考研数学名师系列丛书

2013年考研数学
辅导讲义

（数学三适用）

主　编：蔡燧林　胡金德　张　宇
副主编：李　擂　张　伟　朱长龙　费允杰

命题组组长与考研一线辅导专家强强联手，十年磨一剑的经验积累，打造史上最经典的辅导教程！

（经济类）

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

2013 年考研数学辅导讲义

——经济类

（数学三适用）

主　编　蔡燧林　胡金德　张　宇
副主编　李　擂　张　伟　朱长龙　费允杰

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

考研数学辅导讲义．经济类/蔡燧林，胡金德，张宇主编．—北京：北京理工大学出版社，2012.1

ISBN 978-7-5640-5558-5

Ⅰ.①2…　Ⅱ.①蔡…　②胡…　③张…　Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 009919 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 /（010）68914775（总编室）　68944990（批销中心）　68911084（读者服务部）
网　　址 / http：//www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市文阁印刷厂
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 33.5
字　　数 / 638 千字
版　　次 / 2012 年 1 月第 1 版　2012 年 1 月第 1 次印刷　　责任校对 / 周瑞红
定　　价 / 52.80 元　　责任印制 / 边心超

Preface 前言

久违了,《考研数学辅导讲义》! 由于种种原因,这本《考研数学辅导讲义》已订印多年,现在经精心修订,又和读者见面了. 由网上得悉,本书深得读者喜爱,这是读者对作者的关怀与鼓舞,作者决不辜负读者的厚爱,决心将这本书打造得更适合近几年考研的发展趋势,修改得更好.

一、本书写些什么?

本书是为了考研学子们写的. 近年来,社会对研究生的需求增加,有志青年也希望自己在学历上登上一个台阶,国家也扩大招生名额,由此而来的是,考研成为一大热点.

本书严格按照考研大纲编写. 大纲上没有的不写,大纲上有的一定会写. 但也不是主次不分,而是突出重点,热点,常考点.

本书每节分三部分:**内容精要**,**考查要点**、**解题方法**、**技巧及例题分析**,**综合杂例**. 在"**内容精要**"这部分,列举了大纲中要求的有关概念、定理、性质、关系、公式、法则. 读者可根据自己的情况,**详读或略读**. "**考查要点、解题方法、技巧与例题分析**",指出考查内容的命题方式,重点在哪里,常以何种面貌出现,尽可能多地指出各种题型以及解题方法. 通过例题分析,指出解题技巧及注意事项,有时还指出常见的错误做法,这些大都是阅卷中发现的典型错误. 熟悉各种题型和熟练掌握解题方法,对考生来讲是至关重要的. 有许多考生,常由于题目面孔陌生,临阵而不知所措. 尽可能多地介绍题型,指出多种解法,是本书一大特点. 例如,在数列极限这一标题下,列出的题型有:极限概念的理解,运算性质以及无穷大、无穷小之间关系的正确运用,u_n 为 n 项和的数列的极限,u_n 为 n 个因式连乘积的数列的极限,以迭代形式给出的数列的极限,等等. 并不以方法,如"用积分和式求极限""用夹逼定理求极限"等作为标题来区分,而以按照题目的形式来讨论采用的方法为宜. 读者学了之后,容易对号入座掌握方法. 考研试题中,有很多综合题. "**综合题解析**"就是为此而选讲的. 其中有的是考试真题,有的是作者精心设计的. 读者会发现,本书中有不少例题和习惯,是在别的书上见不到的.

本书有例题和习题共约 800 个. 题号右上角有 * 的是往届的考研真题. 习题中除少数简单的计算题只给出答案外,其他计算题,选择题和证明题,都给出较为详细的解法,而不仅仅是一句话的提示. 没有提示的应该是比较简单的题. 不过作者不希望读者一开始就看解法,而是自己先做,做不出或做完后再核查对照,以便总结、对比、提高.

二、怎么考，如何复习迎考？

中国有句古话，叫做“知己知彼，百战不殆”. 对立志考研的众多学子而言，“知己”，就是自己知道自己的状况；“知彼”，就是要弄清楚考些什么，怎么考. 大纲中已明确规定考些什么，本书各章节中也都有说明，不再在此多说. 现在要说的是，一张试卷从哪些方面来考查学生，考生应如何有的放矢去迎考.

(1)**选择题.**

数学选择题大致可分成三类：计算性的，概念性的与推理性的. 这就要求考生在复习时重视概念、定理、性质，甚至运算法则的理解，而不是死背条文. 不但从正面来理解，还要掌握一些反例. 逻辑推理上，要弄清楚充分与必要的区别. 条件是充分而未说是必要的，则往往可以举出一些例子说明并非必要；添上某些条件后能保证结论是正确的，则没有这些条件时，结论往往就可能是不正确的. 做这类选择题时，切忌想当然，应多一个心眼. 本书设计了不少选择题，作了较详尽的分析，读者应给予足够的重视.

(2)**填空题.**

填空题实际上是简单的计算题，是为扩大试卷的覆盖面而设计的. 考生切勿因为它简单而掉以轻心. 填空题的计算量少，但要求准确无误，做题的时间又不应花得多. 为了将这部分的分数拿到手，应在复习时养成良好的计算习惯，切忌轻视基本题的训练. 选择题与填空题共占总分的37%，应引起考生的注意.

(3)**证明题.**

整张试卷中，一般有一道或两道证明题：高等数学或(与)线性代数. 高等数学证明题的范围大致有：极限存在性，单调性，奇偶性，不等式，零点的存在性及个数，定积分与变限积分的不等式及零点问题，级数敛散性的论证. 线性代数有矩阵可逆与否的讨论，向量组线性相关与无关的论证，线性方程组无解、存在唯一解与存在无穷多解的论证，矩阵可否对角化的论证，两矩阵合同、相似、等价的论证，矩阵正定性的证明，关于秩的大小，并用它来论证有关的问题，等等. 可以说，线性代数的证明题的范围相当广泛. 至于概率统计，证明题通常集中于随机变量的不相关和独立性，估计的无偏性等. 为了做好证明题，就必须熟悉上面所说的有关理论. 例如矩阵对角化这一问题，不但要会对角化(这是计算)，而且要掌握什么条件不可以对角化(这就涉及理论). 这些条件中，有的是充分条件，有的是充要条件. 复习时，就要熟悉这些条件并做必要的练习. 又如证明不等式，本书中列举了许多题型和方法，其中有的是具体函数，有的是抽象函数，有的又以定积分或变限定积分形式出现. 这就要求考生在复习时能很好的融会贯通，举一反三.

(4)**计算题与综合题.**

一份试卷，包括填空题在内，计算题或计算性质的题占80%以上. 计算题中有一部分是综合题. 所以在复习时，应切实加强计算训练. 公式当然重要，但仅记公式是不够的，应掌握基本运算方法，熟悉典型步骤，并且要求有熟练的运算能力. 有两类综合题. 一是形式上的综合，采取的对策是“分解”，将一题拆成几段，各个击破. 计算时要特别小心，一

步走错全盘皆输.另一种是内在的综合,就要从条件中去挖掘内涵或抽象出本质要点,然后去运算.这类综合题,不仅计算题中有,选择题与证明题中都有.

(5)**应用题.**

一般说来,每一份试卷都有一道应用题.但近几年来应用题少了.考生常常感到应用题较难对付.实际上,应用题着重考查学生的建模能力,而不考查专业知识面.不会出现对某一群体明显不利或明显有利的背景的题.应用题大致为几何方面与经济方面.所有这些本书均有详尽的介绍.

三、考研数学复习的几个原则

如何更好地使用本书并在考研中取得好成绩?我们给读者指出数学复习的几个原则(注意,原则问题不能违反,一定要做到).

(1)**坚持不懈,细水长流**

老一辈的京剧表演艺术家常讲:"一天不练功,只有我知道;三天不练功,同行也知道;一月不练功,观众全知道."复习数学,我们建议读者也一定要这样,捧着这本书,每天都要看内容,每天都要做题目,坚持不懈,细水长流,便可水到渠成.

(2)**不求初速,但求加速**

一开始读数学书,总会吃力一些,遇到的困难多一些,这很正常,我们不要畏难,应该扎扎实实地把每一处不懂的地方弄懂,把每一个难点攻克,这样,开始复习的速度就会慢一些.但是,只要能够坚持,复习一定的内容之后,你便会发现,复习速度不断的提高,理解能力和解题能力都会显著增强.这符合数学学习的规律,请读者把握住.

(3)**独立思考,定期检验**

复习一个知识,先要读基本的概念、定理和公式,然后看例题,再去做习题.只有通过做题,才能知道自己是否真正掌握了这个知识.前面已经指出,一定不要翻着答案做题,稍有不会就看答案,这样效果不好.读者先不要看答案,自己独立地去做,调动起自己所有的知识储备,看能不能做出来,做出来了,自然很好,即使做不出,时间也没有白费,其他的知识在你脑子里过了一遍,也是一种复习,只是要注意,如果全力以赴也未做出题目,看完答案后要总结经验.在复习完一节、一章和整个课程的不同阶段,都要定期地通过做题来检验自己的复习水平和效果.

(4)**吸取教训,善于总结**

人没有不犯错误的,尤其在学习数学的过程中,做错题,不会做题,是再平常不过的了.人们常说:"失败是成功之母",就是这个意思.我们常告诉学生:如果一位复习备考的学生遇到不会的题、做错的题,可能会有两种态度,一种态度是消极的,题目不会做,心情不好,自暴自弃,复习效率大打折扣;一种态度是积极的,题目做不出,正是找到了自己复习的薄弱环节,找到了自己的不足之处,正是遇到了自己提高、进步的机会,我们当然支持后面一种态度,这才是正确的态度.所以,希望在考研复习的过程中,读者准备一个笔记本,通过不会做或者做错的题目,认真分析自己到底问题出在哪里,哪些知识还复习

不到位，吸取教训，多做总结，这样的笔记日积月累，对提高你的数学水平，是有极大帮助的.

本书答疑地址：http://weibo.com/zhangyumaths.

预祝广大考生复习顺利，金榜题名！

编　者

2012年2月于北京

Contents 目录

微 积 分

线性代数

概率论与数理统计

微积分

第 1 章　函数、极限、连续

§1.1 函　数

一、内容精要

(一)函数的定义

设在某个过程中,有两个变量 x 和 y,当变量 x 在它的变化范围 D(实数集)内每取一个值时,变量 y 按照一定的规律有唯一确定的数值与它对应,则称 y 为 x 的函数,记作

$$y=f(x)\quad x\in D.$$

x 称为自变量,y 称为因变量,f 称为对应关系,也称 $f(x)$ 为 x 的函数. 当 x 在 D 内取值时,按照对应关系 f,y 取值的集合称为函数的值域,常记为 R_f. 以后如不作另外声明,x,y 均取实数.

两个函数相同,当且仅当定义域相同,并且对应关系 f 相同. 至于自变量与因变量用什么字母表示是无关紧要的.

(二)函数的一些特性的定义及判定

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在对称于原点的某 D 上有定义,并且对于任意 $x\in D$,必有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 在 D 上为偶函数;如果对于任意 $x\in D$,必有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 在 D 上为奇函数.

在直角坐标系 xOy 中,偶函数在 D 上的图像关于 y 轴对称;奇函数在 D 上的图像关于原点 $(0,0)$ 对称.

判别函数的奇偶性的方法主要是靠定义,当然,如果函数的定义域不对称于原点,则该函数不可能是奇(偶)函数.

2. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域是 D,如果存在常数 $T>0$,当 $x\in D$ 时,必有 $x\pm T\in D$,并且 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,T 称为它的一个周期. 通常称的周期是指使 $f(x+T)=f(x)$ 成立的最小正数 T(如果存在的话).

判别函数 $f(x)$ 是否为周期函数，主要根据定义，有时也用别的办法.

3. 有界性

设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义，如果存在常数 M，当 $x\in X$ 时 $f(x)\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 X 上有上界；如果存在常数 m，当 $x\in X$ 时 $f(x)\geqslant m$，则称 $f(x)$ 在 X 有下界；如果 $f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界，则称 $f(x)$ 在 X 上有界. 即如果存在常数 $M>0$，当 $x\in X$ 时，$|f(x)|\leqslant M$，称 $f(x)$ 在 X 上有界，若不论 M 多么大，总有 $x\in X$，使 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

判别函数 $f(x)$ 在 X 上有上(下)界，一般是将 $f(x)$ 在 X 上放大(缩小)，直至明确它小于(大于)某常数.

判别函数在某 D 上有界的几个充分条件：

(1) 函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 存在极限，则存在该点的一个去心邻域 $\mathring{U}$，在 $\mathring{U}$ 内 $f(x)$ 有界；

(2) 如果 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界；

(3) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内存在最大(小)值，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有上(下)界.

函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 去心邻域内无界与 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 是两个概念. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 去心邻域必无界，这是判别函数无界的一个充分条件，反之未必成立. 例如，$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 去心邻域内取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ 时，$f(x_n)=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，对于任意大的 M，当正整数 $n>\dfrac{M}{2\pi}-\dfrac{1}{4}$ 时，$f(x_n)>M$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 的去心邻域内无界. 但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 并不为 ∞，而是振荡型，故极限不存在.

4. 单调性

设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义，如果对于 X 上的任意两点，x_1，x_2，$x_1<x_2$，必有 $f(x_1)\leqslant(\geqslant)f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 X 上单调增加(减少)；如果必有 $f(x_1)<(>)f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 X 上严格单调增加(减少). 有的教科书上将这里的单调增加(减少)称为单调不减(不增)，将这里的严格单调增加(减少)称为单调增加(减少).

常用的判别单调性的方法：简单的函数或未说明可导的抽象函数用定义判定；复杂一些的初等函数或可导的抽象函数，用微分学的方法判定，见第 2 章 §2.3，§2.4.

(三) 反函数、复合函数、初等函数、分段函数

1. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R_f，若对于 R_f 中的每一个 y，由 $y=f(x)$ 都有唯一的一个 $x\in D$ 与之对应，则记为 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$，称为 $y=f(x)$ 的反函数. 与此相呼应，称 $y=f(x)$ 为直接函数. 反函数的定义域与值域与定义域，分别是直接函数的值域和定义域.

例如函数 $y=x^2$，定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$，对于 R_f 中的每一个 y，由 $y=x^2$ 在 D 中对应的 x 不唯一，不合乎反函数定义，所以不存在反函数. 若将 D 限

制为$G=[0,+\infty)$，则对于R_f中的每一个y，由$y=x^2$在G内存在唯一的x与之对应，所以存在反函数$x=\sqrt{y}$，$y\in R_f$，$x\in G$.

有时，也将$y=f(x)$的反函数$x=f^{-1}(y)$写成$y=f^{-1}(x)$. 在同一直角坐标系中，$y=f(x)$与$x=f^{-1}(y)$的图像重合. $y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$的图像关于直线$y=x$对称.

定理　若函数$y=f(x)$在X上严格单调，其值域记为R_f，则在R_f上$y=f(x)$存在严格单调(具有相同单调性)的反函数，其值域为X；若又设X为区间，且$y=f(x)$在X上连续，则值域R_f也是一个区间，且反函数在R_f也是连续的；若再设$f'(x)$存在且不为零，则反函数在R_f亦可导，且$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$，其中$x=f^{-1}(y)$.

2. 复合函数

设函数$y=f(u)$的定义域是D_f，函数$u=\varphi(x)$的定义域是D_φ，值域是R_φ. 若$D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$，则称函数$y=f(\varphi(x))$为$x$的复合函数，它的定义域是$\{x\mid x\in D_\varphi \text{ 且 } \varphi(x)\in D_f\}$. 这里$\varnothing$表示空集.

3. 初等函数

(1)**常值函数**　C(C为常数)，$x\in\mathbf{R}$；

(2)**幂函数**　x^α(α为常数)，定义域由α确定，但不论α如何，在$(0,+\infty)$内总有定义；

(3)**指数函数**　a^x(常数$a>0,a\neq1$)，$x\in\mathbf{R}$；

(4)**对数函数**　$\log_a x$(常数$a>0,a\neq1$)，$x\in(0,+\infty)$；

(5)**三角函数**　$\sin x,x\in\mathbf{R}$；$\cos x,x\in\mathbf{R}$；$\tan x,x\in\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right),k\in\mathbf{Z}$；$\cot x,x\in(k\pi,(k+1)\pi),k\in\mathbf{Z}$；

(6)**反三角函数**　$\arcsin x,x\in[-1,1]$；$\arccos x,x\in[-1,1]$；$\arctan x,x\in\mathbf{R}$；$\operatorname{arccot} x,x\in\mathbf{R}$.

以上(1)～(6)类函数称为**基本初等函数**.

由基本初等函数经有限次加、减、乘、除复合而成的函数称**初等函数**.

4. 分段函数

一个函数在其定义域内的不同范围用不同的表达式表示，称用这种形式表示的函数为分段函数.

分段函数仅是说函数的表示形式，并不是说它是几个函数.

常见的分段函数有：

(1)**绝对值函数**　$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

(2)**符号函数**　$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

(3)**取整函数**　$[x]$表示不超过x的最大整数：$[x]=n$，当$n\leqslant x<n+1$，其中n为

整数.

例如：$[\pi]=3$，$[-\pi]=-4$，$[2]=2$.

(4) $\ln|x|=\begin{cases}\ln x, & x>0,\\ \ln(-x), & x<0.\end{cases}$

分数函数也可能是初等函数. 例如 $|x|=\sqrt{x^2}$ 是初等函数.

(四)经济中常见的几类函数

为了能用微积分处理经济中的数学问题，以下均设变量为连续变量，函数为可微函数.

(1) **成本函数.** 设 q 为产量，C_0 为固定成本(不生产也要支付的成本)，则总成本

$$C=C_0+C_1(q),$$

称为成本函数，其中 $C_1(q)$ 是 q 的单调增函数，但不一定是正比函数，甚至可能是分段函数，$C_1(0)=0$.

(2) **需求函数.** 设 p 为商品价格，该商品在价格 p 时对应的需求量

$$q=f(p)$$

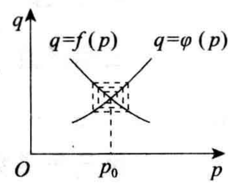
称为需求函数. 当 $p_2>p_1>0$ 时，$f(p_2)\leqslant f(p_1)$. 即商品的需求量为价格的单调减函数.

(3) **供给函数.** 设 p 为商品价格，该商品在此价格下供应商提供的商品量

$$q=\varphi(p)$$

称为供给函数. 当 $p_2>p_1>0$ 时，$\varphi(p_2)\geqslant\varphi(p_1)$. 即商品的供给量为价格的单调增函数，价格上涨，供应商愿提供更多的商品.

需求函数与供给函数是两种不同的函数. $q=f(p)$ 中的 q 是需求量，$q=\varphi(p)$ 中的 q 是供给量. 如果 $f(p)>\varphi(p)$，需求大于供给，势必引起价格上涨；如果 $f(p)<\varphi(p)$，供大于需，必引起价格下跌. 需求与供给反复波动最终趋于平衡. 达到平衡时的价格称为均衡价格.



(p_0 为均衡价格)

(4) **收益函数.** 一商品的销售量为 q，获得的收益关于 q 的函数

$$R=R(q)$$

称为收益函数. 一般说来，$R=pq$，p 为单价. 但也不尽如此. 销售量不同，单价不一定一样(例如批量可打折).

(5) **利润函数.** 设收益为 R，成本为 C，则利润函数为

$$L=R-C.$$

二、考查要点，解题方法、技巧与例题分析

(一)求函数的表达式

1. 已知简单的函数方程，求函数的表达式

求未知函数 $f(x)$ 的题型很多，题中出现未知函数导数的，常用微分方程的办法解之；题中出现某极限者常用极限方法解之. 这里只限于给出函数方程求解 $f(x)$.

例 1 设对于任意 x，$f(x)+2f(1-x)=x^2-2x$，则 $f(x)=$________.

解 应填$\frac{1}{3}(x^2+2x-2)$. 由 $f(x)+2f(1-x)=x^2-2x$, 有 $f(1-t)+2f(t)=(1-t)^2-2(1-t)=t^2-1$, 即

$$2f(x)+f(1-x)=x^2-1,$$
$$4f(x)+2f(1-x)=2x^2-2.$$

由此推知 $3f(x)=x^2+2x-2$, $f(x)$即为所填.

2. 已知函数的周期性、奇偶性及 $f(x)$在某一区间上的表达式,求它在另一指定区间上的表达式

例 2 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义且是以 2 为周期的奇函数,当 $x\in(0,1)$时, $f(x)=x^2+e^x+\ln x$, 则当 $x\in[-4,-2]$时, $f(x)=$________.

分析 由奇函数,可由区间$(0,1)$上的表达式得到区间$(-1,0)$上的表达式;再由周期为2,可得到区间$(-3,-2)$上的表达式;再由区间$(0,1)$上的表达式及周期2,可得到区间$(-4,-3)$上的表达式. 最后,由奇函数及周期性可计算出 $f(0)$, $f(-2)$, $f(-3)$及$f(-4)$的值.

解 应填

$$f(x)=\begin{cases}(x+4)^2+e^{x+4}+\ln(x+4), & 当\ x\in(-4,-3),\\ -(x+2)^2-e^{-x-2}-\ln|x+2|, & 当\ x\in(-3,-2),\\ 0, & 当\ x=-4,-3,-2.\end{cases}$$

设 $x\in(-1,0)$, 有$-x\in(0,1)$. 由奇函数性质,有

$f(x)=-f(-x)=-[(-x)^2+e^{-x}+\ln(-x)]=-(x^2+e^{-x}+\ln|x|)$.

设 $x\in(-3,-2)$, 有 $x+2\in(-1,0)$, 由周期性,有

$f(x)=f(x+2)=-[(x+2)^2+e^{-x-2}+\ln|x+2|]$.

设 $x\in(-4,-3)$, 有 $x+4\in(0,1)$. 由周期性,有

$f(x)=f(x+4)=(x+4)^2+e^{x+4}+\ln(x+4)$.

又由题设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义且为奇函数,故 $f(0)=0$, 再由周期性,有 $f(-2)=0$, $f(-3)=f(-1)=-f(1)=-f(-1)$, 所以 $f(-1)=0$, 从而 $f(-3)=0$, $f(-4)=f(-2)=0$.

3. 已知复合关系求复合函数或中间函数的表达式

例 3*[注] 已知 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$, 求 $\varphi(x)$并写出它的定义域.

解 $f(\varphi(x))=e^{(\varphi(x))^2}=1-x$, 得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$, 定义域 $\ln(1-x)\geqslant 0$ 即 $x\leqslant 0$.

例 4 设 $f_1(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $f_n(x)=f_1(f_{n-1}(x))$, $n=2,3,\cdots$, 求 $f_n(x)$的表达式.

解
$$f_2(x)=f_1(f_1(x))=\frac{f_1(x)}{\sqrt{1+f_1^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

猜想
$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

当 $n=1$ 时由定义知成立. 设 $n=k$ 时成立,则

[注]加“*”的题目为往年考研真题.

$$f_{k+1}(x)=\frac{f_k(x)}{\sqrt{1+f_k^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}},$$

所以 $n=k+1$ 时亦成立. 由数学归纳法知, 对一切正整数 n, 猜想成立.

4. 求分段函数的复合函数

例 5 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$ 求 $f(g(x))$.

解 对于 $f(g(x))$, 按 $f(x)$ 的定义, 有

$$f(g(x))=\begin{cases}1, & |g(x)|<1,\\ 0, & |g(x)|\geqslant 1.\end{cases} \tag{1.1}$$

再由 $|g(x)|<1$, 根据 $g(x)$ 的定义, 其对应的 x 应 $|x|\leqslant 1$; 由 $|g(x)|\geqslant 1$, 对应的 x 应 $|x|>1$. 于是

$$f(g(x))=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases} \tag{1.2}$$

【评析】 求 $f(g(x))$ 时, 先由外层函数 $f(x)$ 写出复合函数的表达式并同时写出中间变量(即内层函数 $g(x)$)的取值范围, 如(1.1)式, 然后再由内层函数 $g(x)$ 的分段表达式过渡到自变量 x 的变化范围, 如(1.2).

例 6* 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于

(A) 0. (B) 1. (C) $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$ (D) $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$ [ ]

解 应选(B). 将里层的 $f[f(x)]$ 看成一个函数, 由上例的[注], 所以

$$f\{f[f(x)]\}=\begin{cases}1, & |f[f(x)]|\leqslant 1,\\ 0, & |f[f(x)]|>1.\end{cases}$$

再考察 $|f[f(x)]|$, 由 $f(x)$ 的定义知, 无论里层 $|f(x)|\leqslant 1$ 还是 $|f(x)|>1$, 总有 $|f[f(x)]|\leqslant 1$, 而不可能 $|f[f(x)]|>1$. 所以无论 $|x|$ 如何, 总有 $|f[f(x)]|\leqslant 1$, 从而 $f\{f[f(x)]\}=1$.

例 7 设 $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, & x\geqslant -1.\\ \dfrac{1}{1+x}, & x<-1.\end{cases}$ 求 $f(f(x))$.

解
$$f(f(x))=\begin{cases}(f(x)+1)^2, & f(x)\geqslant -1,\\ \dfrac{1}{1+f(x)}, & f(x)<-1.\end{cases}$$

而由 $f(x)$ 的定义, 进而有

$$f(f(x))=\begin{cases}[(x+1)^2+1]^2, & \text{当}(x+1)^2\geqslant -1, \text{且 } x\geqslant -1,\\ \left(\dfrac{1}{1+x}+1\right)^2, & \text{当}\dfrac{1}{1+x}\geqslant -1 \text{ 且 } x<-1,\\ \dfrac{1}{1+(x+1)^2}, & \text{当}(x+1)^2<-1 \text{ 且 } x\geqslant -1,\\ \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}, & \text{当}\dfrac{1}{1+x}<-1 \text{ 且 } x<-1.\end{cases}$$