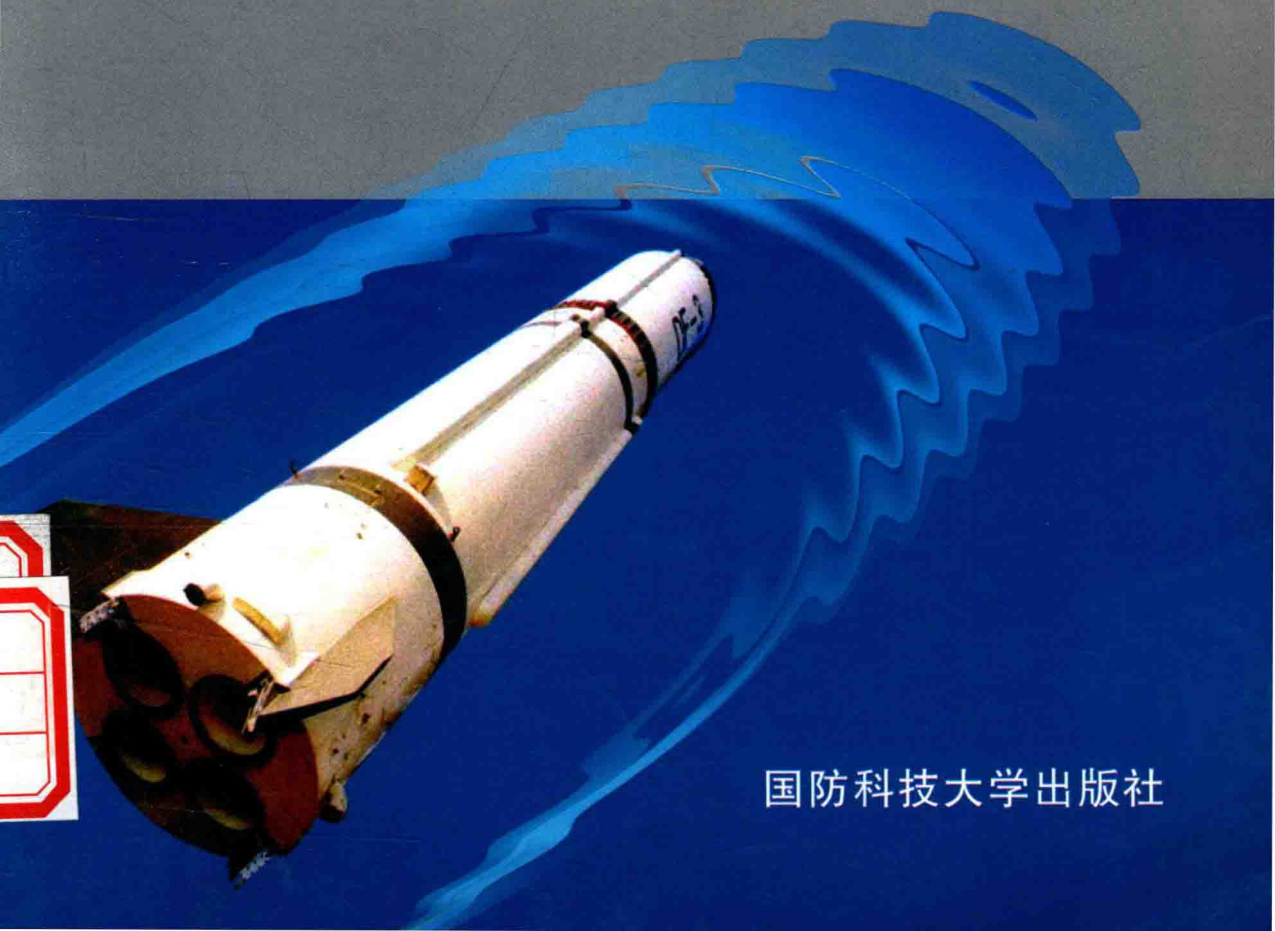




远程火箭 弹道学

贾沛然 陈克俊 何力 编著

YUANCHENG HUOJIAN
DANDAOXUE



国防科技大学出版社

远程火箭弹道学

贾沛然 陈克俊 何力 编著

国防科技大学出版社
湖南·长沙

内容简介

本书深入地分析了弹道导弹和运载火箭及其有效载荷的运动状态,建立了其运动微分方程,揭示了飞行器运动的客观规律,并对弹道学有关的工程实际问题如火箭设计参数选择、多级火箭设计及飞行程序选择等进行了介绍。本书适用于飞行力学专业的教学,对航天飞行器总体设计及控制系统等专业的本科生、研究生及从事这方面工作的设计、试验、应用单位的科技工作者也有参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

远程火箭弹道学/贾沛然,陈克俊,何力编著. —长沙:国防科技大学出版社,1993.12
(2009.6重印)

ISBN 978-7-81024-277-6

I. 远… II. ①贾… ②陈… ③何… III. 火箭弹道—弹道学 IV. TJ013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 029766号

国防科技大学出版社出版发行

电话:(0731)4572640 邮政编码:410073

<http://www.gfkdcbs.com>

责任编辑:石少平 责任校对:黄 煌

新华书店总店北京发行所经销

国防科技大学印刷厂印装

*

开本:787×1092 1/16 印张:17.25 字数:409千

2009年6月第1版第2次印刷 印数:1-1000册

ISBN 978-7-81024-277-6

定价:35.00元

序 言

弹道导弹和运载火箭是以火箭发动机为动力,在控制系统作用下按预定的轨迹飞行至目标点或进入轨道的飞行器。弹道导弹是无人驾驶的进攻性武器,它的有效载荷是弹头;运载火箭是航天运载工具,它的有效载荷是航天器(人造地球卫星、载人飞船、航天站或空间探测器等)。

为了保证飞行器能完成预定的任务,在研制、试验和实际应用过程中,均必须掌握飞行器的机械运动规律。这样,在设计过程中,才能正确地选择飞行器的参数(如起飞重量、发动机推力和控制系统参数等),选择合理的飞行弹道,保证飞行器按预定规律运动;在飞行试验过程中,才能正确评定飞行试验结果,对飞行器及其各分系统的特性作出鉴定;在具体应用中,才可能根据具体任务确定发射诸元,使飞行器准确入轨或攻击目标。

研究这类飞行器运动规律的专门学科为飞行力学。它是应用力学的一个新分支。飞行力学与研究一般力学对象运动规律的理论力学既有区别又有联系。在理论力学中给出了一般力学对象作机械运动时所应遵循的普遍规律和描述其运动的运动微分方程。飞行力学则根据理论力学的普遍规律,深入地分析弹道导弹和运载火箭及其有载荷这一特定对象作机械运动时的特殊矛盾,建立描述其运动的微分方程,揭示飞行器运动的客观规律,并运用这些规律来解决工程实际问题。由于飞行器是一个复杂的系统,描述其运动的微分方程组,在战术、技术所要求的精度指标愈高时,就愈为复杂,在工程上常将这类飞行器的运动分为质心的运动和绕质心的运动两部分进行研究,相应地飞行力学也就分为弹道学和动态分析两部分内容。

1980年由贾沛然、沈为异合写的《弹道导弹弹道学》铅印教材,是在国防科技大学(前身为中国人民解放军军事工程学院)自1958年建立飞行力学专业以来多年的教学和科研基础上写成的,这与肖峰教授、任莹教授的工作基础是分不开的。在十多年的教学科研实践及有关单位使用实践的基础上,考虑到我国航天事业的发展状况,参阅大量国内、外近年来的有关书籍和论文,写成这本《远程火箭弹道学》。

全书共九章。第一章介绍学习本书所用的一般知识;第二、三章分析飞行

器在主动段飞行中所受到的作用力和力矩,介绍控制系统中惯性器件工作原理,对主动段运动方程进行了严格的推导,并讨论了保证一定精度的计算方程;第四、五章建立自由飞行段轨道方程,对以弹头为对象的自由段射程、飞行时间与主动段终点参数关系等进行了讨论,介绍了地球旋转对自由段射程及误差系数的影响及考虑地球扁率的自由段微分方程;第六章讨论再入飞行器的零攻角再入及有升力再入问题,考虑到再入飞行器的发展,以总攻角的形式建立再入运动微分方程,并讨论再入弹道过载、受热等限制及回收走廊等特殊问题;第七章对飞行器主动段运动特性进行了分析,讨论了火箭总体设计中的参数选择问题;第八章专门就多级火箭的设计参数选择问题进行讨论;第九章介绍了主动段飞程序选择的工程方法及优化设计方法,并对远程多级固体火箭的能量管理问题进行了讨论。

本书是为飞行力学专业学生所写的专业基础教材,也适用于总体设计、火箭自动控制等专业的学生,对从事航天飞行器飞行力学、总体设计及控制系统的科技工作者及试验、使用部队也有参考价值。

在编写本书时,除了作者所在教研室的同志们给予了关心、支持外,也得到设计部门、兄弟院校及应用单位一些科学技术工作者的关心,不少同志为我们提供资料,提出有益的建议,作者在此对所有这些同志表示衷心的感谢。

本书第一、二、三、四、五、七、八各章及附录由贾沛然执笔,何力和陈克俊分别编写第六章和第九章,最后由贾沛然负责全书的统稿及审定工作。

鉴于我们水平有限,书中定还存在缺点和错误,恳请读者指正。

贾沛然

陈克俊

何力

1993年5月

主要符号表

- a ——大气音速;加速度;椭圆的长半轴;
 a_c ——哥氏加速度;
 a_e ——牵连加速度;地球椭球体的长半轴;
 A ——大地方位角;
 b ——椭圆的短半轴;
 b_e ——地球椭球体的短半轴;
 B ——大地纬度;内罚函数;
 c ——椭圆的半焦距;落点;
 C_x, C_y, C_z ——阻力、升力、侧力系数;
 C_{x1}, C_{y1}, C_{z1} ——轴向力、法向力、横向力系数;
 $c.m$ ——质心;
 $c.p$ ——压力;
 D_M ——火箭最大直径;
 e ——轨道偏心率;
 E ——总能量;偏近点角;
 f ——引力常数;真近点角;
 g ——重力加速度;
 g ——引力加速度;
 G ——重量;
 h ——几何高度;单位质量质点对地心的动量矩;
 i ——轨道倾角;
 I_{x1}, I_{y1}, I_{z1} ——绕 x_1, y_1, z_1 轴的转动惯量;
 J ——杰弗里斯常数;目标函数;
 J_2 ——地球引力势中的系数;
 l_k ——火箭的长度;
 L ——射程;总升力;
 m ——质量;
 $\dot{m} = \left| \frac{dm}{dt} \right|$ ——质量秒耗量;
 m_{x1}, m_{y1}, m_{z1} ——滚动、偏航、俯仰力矩系数;
 M ——马赫数;力矩;平近点角;卯酉中心;
 M_{x1}, M_{y1}, M_{z1} ——滚动、偏航、俯仰力矩;
 M_{st} ——静稳定力矩;
 M_c ——控制力矩;
 n ——沿椭圆轨道的平均角速度;过载;
 N ——总法向力;火箭级数;
 O ——发射点;
 O_1 ——火箭质心(重心);
 O_E ——地心;
 p ——大气静压力(压强);
 P ——发动机推力;圆锥截线半通径;罚函数;
 P_e ——有效推力;
 P_M ——起飞载面负荷;
 P_{sp} ——发动机比推力;
 q ——动压(速度头);热流;
 Q ——总吸热量;
 r ——地心距;
 R ——地球半径;气体常数;
 S_e ——喷口截面积;
 S_M ——主动段火箭最大横截面积;再入段再入飞行器最大横截面积;
 t ——时间;
 T ——动能;周期;绝对温度;被动段飞行时间;
 u_e ——发动机排气速度;
 u'_e ——发动机有效排气速度;

U ——引力势；
 v ——飞行速度；
 V ——位能；
 W ——位速度；
 W_D ——需要的视速度；
 W_e ——剩余的视速度模量；
 W_M ——视速度量模量；
 \dot{W} ——视加速度；
 x_g ——火箭重心到顶点的距离；
 x_p ——火箭压心到顶点的距离；
 $X、Y、Z$ ——空气阻力、升力、侧力；
 $X_1、Y_1、Z_1$ ——空气动力的轴向力、法向力、横向力；
 z ——理想速度比；
 α ——攻角(迎角)；地心方位角；
 β ——侧滑角；射程角；
 γ ——滚动角；
 $\delta_\varphi、\delta_\psi、\delta_\gamma$ ——俯仰、偏航、滚动通道的等效航偏角；
 ϵ ——结构系数；
 ζ ——侧向角偏差；
 η ——总攻角；
 θ ——速度倾角；
 Θ ——速度方向对当地水平面的倾角；
 λ ——经度；有效载荷比；
 μ ——重力方向对地心矢径的偏角；空气分子量；
 μ_1 ——引力方向对地心矢径的偏角；
 μ_k ——结构比；
 ν ——能量参数；倾侧角；
 ν_0 ——火箭重推比；
 ρ ——空气密度；发射点至空中一点的距离；

σ ——航迹偏航角；
 $\dot{\sigma}$ ——椭面矢径的面积速度；
 φ ——箭体俯仰角；
 ϕ ——地心纬度；
 ψ ——偏航角；
 ω ——角速度；近地点角距；
 ω_e ——地球自转角速度；
 Ω ——升交点角距。

上角码

O ——单位矢量；
 \sim ——标准值。

下角码

a ——远地点；
 av ——平均的；
 A ——绝对的；
 b ——箭体；
 c ——落点；
 e ——再入点；喷口出口面中心点；
 i ——多级火箭的级数；
 k ——主动段终点；
 $m、max$ ——最大值；
 min ——最小值；
 \dot{O} ——发射点；
 opT ——最佳值；
 p ——近地点；
 pr ——程序；
 r ——相对的；
 T ——平移坐标系的；
 tot ——总的；
 u ——有效载荷；
 V ——真空的；
 o ——地面

目 录

第一章 一般知识

- § 1.1 地球的运动及形状 (2)
- § 1.2 坐标系间的方向余弦阵及矢量导数的关系 (5)
- § 1.3 常用坐标系及其相互转换 (7)
- § 1.4 变质量力学基本原理 (16)

第二章 作用在火箭上的力和力矩

- § 2.1 附加力、附加力矩及火箭发动机特性 (23)
- § 2.2 引力和重力 (30)
- § 2.3 地球大气与空气动力、气动力矩 (38)
- § 2.4 控制系统、控制力和控制力矩 (52)

第三章 空间一般运动方程及计算方程

- § 3.1 远程火箭矢量形式的动力学方程 (61)
- § 3.2 地面发射坐标系中空间弹道方程 (62)
- § 3.3 地面发射坐标系中的空间弹道计算方程 (72)
- § 3.4 在速度坐标系内建立的空间弹道方程 (78)

第四章 飞行器的自由飞行段运动

- § 4.1 自由飞行段的轨道方程 (83)
- § 4.2 轨道方程式的讨论 (85)
- § 4.3 射程与主动段终点参数的关系 (95)
- § 4.4 导弹被动段飞行时间的计算 (102)
- § 4.5 误差系数 (111)

第五章 相对于旋转地球的自由段参数

- § 5.1 确定导弹弹道相对参数的运动学方法 (124)
- § 5.2 关机点绝对参数与轨道根数的关系 (128)

§ 5.3	考虑地球旋转的误差系数	(132)
§ 5.4	扁形地球下自由飞行段弹道	(138)
第六章 再入段弹道		
§ 6.1	再入段运动方程	(140)
§ 6.2	零攻角再入时,运动参数的近似计算	(151)
§ 6.3	有升力再入弹道	(163)
第七章 主动段运动特性及设计参数选择		
§ 7.1	用于方案论证阶段简化的纵向方程	(188)
§ 7.2	主动段运动特性分析	(189)
§ 7.3	主动段终点速度、位置及全射程计算	(195)
§ 7.4	设计参数的选择	(205)
第八章 多级火箭		
§ 8.1	多级火箭的参数及理想速度	(210)
§ 8.2	多级火箭各级载荷比的分配	(213)
§ 8.3	多级火箭的级数与火箭理想速度和总有效载荷比的关系	(216)
§ 8.4	考虑速度损失时各级结构比的选择	(222)
第九章 主动段飞行程序的选择		
§ 9.1	飞行程序的作用及选择飞行程序的原则	(226)
§ 9.2	飞行程序选择的工程方法	(229)
§ 9.3	飞行程序优化设计方法	(244)
§ 9.4	远程固体火箭的能量管理	(247)
附录[I]	雷诺迁移定理	(254)
附录[II]	标准大气表	(257)
附录[III]	不考虑地球旋转的二阶误差系数	(264)
参考文献	(267)

第一章 一般知识

对于弹道导弹和航天飞行器,根据其在飞行过程中的受力情况,通常可将其飞行轨道分几段进行研究。首先根据飞行器主发动机工作与否,将飞行轨道分为两段,一是主动段,另一是被动段。而被动段则又可根据飞行器所受空气动力的大小分为自由飞行段和再入飞行段。将飞行轨道进行分段的目的是在不同的飞行段上可采用不同的方法来积分运动微分方程式,以求得飞行器运动的客观规律。

现以远程弹道为例介绍各飞行阶段的特点:

1. 主动段

从导弹离开发射台到主发动机停止工作为止的一段弹道。因为在这一飞行段中发动机一直工作,故称为主动段,或称动力飞行段。该段的特点是发动机和控制系统一直在工作,作用在弹道上的主要有重力及发动机推力、空气动力、控制力和它们产生的相应的力矩。导弹主发动机点火工作,当其提供的推力超过导弹所受的重力后,导弹从发射台起飞,作垂直上升运动。垂直上升段的持续时间为 10s 左右,此时离地面的高度约近 200m,速度约为 40m/s。此后,导弹在控制系统作用下开始“转弯”,并指向“目标”。随着时间的增长,导弹的飞行速度、飞行距离逐渐增大,而速度与发射点处地平线的夹角 θ 逐渐减小。当发动机关机时,亦即到主动段终点 K 时,导弹的速度约 7000m/s, K 点离地面的高度约为 200km,离发射点 O 的水平距离约为 700km。该段飞行时间,约为 200 至 300s。

2. 被动段

从主发动机推力为零起到导弹落向地面为止这一段弹道称为被动段。在被动段开始时,弹头与弹体已分离,这一段弹道也就是弹头的弹道。若在弹头上不安装动力装置与控制系统,则弹头依靠在主动段终点处获得的能量作惯性飞行。由于该段弹头不受发动机推力作用,因此将该段称为被动段或无动力飞行段。虽然在被动段中,不对弹头进行控制,但在此段作用在弹上力是可以相当精确地知道的,故而基本上可较准确地掌握弹头的运动规律,从而可保证弹头在一定射击精度要求下去命中目标。

前面已提及,被动段又可分为自由段和再入段,这主要是由于自由段的飞行高度较高,空气稀薄,可以略去空气动力的影响,而在再入段要考虑空气动力对弹头的作用。由于空气密度随高度变化是连续的,因而截然划出一条有、无空气的边界是不可能的,为了简化研究问题起见,人为地以一定高度划出一条边界作为大气边界层。事实上,一般离地面高度为 70km 左右处的大气密度只有地面大气密度的万分之一,因此可取该高度为自

由段与再入段的分界点。

(1) 自由段

因为远程导弹主动段终点高度约为 200km, 弹头由主动段终点飞行至再入点这一段是在极为稀薄的大气中飞行, 这时, 作用在弹头上的重力远大于空气动力, 故可近似地将空气动力略去, 即可认为弹头是在真空中飞行。我们将会知道, 自由段弹道可近似看作椭圆曲线的一部分, 并且此段弹道的射程和飞行时间占全弹道的 80% ~ 90% 以上。

考虑到对中近程导弹而言, 其主动段终点高度约在 100km 左右, 为讨论问题方便, 有时即将再入点取为与主动段终点等高度的点。

需要指出的是, 导弹在主动段运动时, 因受到空气动力矩和控制力矩的作用, 而产生绕质心的旋转运动。因此, 在主动段终点(即自由段起点)处, 导弹绕质心的旋转角速度不为 0, 并且由于弹头与弹体分离时的扰动, 从而使得在自由段不受空气动力矩和控制力矩作用的弹头不会保持其分离时的姿态, 而是以固定的角速度绕其质心自由地转动。

(2) 再入段

再入段就是弹头重新进入稠密大气层后飞行的一段弹道。弹道高速进入大气层后, 将受到巨大的空气动力作用, 由于空气动力的制动作用远远大于重力的影响, 这既引起导弹强烈的气动加热, 也使导弹作剧烈的减速运动。所以, 弹头的再入段弹道与自由段有着完全不同的特性。

为了后面集中篇幅研究远程火箭各段的运动规律, 在本章中, 就地球运动及形状; 坐标系间方向余弦阵及矢量导数的关系; 常用坐标系及其相互转换; 变质量力学基本原理等进行介绍。

§ 1.1 地球的运动及形状

火箭是从地球上发射出去的。我们关心火箭相对于地球的运动状态、轨迹, 作为武器系统的导弹, 它在地球上的落点位置是关键参数。因此, 必须对地球的运动规律及形状有一定的认识。

1. 地球的运动

常识所知, 作为围绕太阳运动的八大行星之一的地球, 它既有绕太阳的转动(公转), 也有绕自身轴的转动(自转)。

地球质心绕太阳公转的周期为一年, 轨迹为一椭圆。椭圆的近日距离约为 1.471 亿 km, 远日距离约为 1.521 亿 km, 是一个近圆轨道。

地球自转是绕地轴进行的。地轴与地球表面相交于两点, 分别称为北极和南极。地球自转角速度矢量与地轴重合, 指向北极。

地轴在地球内部有位置变化, 它反映为地球两极的移动, 称为极移。极移的原因是地球内部和外部的物质移动。极移的范围很小, 就 1967 年至 1973 年的实际情况而论, 这个范围仅有 15m 左右。

地球除极移外还有进动。地球为一扁球体,过地心作垂直于地轴的平面,它与地球表面的截痕称为赤道。太阳相对地球地心运动轨道称为黄道。月球相对地心运动轨道称为白道。由于黄道与赤道不共面,两轨道面的夹角为 $23^{\circ}27'$,而白道比较靠近黄道,白道平面与黄道平面的夹角平均为 $5^{\circ}9'$,因此太阳和月球经常在赤道平面以外对赤道隆起部分施加引力,这是一种不平衡的力。如果地球没有自转,该力将使地球的赤道平面逐渐靠近黄道平面。由于地球自转的存在,上述作用力不会使地轴趋向于黄轴,而是以黄轴为轴作周期性的圆锥运动,这就是地轴的进动。地轴的进动方向与地球自转方向相反,进动的速度是每年 $50.24''$,因此进动的周期约为 $25,800$ 年。黄道平面与赤道平面的交线与地球运行轨道有两个交点,即所谓的春分点和秋分点。春分点是指太阳相对于地心运动时,由地球赤道面的南半球穿过赤道面的点。秋分点则是太阳由赤道面北半球穿过赤道面的点。由于地轴的进动,春分点在空中是自东向西移动的。

此外,由于白道平面与黄道平面的交线在惯性空间有转动,从北黄极看该交线按顺时针方向每年转动约 $19^{\circ}21'$,约 18.6 年完成一周,致使月球对地球的引力作用也同样有周期性变化,从而引起地轴除绕黄轴有进动外还存在章动。

由上述简介可见,地球的运动是一种复杂运动。

在研究运载火箭及远程导弹的运动规律时,上述影响地球运动的因素中,除地球自转外,均不予考虑,因为它们对火箭及导弹飞行运动规律的影响是极小的。因此,本书以后的讨论中即认为地球的地轴在惯性空间内的指向不变,地球以一常值角速度绕地轴旋转。

为了描述地球的自转角速度,则需用到时间计量单位。由于人们的日常生活和上下班的工作日在很大程度上由太阳所决定,因此,把真太阳相继两次通过观测者子午圈所经历的时间间隔称为一个真太阳日。但真太阳相对地心的运动是在黄道平面作椭圆运动,真太阳日的长度不是常值,不便生活中使用。为此,人们设想一个“假太阳”,它也和真太阳一样,按相同的周期及同一方向绕地球运行,但有两点差别:

- (i) 它的运行轨道面是赤道平面,而不是黄道平面;
- (ii) 运动速度是均匀的,等于真太阳在黄道上运动速度的平均速度。

这样就将“假太阳”两次过地球同一子午线的时间间隔称为一个平太阳日。一个平太阳日分为 24 个平太阳时,由于平太阳日是从正午开始,这就把同一白天分成两天。为方便人们生活习惯,将子夜算作一日的开始,所以实际民用时要比平太阳时早开始 12h 。

地球绕太阳公转周期为 365.25636 个平太阳日。从图 1-1 可看出,地球旋转一周所要的时间 t 较一个平太阳日要短,也即地球在一个平太阳日要转过的角度比 360° 要多 $360^{\circ}/365.25636 \approx 1^{\circ}$ 。显然,地球绕太阳公转一周时,地球共自转了 366.25636 圈。因此可得地球自转一周所要的时间为

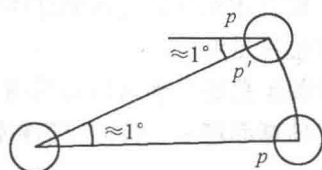


图 1-1 平太阳日与公转关系示意图

$$t = \frac{365.25636 \times 24 \times 3600\text{s}}{366.25636} = 86164.099\text{s}$$

故得地球自转角速度为

$$\omega_e = \frac{2\pi}{t} = 7.292115 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

2. 地球的形状

地球是一个形状复杂的物体。由于地球自转,使其形成一个两极间的距离小于赤道直径的扁球体。地球的物理表面也极不规则,近 30% 是大陆,近 70% 为海洋。陆地的最大高度是珠穆朗玛峰,高度是 8,848m;海洋最低的海沟是太平洋的马里亚纳海渊,深度是 11,521m。地球的物理表面实际上是不能用数字方法描述的。

通常所说的地球形状是指全球静止海平面的形状。全球静止海面不考虑地球物理表面的海陆差异及陆上、海底的地势起伏。它与实际海洋静止表面相重合,而且包括陆地下的假想“海面”,后者是前者的延伸,两者总称大地水准面,如图 1-2 所示。大地水准面的表面是连续的、封闭的,而且没有皱褶与裂痕。故是一个等重力势面。由于重力方向与地球内部不均匀分布的质

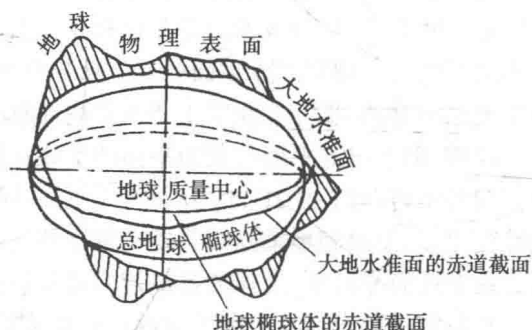


图 2-1 地球物现表面、大地水准面与总地球椭球体

质量吸引作用有关,因此,大地水准面的表面也是一个无法用数学方法描述的非常复杂的表面。实际上往往用一个较简单形状的对象来代替,要求该对象的表面与大地水准面的差别尽可能小,并且在此表面上进行计算没有困难。

作为一级近似,可以认为地球为一圆球,其体积等于地球体积。圆球体的半径 $R = 6,371,004\text{m}$ 。

在多数情况下,用一椭圆绕其短轴旋转所得的椭球体来代替大地水准面。该椭球体按下述条件确定:

- (i) 椭球体中心与地球质心重合,而且其赤道平面与地球赤道平面重合;
- (ii) 椭球体的体积与大地水准面的体积相等;
- (iii) 椭球体的表面对大地水准面的表面偏差(按高度)的平方和必须最小。

按上述条件确定的椭球体称为总地球椭球体。用它逼近实际的大地水准面的精度一般来说是足够的。

关于总地球椭球体的几何尺寸,我国采用 1975 年第十六届国际测量协会的推荐值:地球赤道半径(即总椭球体长半轴)

$$a_e = 6,378,140\text{m}$$

地球扁率

$$\alpha_e = \frac{a_e - b_e}{a_e} = 1/298.257$$

§ 1.2 坐标系间的方向余弦阵及矢量导数的关系

常识所知,要描述带有方向性的物理量,如一个矢量(力和力矩;运动速度和位置等)、一个物体的姿态,均需选用适当的坐标系来描述。在讨论、研究物体的运动特性和规律时,必须将不同坐标系所描述的物理量统一到一个坐标系中来进行。本节介绍任意两个坐标系间物理量的转换关系。

1. 坐标系之间的方向余弦阵

设 $o_p - x_p y_p z_p$ 及 $o_q - x_q y_q z_q$ 为任意两个原点及坐标轴方向均不重合的右手直角坐标系。令 P_Q 是把 x_q, y_q, z_q 坐标轴单位矢量变换成 x_p, y_p, z_p 坐标轴单位矢量的转换矩阵,则有

$$E_p = P_Q E_q \quad (1-2-1)$$

其中

$$E_p = \begin{bmatrix} x_p^0 \\ y_p^0 \\ z_p^0 \end{bmatrix}; E_q = \begin{bmatrix} x_q^0 \\ y_q^0 \\ z_q^0 \end{bmatrix}$$

将(1-2-1)式乘以 E_q 的转置矩阵 E_q^T , 并注意到 $E_q \cdot E_q^T = I$ (单位矩阵), 则有

$$P_Q = E_p \cdot E_q^T = \begin{bmatrix} x_p^0 \cdot x_q^0 & x_p^0 \cdot y_q^0 & x_p^0 \cdot z_q^0 \\ y_p^0 \cdot x_q^0 & y_p^0 \cdot y_q^0 & y_p^0 \cdot z_q^0 \\ z_p^0 \cdot x_q^0 & z_p^0 \cdot y_q^0 & z_p^0 \cdot z_q^0 \end{bmatrix} \quad (1-2-2)$$

上式可简记为

$$P_Q = [a_{ij}] \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1-2-3)$$

其中 a_{ij} 表示是第 i 行、第 j 行的元素, 即

$$a_{11} = x_p^0 \cdot x_q^0 = \cos(x_p, x_q)$$

$$a_{12} = x_p^0 \cdot y_q^0 = \cos(x_p, y_q)$$

余此类推。

P_Q 矩阵中 9 个元素是由两坐标系坐标轴夹角之余弦值所组成, 故称该矩阵为方向余弦阵。该矩阵为正交矩阵, 这可由 $E_q = Q_P E_p$ 的方向余弦阵写出后看出有 $Q_P = P_Q^T$, 且由(1-2-1)式不难写出 $E_q = P_Q^{-1} E_p$, 可见 $P_Q^T = Q_P = P_Q^{-1}$. 故得证。

对于具有正交性的方向余弦阵的 9 个元素, 只有三个元素是独立的。这是因为这 9 个元素满足每行(或列)自身点乘等于 1、行与行(或列与列)之间互相点乘等于 0, 共有 6 个关系式。

两坐标系间方向余弦阵有一个最简单的形式, 就是这两坐标系的三个轴中, 有一组相对应的坐标轴平行, 例如 z_q 与 z_p 平行, 而 y_q 与 y_p 夹角为 ξ , 则此时方向余弦阵为

$$P_Q = \begin{bmatrix} \cos\xi & \sin\xi & 0 \\ -\sin\xi & \cos\xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \triangleq M_3[\xi] \quad (1-2-4)$$

所记 $M_3[\xi]$ 即表示这两坐标系第三个轴平行而其它相应两轴夹角为 ξ 的方向余弦阵。不难理解, 可将此类方向余弦阵记成一般形式 $M_i[\theta]$, $i (= 1, 2, 3)$ 表示第 i 轴平行, θ 为其它相应两轴的夹角, 并称 $M_i[\theta]$ 为初等转换矩阵。

现在将坐标系间的方向余弦阵作一应用推广。若有三个右手直角坐标系: $o_s - x_s y_s z_s$ 、 $o_p - x_p y_p z_p$ 、 $o_q - x_q y_q z_q$, 根据式(1-2-1)可写出它们之间的方向余弦关系

$$E_s = S_p E_p;$$

$$E_p = P_Q E_q;$$

$$E_s = S_Q E_q.$$

而由前两式可得

$$E_s = S_p P_Q E_q$$

将其与第三式比较, 则有

$$S_Q = S_p P_Q \quad (1-2-5)$$

由此可见, 坐标系之间的方向余弦关系具有传递性。

2. 坐标系转换矩阵的欧拉角表示法

我们可以将一坐标系视为一个刚体, 将其相对于另一坐标系的原点经过三次转动, 使这两坐标系相应轴重合, 将这三个转动的角度作为独立变量来描述这两个坐标系的转换关系, 这样, 方向余弦阵中 9 元素就可用三个角度的三角函数来表示。这三个角度称为此两坐标系的欧拉角。

设有 P 、 Q 两右手直角坐标系, 为讨论方便, 在图 1-3 中将两坐标系原点重合。为找出两坐标系的欧拉角, 这里考虑的是将 Q 坐标系先绕 z_q 轴旋转 ξ 角得 $o - x_1 y_1 z_q$ 系, 再绕 y_1 轴转 η 角得 $o - x_p y_p z_1$ 系, 最后绕 x_p 轴转 ζ 角即转到 $o - x_p y_p z_q$ 系。根据初等转换矩阵可写出

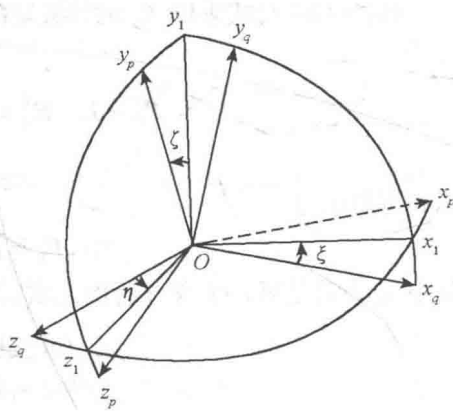


图 1-3 两坐标系的欧拉角关系

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = M_3[\xi] \begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = M_2[\eta] \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = M_1[\zeta] \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$$

再运用转换矩阵的递推性, 可得

$$P_Q = M_1[\zeta] \cdot M_2[\eta] \cdot M_3[\xi] \quad (1-2-6)$$

经矩阵乘法运算, 即得

$$P = \begin{bmatrix} \cos\xi\cos\eta & \sin\xi\cos\eta & -\sin\eta \\ \cos\xi\sin\eta\sin\zeta - \sin\xi\cos\zeta & \sin\xi\sin\eta\sin\zeta + \cos\xi\cos\zeta & \cos\eta\sin\zeta \\ \cos\xi\sin\eta\cos\zeta + \sin\xi\sin\zeta & \sin\xi\sin\eta\cos\zeta - \cos\xi\sin\zeta & \cos\eta\cos\zeta \end{bmatrix} \quad (1-2-7)$$

上述即为用欧拉角 ξ, η, ζ 表示的两坐标系间方向余弦阵。由于任意两坐标系经转动至重合的三个角度与转动的次序有关,根据转动次序的排列数可知共有六种次序,亦即有六组不同的欧拉角,这样(1-2-7)式中的每个元素的表达式也就不同,但每个元素的值却是唯一的。

3. 坐标系间矢量导致的关系

设有原点重合的两个右手直角坐标系,其中 $o-xyz$ 坐标系相对于另一坐标系 P 以角速度 ω 转动。 x^0, y^0, z^0 为转动坐标系的单位矢量,则任意矢量 A 可表示为

$$A = a_x x^0 + a_y y^0 + a_z z^0 \quad (1-2-8)$$

将上式微分,得

$$\frac{dA}{dt} = \frac{da_x}{dt} x^0 + \frac{da_y}{dt} y^0 + \frac{da_z}{dt} z^0 + a_x \frac{dx^0}{dt} + a_y \frac{dy^0}{dt} + a_z \frac{dz^0}{dt} \quad (1-2-9)$$

定义

$$\frac{\delta A}{\delta t} = \frac{da_x}{dt} x^0 + \frac{da_y}{dt} y^0 + \frac{da_z}{dt} z^0 \quad (1-2-10)$$

该 $\delta A/\delta t$ 是处于转动坐标系 $o-xyz$ 内的观测者所见到的矢量 A 随时间的变化率。对于该观测者而言,只有 A 的分量能变,而单位矢量 x^0, y^0, z^0 是固定不动的。但对于处于 P 坐标系内的观测者来说, dx^0/dt 是具有位置矢量 x^0 的点由于转动 ω 而造成的速度。由理论力学可知该点速度为 $\omega \times x^0$,同理可得

$$\frac{dy^0}{dt} = \omega \times y^0, \quad \frac{dz^0}{dt} = \omega \times z^0$$

将上述关系式代入(1-2-9)式即得

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\delta A}{\delta t} + \omega \times A \quad (1-2-11)$$

将 $\delta A/\delta t$ 称为在转动坐标系 $o-xyz$ 中的“局部导数”(或称“相对导数”)。 dA/dt 称为“绝对导数”,相当于站在惯性坐标系中的观测者所看到的矢量 A 的变化率。

需要强调的是,实际推导中并未用到惯性坐标系的假设,因此,对于任意两个有相对转动的坐标系,关系式(1-2-11)是普遍成立的。

§ 1.3 常用坐标系及其相互转换

在飞行力学中,为方便描述影响火箭运动的物理量及建立火箭运动方程,可建立多种坐标系。本节介绍其中常用的一些坐标系及这些坐标系的相互转换关系。另外一些坐标系将在具体章节中进行介绍和引用。

1. 常用坐标系

(1) 地心惯性坐标系 $O_E - X_I Y_I Z_I$

该坐标系的原点在地心 O_E 处。 $O_E X_I$ 轴在赤道面内指向平春分点, 由于春分点随时间变化具有进动性, 根据 1976 年国际天文协会决议, 1984 年起采用新的标准历元, 以 2000 年 1 月 15 日的平春分点为基准。 $O_E Z_I$ 轴垂直于赤道平面, 与地球自转轴重合, 指向北极。 $O_E Y_I$ 轴的方向是使得该坐标系成为右手直角坐标系的方向。

该坐标系可用来描述洲际弹道导弹、运载火箭的飞行弹道以及地球卫星、飞船等的轨道。

(2) 地心坐标系 $O_E - X_E Y_E Z_E$

坐标系原点在地心 O_E , $O_E X_E$ 在赤道平面内指向某时刻 t_0 的起始子午线(通常取格林威治天文台所在子午线), $O_E Z_E$ 轴垂直于赤道平面指向北极。 $O_E - X_E Y_E Z_E$ 组成右手直角坐标系。由于坐标 $O_E X_E$ 与所指向的子午线随地球一起转动, 因此这个坐标系为一动参考系。

地心坐标系对确定火箭相对于地球表面的位置很适用。

(3) 发射坐标系 $O - xyz$

坐标原点与发射点 o 固连。 ox 轴在发射点水平面内, 指向发射瞄准方向。 oy 轴垂直于发射点水平面指向上方。 oz 轴与 xoy 面相垂直并构成右手坐标系。由于发射点 o 随地球一起旋转, 所以发射坐标系为一动坐标系。

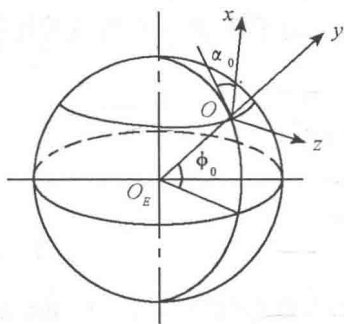


图 1-4 发射坐标系之一

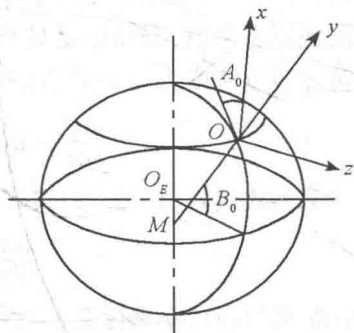


图 1-5 发射坐标系之二

以上是该坐标系的一般定义。当把地球分别看成是圆球或椭球时, 其坐标系的具体含意是不同的。因为过发射点的圆球表面的切平面与椭球表面的切平面不重合, 即圆球时 oy 轴与过 o 点的半径 R 重合, 如图 1-4 所示, 而椭球时 oy 轴与椭圆过 o 点的主法线重合, 如图 1-5 所示。它们与赤道平面的夹角分别称为地心纬度(记作 ϕ_0)和地理纬度(记作 B_0)。在不同的切平面 ox 轴与子午线切线正北方向的夹角分别称为地心方位角(记作 α_0)和射击方位角(记作 A_0), 这些角度均以对着 y 看去顺时针为正。

利用该坐标系可建立火箭相对于地面的运动方程, 便于描述火箭相对大气运动所受到的作用力。