新内容前要复习前面的内容,按照规律来复习,经过必要的重复会起到事半功倍的效果。系统复习,打好基础,特别是对大纲中要求的基本概念、理论、方法要系统理解和掌握。完成基础准备。另外按章节顺序完成相应的配套练习题,通过练习检验你是否真正地掌握了。
《数学基础过关660题》	在完成基础知识的学习后,有针对的做一些练习。熟练掌握定理公式和解题技巧,加强知识点的前后联系,体系化,系统化,分清重难点,让复习周期尽量缩短。 虽说书中都是选择题和填空题,同学们不要轻视,也不要一开始就盲目做题。看到一道题,要能分辨出是哪个知识点,考什么,然后做题过程中看看自己是否掌握了,应用的定理、公式的条件是否熟悉。这样才是真正做一道题。
《数学历年真题权威解析》	通过真题,进一步提高解题能力和技巧,达到实际考试的要求 第一阶段,看看各年真题,熟悉题型和常考点。 第二阶段,进行专项复习。 书中将真题按考点进行分类。对重点题型和自己薄弱的内容进行突破,达到全面掌握,不留考点空白。 第三阶段,按年份,逐年练习。

重点图书	复习建议
《高等数学辅导讲义》	单科强化 武忠祥老师的高数教学讲稿改编而成，系统阐述了高等数学的基础知识。例题都是经过严格筛选、归纳。多年经验总结，对同学们的重点、难点的把握更准确、更有针对性。认真研读，做到举一反三。
《线性代数辅导讲义》	单科强化 李永乐老师的代数教学讲稿改编而成，系统阐述了线性代数的基础知识。例题都是经过严格筛选、归纳。多年经验总结，对同学们的重点、难点的把握更准确、更有针对性。认真研读，做到举一反三。
《概率论与数理统计辅导讲义》	单科强化 王式安老师的概率教学讲稿改编而成，系统阐述了概率论与数理统计的基础知识。例题都是经过严格筛选、归纳。多年经验总结，对同学们的重点、难点的把握更准确、更有针对性。认真研读，做到举一反三。
《数学历年真题权威解析·试卷版》	考前真题真练，提高应考技巧 仿照真实试卷，独立试卷，答题卡，答题纸。模拟考场真实环境。按照考试的要求在规定时间去做一套真题，调动所有知识储备，调整心态，快速进入考试状态。做过的真题，自己要整理，总结的自己的薄弱环节，针对性复习，加深记忆。
《李永乐数学决胜冲刺6＋2》	冲刺模拟题 通过整套题的训练，进行总结和梳理。不同于重点题型的练习，需要全面的知识，要综合应用。必要时复习一下基本概念、公式、定理，准确记忆。

备注：以上内容仅供参考。各位同学可以根据自身的能力和学习习惯进行调整。

二、本书使用说明

本书完整收录了2005～2016年考研数学(一)的试题，还精选了其他年份或卷别的试题做为练习题。力争做到考点全覆盖，题型多样，重点突出，不简单重复。每道题给出的参考答案都有最常用最典型的解题方法。分析过程逻辑严谨，思路清晰，具有很强的可操作性，通过学习同学们可以独立完成同类题的解答。

同时还请教学经验丰富的老师对书中的经典题进行讲解，扫附在题目旁边的二维码即可观看。具体操作方式可见封二“本书二维码扫码使用说明”。

使用本书的同时，也可以配合使用本书作者编写的《基础过关660题》、《复习全书》等，提高复习效率。

前言

从真题中你能够了解一个真实的考研数学，寻找考研数学的规律

真题是教育部考试中心一届又一届命题组老师们集体智慧的结晶，题目经典，又有规律可循。为了帮助广大考生能够在较短的时间内，准确理解和熟练掌握考研数学考试的出题方式和解题规律，全面提高解题能力，进而更好地驾驭考试，本书编写团队依据15年的命题与阅卷经验，并结合十多年的考研辅导和研究精华，精心编写了本书，真正起到帮助同学们提高综合分析和综合解题能力的作用。

历年来，研究生入学考试数学的知识点没有太大变化，并且考查的重难点也比较稳定，都是往年考试反复考查的内容，依据往年考题掌握了这些重难点，我们就等于成功了一半。练真题，反复揣摩是有效把握这些重难点的最佳途径。考生们可以思考考过的知识点会再从什么角度命题，如何与没有考过的知识点结合起来考查，进而复习没有考过的知识点，这就可以从深度、广度上全方位把握知识点了。也因此，真题能够最有效地暴露我们的不足和复习误区，提供更有效的复习思路和策略，甚至可以说，真题就是最好的"辅导老师"，它告诉我们考试会考什么，怎么考，反过来又指导我们思考如何应对，也只有真题准确体现了考试所要求的能力、方法。

真题对大部分考生来说都是"陌生"的。真题命制科学，经过命题人的反复推敲，是市面上的练习题所无法比拟的。市面上的练习题难易适中、命制科学、贴近考试要求的很少。做真题，反复揣摩，能节省我们宝贵的复习时间，达到事半功倍的效果。紧紧抓住真题，在考试时也可以使我们做到从容应对。

本书共分三篇。第一篇给出最新的真题和解析，目的是让读者了解最新考题的结构形式和难易程度，方便复习备考；第二篇是历年的试题；第三篇将真题按考点所属内容分类并进行解析，各章编排如下：

1. **本章导读**

设置本部分的目的是使考生明白此章的考试内容和考试重点，从而复习时目标明确。

2. **试题特点**

本部分总结此章的历年考试出题规律，分析可能的出题点。

3. **考题详析**

本部分对历年真题的题型进行归纳分类，总结各种题型的解题方法。这些解法均来自各

位专家多年教学实践总结和长期命题阅卷经验。针对以往考生在解题过程中普遍存在的问题及常犯的错误，给出相应的注意事项，对每一道真题都给出解题思路分析，以便考生真正地理解和掌握解题方法。

4. 练习题

数学复习离不开做题，只有适量的练习才能巩固所学的知识。为了使考生更好地巩固所学知识，提高实际解题能力，本书作者精心选取历年真题和其他卷别的试题作为练习题，供考生练习，以便使考生在熟练掌握基本知识的基础上，能够达到轻松解答真题的水平。同时，每道练习题都配备了详细的参考答案和解析，以便考生解答疑难问题时能及时得到最详尽的指导。

建议考生在使用本书时不要就题论题，而是要多动脑，通过对题目的练习、比较、思考，总结并发现题目设置和解答的规律性。请大家一定要在今后的复习中，时刻想到将各个方面的知识融会贯通，做好知识的串联和总结，以检验自己对问题的把握程度，真正掌握应试解题的金钥匙，从而迅速提高知识水平和应试能力，取得理想分数。

另外，为了更好地帮助同学们进行复习，“李永乐考研数学辅导团队”特在新浪微博上开设答疑专区，同学们在考研数学复习中，如若遇到任何问题，即可在线留言，团队老师将尽心为你解答。请访问 weibo.com，并关注清华李永乐考研数学辅导团队。

希望本书能对同学们的复习备考带来更大的帮助。对书中的不足之处，恳请读者批评指正。

祝同学们复习顺利，心想事成，考研成功！

编者
2016 年 1 月

目录

第一篇　最新真题

第二篇　历年真题

第三篇　真题解析

★ 第一篇 ★

最新真题

绝密★启用前

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（一）

（科目代码：301）

考生注意事项

1. 答题前，考生须在试题册指定位置上填写考生姓名和考生编号；在答题卡指定位置上填写报考单位、考生姓名和考生编号，并涂写考生编号信息点。
2. 选择题的答案必须涂写在答题卡相应题号的选项上，非选择题的答案必须书写在答题卡指定位置的边框区域内，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸试题册上答题无效。
3. 填（书）写必须使用黑色字迹签字笔或钢笔书写，字迹工整，笔迹清楚；涂写部分必须使用 2B 铅笔填涂。
4. 考试结束，将答题卡和试题册按规定交回。

考生编号															
姓　名															

一、选择题:1～8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 若反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x$收敛,则

(A)$a<1$且$b>1$.　　(B)$a>1$且$b>1$.

(C)$a<1$且$a+b>1$.　　(D)$a>1$且$a+b>1$.

(2) 已知函数$f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1,\\ \ln x, & x\geqslant 1,\end{cases}$则$f(x)$的一个原函数是

(A)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1), & x\geqslant 1.\end{cases}$　　(B)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)-1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

(C)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$　　(D)$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

(3) 若$y=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$,$y=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$是微分方程$y'+p(x)y=q(x)$的两个解,则$q(x)=$

(A)$3x(1+x^2)$.　　(B)$-3x(1+x^2)$.

(C)$\frac{x}{1+x^2}$.　　(D)$-\frac{x}{1+x^2}$.

(4) 已知函数$f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n},\end{cases}$ $n=1,2,\cdots$,则

(A)$x=0$是$f(x)$的第一类间断点.　　(B)$x=0$是$f(x)$的第二类间断点.

(C)$f(x)$在$x=0$处连续但不可导.　　(D)$f(x)$在$x=0$处可导.

(5) 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$是可逆矩阵,且$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$相似,则下列结论错误的是

(A)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$与$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$相似.　　(B)$\boldsymbol{A}^{-1}$与$\boldsymbol{B}^{-1}$相似.

(C)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$与$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$相似.　　(D)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$与$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$相似.

(6) 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$,则$f(x_1,x_2,x_3)=2$在空间直角坐标下表示的二次曲面为

(A) 单叶双曲面.　　(B) 双叶双曲面.

(C) 椭球面.　　(D) 柱面.

(7) 设随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$,记$p=P\{X\leqslant\mu+\sigma^2\}$,则

(A)p随着μ的增加而增加.　　(B)p随着σ的增加而增加.

(C)p随着μ的增加而减少.　　(D)p随着σ的增加而减少.

(8) 随机试验E有三种两两不相容的结果A_1,A_2,A_3,且三种结果发生的概率均为$\frac{1}{3}$,将试验E独立重复做2次,X表示2次试验中结果A_1发生的次数,Y表示2次试验中结果A_2发生的次数,则X与Y的相关系数为

(A) $\frac{1}{3}$.　　(B) $-\frac{1}{3}$.　　(C) $\frac{1}{2}$.　　(D) $-\frac{1}{2}$.

二、填空题:9～14小题,每小题4分,共24分.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{1-\cos x^2}=$ ________.

(10) 向量场$\boldsymbol{A}(x,y,z)=(x+y+z)\boldsymbol{i}+xy\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$的旋度$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=$ ________.

(11) 设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则 $\mathrm{d}z\Big|_{(0,1)}=$ ________.

(12) 设函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+ax^2}$，且 $f'''(0)=1$，则 $a=$ ________.

(13) 行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=$ ________.

(14) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，样本均值 $\overline{x}=9.5$，参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8，则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

已知平面区域 $D=\left\{(r,\theta)\mid 2\leqslant r\leqslant 2(1+\cos\theta),-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$，其中 $0<k<1$.

(Ⅰ) 证明：反常积分 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(Ⅱ) 若 $y(0)=1,y'(0)=1$，求 $\int_0^{+\infty}y(x)\mathrm{d}x$ 的值.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y}$，且 $f(0,y)=y+1$，L_t 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,t)$ 的光滑曲线. 计算曲线积分 $I(t)=\int_{L_t}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y$，并求 $I(t)$ 的最小值.

(18)(本题满分 10 分)

设有界区域 Ω 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成，Σ 为 Ω 整个表面的外侧，计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(19)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1,0<f'(x)<\frac{1}{2}$，设数列$\{x_n\}$满足 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$

证明：

(Ⅰ)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛；

(Ⅱ)$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$.

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & a & 1\\ -1 & 1 & a\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & a\\ -a-1 & -2\end{bmatrix}$.

当 a 为何值时，方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解、有唯一解、有无穷多解？在有解时，求解此方程.

(21)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{A}^{99}$；

(Ⅱ)设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{BA}$，记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量(X,Y)在区域$D=\{(x,y)\mid 0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$上服从均匀分布,令
$U=\begin{cases}1, & X\leqslant Y,\\ 0, & X>Y.\end{cases}$

(Ⅰ)写出(X,Y)的概率密度;

(Ⅱ)请问U与X是否相互独立?并说明理由;

(Ⅲ)求$Z=U+X$的分布函数$F(z)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体X的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$ 其中$\theta\in(0,+\infty)$为未知参数,

X_1,X_2,X_3为来自总体X的简单随机样本,令$T=\max(X_1,X_2,X_3)$.

(Ⅰ)求T的概率密度;

(Ⅱ)确定a,使得aT为θ的无偏估计.

2016 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)参考答案

一、选择题

(1)【答案】 C.

【解析】 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx=\int_0^1\frac{dx}{x^a(1+x)^b}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^a(1+x)^b}$

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x^a(1+x)^b}}{\frac{1}{x^a}}=1$,则 $a<1$ 时,$\int_0^1\frac{dx}{x^a(1+x)^b}$ 收敛;

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^a(1+x)^b}}{\frac{1}{x^{a+b}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^b}=1,$$

则当 $a+b>1$ 时,$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^a(1+x)^b}$ 收敛,

故当 $a<1,a+b>1$ 时,$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^a(1+x)^b}$ 收敛.

故应选(C).

(2)【答案】 D.

【解析】 $F(x)=\begin{cases}\int 2(x-1)dx, & x<1,\\ \int\ln x dx, & x\geqslant1.\end{cases}$

$=\begin{cases}(x-1)^2+C_1, & x<1,\\ x(\ln x-1)+C_2, & x\geqslant1.\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to1^-}[(x-1)^2+C_1]=C_1,\lim\limits_{x\to1^+}[x(\ln x-1)+C_2]=-1+C_2$

则 $C_1=-1+C_2$,令 $C_1=C$,则 $C_2=1+C$

$$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2+C, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1+C, & x\geqslant1.\end{cases}$$

令 $C=0$,则 $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant1.\end{cases}$

故应选(D).

(3)【答案】 A.

【解析】 利用线性微分方程解的性质与结构.

由 $y_1=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2},y_2=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解,知 y_1-y_2 是 $y'+p(x)y=0$ 的解.

故$(y_1-y_2)'+p(x)(y_1-y_2)=0$,即 $-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot2x-2\sqrt{1+x^2}p(x)=0$,

从而得 $p(x)=-\frac{x}{1+x^2}$.

又$\dfrac{y_1+y_2}{2}$是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的解,代入方程,有

$$[(1+x^2)^2]'+p(x)(1+x^2)^2=q(x),$$

解得 $q(x)=3x(1+x^2)$. 因此应选(A).

【评注】 本题也可把题中两个解代入到微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$,得到关于 $p(x),q(x)$ 的方程组,解方程组可求得 $p(x),q(x)$.

(4)【答案】 D.

【解析】 $f'_-(0)=1, f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{n}}{x}\quad\left(\dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n}\right)$

$$1\leftarrow\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{\frac{1}{n}}{x}<\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}\rightarrow 1$$

则 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{n}}{x}=1$.

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

(5)【答案】 C.

【解析】 由已知条件,存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

那么 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{-1})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1$,其中 $\boldsymbol{P}_1=(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{-1}$

即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似,(A) 正确.

$\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{P}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}$

即 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似,(B) 正确.

又 $\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.

即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 和 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似,(D) 正确.

从而应选(C).

特别地,$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$相似.

但 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix}$和 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$不相似.

(6)【答案】 B.

【解析】 二次型矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$$

由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $5,-1,-1$.

那么经直角坐标变换二次型的标准形为

$$5y_1^2-y_2^2-y_3^2=2$$

双叶双曲面.

(7)【答案】 B.

【解析】 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，所以$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$，其分布函数为$\Phi(x)$.

现 $p = P\{X \leqslant \mu+\sigma^2\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \sigma\right\} = \Phi(\sigma)$，由标准正态分布函数的单调性，知$p$随着$\sigma$的增加而增加，故答案应选(B).

(8)【答案】 D.

【解析】 由 $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$，所以 $X \sim B(2,\frac{1}{3})$，$Y \sim B(2,\frac{1}{3})$.

X与Y的相关系数为$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$，

显然 $EX = EY = \frac{2}{3}$，$DX = DY = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$，

$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - EXEY$，为求$E(XY)$，先求出$XY$的分布.

X和Y的取值均为0,1,2，所以XY的取值应为0,1,2,4.

$P\{XY = 4\} = P\{X = 2,Y = 2\} = 0$.因为在2次试验中不可能2次$A_1$和2次$A_2$.

同理 $P\{XY = 2\} = P\{X = 1,Y = 2\} + P\{X = 2,Y = 1\} = 0$.

$$P\{XY = 1\} = P\{X = 1,Y = 1\} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}, P\{XY = 0\} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

总之XY的分布为

XY	0	1	2	4
P	$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	0

，$EXY = \frac{2}{9}$.

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - EX \cdot EY = \frac{2}{9} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{2}{9}, \rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{-\frac{2}{9}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}} = -\frac{1}{2}.$$

【评注】 本题也可用对称性来求解.

设Z表示2次试验中结果A_3发生的次数，显然$X+Y+Z=2$，X,Y,Z均服从分布$B(2,\frac{1}{3})$

根据对称性 $DX = DY = DZ = \frac{4}{9}$ 和 $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X,Z)$，

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{Cov}(X,2-X-Z) = \mathrm{Cov}(X,2) - \mathrm{Cov}(X,X) - \mathrm{Cov}(X,Z)\\ &= 0 - DX - \mathrm{Cov}(X,Y).\end{aligned}$$

即 $2\mathrm{Cov}(X,Y) = -DX$

所以 $\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DX}} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{DX} = -\frac{1}{2}$.

二、填空题

(9)【答案】 $\frac{1}{2}$.

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{1-\cos x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\mathrm{d}t}{\frac{1}{2}x^4}$