强金龙　于尔铿　等编著

DIAN LI XI TONG JING JI DIAO DU

电力系统经济调度

哈尔滨工业大学出版社

电力系统经济调度

强金龙　于尔铿　等编著

哈尔滨工业大学出版社

(黑)新登字第4号

内 容 提 要

本书以电力系统为出发点，从电厂与电网、经济与安全、有功与无功等方面，全面介绍了现代电力系统经济调度内容。全书共十三章，分为三部分：第一部分介绍经济调度基本概念、数学基础、电厂经济特性和等微增率、网损特性、负荷预测、机组组合等基本调度理论；第二部分介绍水火电联合电力系统、最优潮流等数学模型和优化算法，以及水库、燃料调度计划；第三部分介绍经济调度自动化与能量管理系统。

本书可作为高等学校电力系统及其自动化专业研究生、本科生学习《电力系统经济调度》课程的教材，也可作为电厂、电网调度人员和技术管理人员自学或培训的参考书。

电力系统经济调度
强金龙　于尔铿　等编著
＊
哈尔滨工业大学出版社出版
新华书店首都发行所发行
哈尔滨工业大学印刷厂印刷
＊
开本787×1092　1/16　印张 15.625　字数 361 千字
1993年12月第1版　　1993年12月第1次印刷
印数 1—1000
ISBN 7-5603-0679-9/TM·11　　定价15.00元

前　言

本书是为电力系统及其自动化专业学生学习《电力系统经济调度》课程而编写的教材。

当今世界正处于以信息处理为主要内容的新技术革命时代。随着改革开放和经济发展，我国电力工业为适应高新技术迅猛发展的新形势，近20年来，发电厂的自动化程度已有很大提高，电网调度控制中心正在普遍采用以电子计算机为核心的自动化监控系统，进行数据搜集与安全监控、自动发电控制与经济调度及安全分析。囊括经济与安全全部功能的、新的电力系统能量管理系统正在形成，从而开创了我国现代电力系统经济调度的新局面。

为从电厂与电网、经济与安全、有功与无功等方面反映我国现代经济调度的状况，作者根据多年教学实践和科研工作成果编写了本书。全书共分十三章，以电力系统为出发点，全面介绍现代电力系统经济调度的内容，包括：经济调度概述、数学基础、负荷预测、发电厂经济特性、等微增率原理、网损及其微增率算法、发电与输电协调、机组经济组合、水火电经济调度、联合电力系统调度、最优潮流、水库与燃料调度、经济调度自动化与能量管理系统。书中着重讲解实用的数学模型和优化算法，并以例题演示其计算过程。通过介绍经济调度程序实例、能量管理系统和专家系统，力图描绘出电力系统控制软件的全貌，反映现代电力系统经济调度的最新科研成果和先进技术。

本书可作为高等学校电力系统及其自动化专业研究生、本科生的教材，也可作为电厂、电网调度人员和技术管理人员自学或培训的参考用书。

参加本书编写的有哈尔滨工业大学电力系统及其自动化教研室强金龙（第四章）、蔡兴国（第八章）、郭志忠（第三章）和能源部电力科学院电网自动化研究所于尔铿（第一章、第五章、第十一章、第十三章）、刘广一（第九章、第十一章、第十二章）、白晓民（第二章、第六章、第七章、第十章）等同志，全书由强金龙同志进行统编。哈尔滨工业大学柳焯教授审阅。

由于作者水平有限，书中一定存在许多缺点和错误，真诚地期望读者提出批评和指正。

编著者

1991年12月

目　录

第一章 绪论

电力系统经济调度，在长达60多年的发展过程中得到了极大的丰富，现代电力系统经济调度主要由四个部分汇集而成。

1． 经典的电力系统经济调度

经典电力系统经济调度是指50年代以前的经济调度，理论上以变分法为基础，主要研究火电系统经济负荷分配问题和简单的水火电经济分配问题。

2． 最优化技术及控制

随着最优化技术的发展，从60年代起，性线规划、非线性规划、动态规划和网络规划不断被引入到经济调度中。如动态规划在机组经济组合中的应用，网络规划在复杂水火电系统经济分配中的应用和线性规划在安全约束经济调度中的应用等均取得了实际效果。

3． 网络分析技术

以往网络分析计算量大大超过经济负荷分配的计算量，直到60年代经济调度计算一直回避网络计算。网络分析技术的发展不仅在70年代更新了网损修正算法，还为考虑线路安全约束创造了条件。以网络分析为基础的最优潮流技术，展现了综合解决经济与安全、有功与无功问题的前景。

4． 自动化技术

电力系统经济调度一直是电力系统自动化的主要功能，五六十年代的模拟机系统仅能提供频差和发电功率等少量信息，只能支持经典经济调度功能。七八十年代的数字计算机系统能提供电网上的全面信息，实现经济调度与安全分析功能逐渐由硬件为主转化为以高级应用软件为主。这也为经济调度的进一步发展（如专家系统）创造了条件。

现代经济调度与经典经济调度的主要特征如表1-1所示。

表 1-1

项　目	经典经济调度	现代经济调度
研究对象	发电厂，有功、经济	电厂与电网、经济与安全、有功与无功
计算方法	变 分 法	全面优化技术
实现功能	硬件为主	软件为主

本书以电力系统为出发点，全面介绍现代经济调度内容，着重讲解已实用的数学模型和优化算法，力图描绘出电力系统控制软件（EMS）①的全貌。

① EMS = Energy Management Software.

第一节 电力系统经济调度基本内容

电力系统是由发电厂、电力网及负荷组成的复杂系统。电力系统经济调度的任务是在满足安全和一定质量要求的条件下，尽可能提高运行的经济性，即合理地利用现有的能源和设备，以最低燃料费用（或燃料耗量或运行成本），对用户进行可靠而满意的供电。

本书第二章介绍现代经济调度中所用到的一些基本知识，内容包括：基本数学概念（多元函数、极值、线性方程组与矩阵计算）、优化算法（线性规划、网络规划、非线性规划、分支界限法和动态规划）、大系统分解和协调理论。这样，可以帮助未学过这门课程的学生和技术人员建立一些基本概念，从而更好地学习后面介绍的内容。

电力系统经济调度的第一个问题是研究用户的需求，即进行电力负荷预测（第三章）。按照调度计划的周期，可分为日负荷预测、周负荷预测和年负荷预测等。不同周期的基本负荷有不同的变化规律。我国电力系统日负荷曲线往往有三个峰荷：上午、下午和晚上，中午有一次暂短的下降，夜里有一个较宽的低谷段。周负荷曲线一般在工作日（星期一至六）较高而休假日（星期日）较低。年负荷曲线往往随季节呈现周期性变化。除基本负荷分量外，负荷中还包含有随气象条件变化的分量，如气温升降、晴天、阴雨都会引起负荷变化。气象因素掌握不准是目前影响负荷预测精度下降的主要原因。完成系统负荷预测后，还要继续进行母线负荷预测，供网络分析之用。负荷预测精度直接影响经济调度效益，提高预测精度可以降低备用容量、减少临时调整出力和避免计划外启停机组。

电力系统经济调度的第二个问题是火电机组经济特性曲线的编制和机组间的经济负荷分配（第四章）。与直观感觉不同，它不是按效率（煤耗率）或容量分配机组负荷，而是按等微增率原则分配各机组的负荷才是最经济的。机组的耗煤量曲线及其微增率曲线是电力系统经济调度的基础资料，它们的准确性直接影响经济调度效益。

除了发电厂的特性之外，网络也有自己的经济特性，电能在网络上的传输损失是电力系统经济调度中要考虑的第三个问题，表征网络传输特性的是网损微增率(第五章)，因为它涉及到网络结构和潮流分布，是一个较为复杂的计算问题。

有了发电厂的发电经济特性和网络的传输损失特性便可以研究各电厂间的经济负荷分配问题了。近年来，靠近燃料基地的发电厂越来越多，它们燃料费用低，但送电损失较大。靠近负荷中心的电厂燃料费用较高，但送电损失较小。这样就形成了电力系统经济调度的第四个问题，即考虑负荷分配时如何协调发电厂的发电经济性和网络送电的经济性（第六章）。

一般情况下，由水电厂承担负荷曲线的变化部分，而水电厂的调节能力受到限制时，火电机组必须开停，以适应负荷变化。电力系统经济调度的第五个问题是机组经济组合（第七章），其目标是在满足一天电力负荷变化和安全备用的条件下，确定火电机组的启停计划，使全天燃料费用为最小。这在水电调节能力不足的电力系统中是一个重要而复杂的问题，具有较高的经济效益。

电力系统经济调度的第六个问题是水电机组的经济特性和厂内经济负荷分配（第八章）。与火电机组不同，水电机组耗水量及其微增率曲线与工作水头有关。与火电厂不同，水电厂的经济特性不仅取决于它所有的机组特性，更主要的取决于它的水库调节特性（或流域来水情况），它在电力系统经济调度中的作用一般大于机组特性。

从水电厂角度来看，希望用最少的水量发出最多的电量，即尽可能维持高水头和高效率运行；而从系统角度来看，希望水电厂尽可能承担负荷变化，因为在峰荷时段每度电的发电费远远高于其它各时段。这就构成了电力系统经济调度的第七个问题，即水火电协调（第九章）。水电厂按水库调节能力划分为不变水头和变水头水电厂，而在有水力联系的水电厂间组成梯级调度问题。变水头和梯级水电厂具有较多的约束条件，使优化计算变得复杂而困难。

随着电力网的不断扩大，邻近的电力网通过联络线联结在一起运行，由此可以错开峰荷、降低备用容量和充分利用能源。这就是电力系统经济调度的第八个问题，即联合电力系统的协调（第十章），其目的是确定各系统间的联络线交换功率计划，以得到更大范围的经济协调的效益。

讨论电力系统经济调度的第九个问题是最优潮流（第十一章），它以潮流方程为基础，进行经济与安全、有功与无功的全面优化计算。因为最优潮流可以采用不同的目标函数和不同的控制变量组成多种数学模型，它能够取代安全约束调度和无功优化调度，是一种比较理想的算法。

以上讨论的均属短期经济调度问题，第十二章讨论的是长期经济调度问题，主要介绍水库调度计划和燃料调度计划。

本书最后一章介绍电力系统经济调度自动化与能量管理系统，主要是应用前面几章讨论过的现代电力系统经济调度的理论和算法，研究在电力系统控制的高级应用软件中经济调度的功能，着重介绍一个微型计算机电力系统经济调度程序实例和现代实用的能量管理系统（EMS），最后引入专家系统，进一步提高能量管理系统（EMS）的应用水平。

第二节 电力系统经济调度的意义

电力系统经济调度的意义是它的经济效益和它在自动化系统中的作用。所以电力系统经济调度水平可以反映一个系统的运行水平和自动化程度。

电力系统经济调度的效益是人们最关心的问题，但遗憾的是目前我们还无法直接而准确地测量它，而且它随系统能源构成、运行条件和管理水平的变化有较大的变化范围。

根据国外和国内调度经验我们可以有一个大体的概念：经济负荷分配可节约燃料0.5%～1.5%；经济组合的效益可达1%～2.5%；网损修正效益0.05%～0.5%；水火电协调的经济效益高于火电系统经济负荷分配的效益。

在无法直接测量效益的情况下，在一年中抽取一些典型日（例如每月或双月取一天）进行统计性模拟计算（试验）是目前估计经济效益较科学的方法。对80年代初期的

京津唐电网和东北电网（部分）进行模拟计算得到的经济效益估计值列于表1-2～1-4。

表 1-2　　负荷经济分配的效益

电　网	相对值（%）	日节煤量（吨标准煤）	年节煤量（吨标准煤）	折算成费用（万元/年）
京津唐	0.80	222.9	84 000	285
东　北	0.77	195.6	71 000	443

表 1-3　　京津唐电网机组经济组合效益

相对值（%）	日节约煤（吨标准煤）	年节约煤（吨标准煤）	折算成费用（万元/年）
1.0	278.6	105 000	356

表 1-4　　网损修正的经济效益

电　网	相对值（%）	日节煤量（吨标准煤）	年节煤量（吨标准煤）	折算成费用（万元/年）
京津唐	0.05	14.2	5 183	17.6
东　北	0.24	60.5	22 083	136.9

表 1-2～1-4 是以发电总耗煤量最小为目标的经济调度结果，表 1-5 列出了京津唐电网1983年按不同的原则（耗煤量最少，燃料费最少，成本费最少）调度的模拟计算结果。

表 1-5　　京津唐电网1983年三种经济调度原则效益比较

调度原则	年耗煤量（万吨　标准煤）	年燃料费（万元）	年成本费（万元）
总耗煤量最少	994.3	58 208.9	64 521.8
总燃料费最少	1 004.5	57 294.9	63 190.4
总成本费最少	1 002.9	57 312.1	63 179.3

由表1-5可以看出按哪一种原则调度，其对应的目标项最低。例如，按总耗煤量最少调度时年耗煤量最低，年燃料费上升 1.6%；按总燃料费最少调度时，全年支出的发电燃料费最低，年耗煤量上升1.03%。这是由于按燃料费用最少原则调度时，首先压低了高价燃料的用量，节约费用的效果比较显著。另外，按发电燃料费和按发电成本调度结果相近，原因是发电成本中燃料费占的比重最大（约90%）。

我国早期经济调度是参考了苏联按耗煤微增率的导则进行的，而近来根据我国具体情况，适当考虑价格修正比较合理。实践表明，这样做的好处是：①压低高价燃料用量，许多高价燃料用在耗煤微增率较低的电厂，按耗煤微增率应分配较高的负荷，消费较多高价燃料；②提高燃料产地发电厂的发电量，因为输电费用比运煤费用低得多，而燃料费中包含运输费，所以煤价修正可以抑制运煤而鼓励输电。

电力系统经济调度的效益相对值虽然不大，而绝对值则很大，按节煤1%计算，全国每年可节约数百万吨的煤。

电力系统经济调度在电网调度自动化系统中一直占有重要地位，在电力系统控制软件中，可以举出以下经济调度功能的例子。

在发电控制与计划中：

（1） 实时发电控制（经济负荷分配）；

（2） 系统负荷预测；

（3） 火电调度计划；

（4） 机组组合计划；

（5） 水电调度计划；

（6） 功率交换计划。

在网络分析中：

（1） 实时网络分析（实时网损微增率）；

（2） 实时安全约束调度；

（3） 母线负荷预测；

（4） 潮流计算（计划用网损微增率）；

（5） 研究安全约束调度；

（6） 最优潮流。

可以看出，在发电控制和计划级中，经济调度是最主要的功能；在网络分析级中，经济调度也占有相当大的比重。因此，要用好现代电网调度自动化系统，必须做好经济调度工作；要设计出高质量的应用软件系统，必须对经济调度有充分的研究。

第三节　我国电力系统经济调度概况

我国水火电配合调度可以追溯到 40 年代，当时东北电网已形成水火电联合调度局面。50年代京津唐电网和东北电网曾试用过经济负荷分配计算尺，按耗煤微增率相等的原则，确定各发电厂的经济调度情况。

60年代东北电管局和华北电管局做过大量基础工作，编制出了各发电厂的耗煤微增曲线。在60年代末期，京津唐电网曾试用计算机编制日经济调度计划，当时投入使用的程序包括：火电厂耗煤微增率计算程序、网损修正B系数程序和水火电有功功率经济分配程序等。

70年代末期经济调度工作再次受到了重视，有更多的部门开展了这方面的工作。很多发电厂编制了微增特性曲线和厂内经济调度方案，为实际开展经济调度打下了坚实基础；很多研究单位和高等院校开展了经济调度研究工作，开发了许多新的应用程序，例如：机组经济组合、网损修正用B系数，多水电厂经济调度、梯级水电厂调度、负荷预测、无功功率经济分配和最优潮流等。

80年代初期，由于可靠而方便的微型计算机的引入，改变了长期以来经济调度程序难以实用的面貌。1982年9月京津唐电网应用微型计算机结束了人工编制日调度计划的历史，实现的功能包括日负荷预测、机组经济组合和负荷经济分配等功能。目前已有许多电网实现了计算机编制经济调度计划。

从长期的实践工作中，可以看出我国经济调度工作的特点：

（1） 涉及面广，持续时间长。它涉及到各发电厂和调度中心中热工、水文、电气

和自动化等许多专业的试验、运行，只有这些环节紧密配合、日积月累才能取得实际的节约效果。

（2） 应用知识面广而新。要求电力系统经济调度人员具备热力、水文和电网等较全面的基础知识，而且还要掌握新的自动化和计算机应用技术。

（3） 现实电力系统中，存在的实际问题较多，例如，机、炉试验资料不全；燃料、水、汽和电各环节计量不准；自动化设备和系统不完善，计算程序不可靠、不配套；实用化的研究较少等。

80年代末期以来，随着华北、华中、东北和华东及其它各大电网新一代调度自动化系统的投入应用，将进一步实现实时经济调度、安全约束调度、无功优化调度和最优潮流等高级功能，我国的经济调度工作将逐步提高到一个新的水平。

第二章　电力系统经济调度的数学基础

电力系统经济调度是计算机技术与计算方法应用最为活跃的领域，数学规划研究的新进展不断推动经济调度研究的深入与提高。数学规划方法是现代电力系统经济调度必不可少的工具。

本章介绍在电力系统经济调度计算中经常遇到的一些数学概念和常用算法，为以后各章的深入研究做必要的准备。

第一节　基本数学概念

一、多元函数

n 维向量空间R^n中的点X是一个向量，$X=(x_1,x_2\cdots x_n)^T$。多元函数 $f(X)$是平滑的，即$f(X)$是连续的和连续可微的。

(1)　$f(X)$的梯度$\varDelta f(X)$定义为

$$\nabla f(X)=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right]^T$$

(2)　若 $f(X)$ 是二次连续可微，$f(X)$ 的二阶偏导数矩阵或海森矩阵（Hessian matrix）定义为

$$\nabla^2 f(X)=\nabla(\nabla f(X)^T)=G(X)$$

其中
$$G_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

(3)　$f(X)$的一阶和二阶泰勒（Taylor）级数展开近似为

$$f(X_0+P)\simeq f(X_0)+\nabla f(X_0)^T P$$

$$f(X_0+P)\simeq f(X_0)+\nabla f(X_0)^T P+\frac{1}{2}P^T G(X_0)P$$

其中　P为$f(X)$在X_0点处的下降方向。

(4)　牛顿（Newton）条件：

设一般的二次函数可写成　$f(X)=\dfrac{1}{2}X^T G X+b^T X+c$

其中G、b、c分别为常矩阵、向量和常数，且设G是对称的。

这个二次函数的梯度和海森矩阵分别为

$$\nabla f(X)=GX+b \tag{2-1}$$

$$\nabla^2 f(X)=G$$

利用关系式（2-1），对给定的两点 X_1 和 X_2，梯度向量与海森矩阵满足下式关系：

$$\nabla f(X_1)-\nabla f(X_2)=G(X_1-X_2)$$

此关系式称为牛顿条件。

（5） 几种特殊函数的梯度：

① 若c为常数，则$\nabla c=0$；

② 若b为n维常向量，则$\nabla(b^TX)=b$；

③ 若G为常对称矩阵，则$\nabla(X^TGX)=2GX$

④ 若$F(X)=[f_1(X),\ f_2(X),\cdots,f_n(X)]^T$,则

$$\nabla F(X)=J(X)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

式中 $J(X)$ 称为Jacobian矩阵。

二、极值的充分必要条件

在最优化计算中，一个重要内容就是确定所得到的解是否为最优解，这就需要对多元函数求极值，需要讨论极值的充分必要条件。求函数 $f(X)$ 的极大值和极小值在方法上没有很大差别，这里只讨论函数的极小值。

非线性规划问题的一般形式可写成：

$$\min f(X) \tag{2-2}$$

$$h(X)\geqslant 0 \tag{2-3}$$

式（2-2）为目标函数，式（2-3）为约束条件。下面分别给出无约束和有约束极值的充分必要条件。

1. 无约束极值的充分必要条件

（1） 一阶条件：

若目标函数具有连续一阶、二阶偏导数，则可以在$f(X)$ 的领域展开成 Taylor 级数，当$\|\Delta X\|$充分小，取其前三项：

$$f(X+\Delta X)=f(X)+\nabla f(X)^T\Delta X+\frac{1}{2}\Delta X^TG(X)\Delta X \tag{2-4}$$

一阶必要条件（也是驻点的充分必要条件）为

$$\nabla f(X^*)=0 \tag{2-5}$$

其中 X^*为极值点。

不满足这一条件的点不会是极值点。显然，若 $\nabla f(X)^T\Delta X<0$，有 $f(X+\Delta X)<f(X)$；若$\nabla f(X)^T\Delta X>0$，有$f(X-\Delta X)<f(X)$，则$f(X)$ 不满足极值条件。

（2） 二阶条件：

由Taylor展开式（2-4）可知，若X^*点满足式（2-5），且

$$\Delta X^T G(X^*)\Delta X>0$$

可以使$f(X^*)<f(X^*+\Delta X)$，得到严格的局部最优解。因此有：

二阶极值的充分条件为$G(X^*)$是正定的；

二阶极值的必要条件为$G(X^*)$是正半定的。

2. 约束极值的充分必要条件

有两种不同类型的约束，等式约束和不等式约束，可行点必须满足不等式约束，且位于所有等式约束所构成的超平面上；满足等式条件的不等式约束称为起作用约束（或积极约束）。

令q代表起作用约束（含等式约束），m为总约束数，X^*为对应的可行点，则极值的充分条件为

$$h_q(X^*)=0$$

$$h_{m-q}(X^*)>0$$

$$\nabla L(X^*)=\nabla f(X^*)-A_q(X^*)\lambda_q=0$$

$$\lambda_q\geqslant 0$$

$$Z_q{}^T[\nabla^2 L(X^*)]Z_q \quad \text{是正定的}$$

式中 $\lambda_q=[A_q^T(X^*)A_q(X^*)]^{-1}A_q^T(X^*)\nabla f(X^*)$

$L(X)=f(X)-\lambda_q^T h_q(X)$

$L(X)$为Lagrangian函数，$A_q(X^*)$为$n\times m$维对应起作用约束的一阶偏导数矩阵，Z_q为$n\times(n-q)$维矩阵，满足：

$$A_q^T Z_q=0$$

任一可行向量ΔX可以写成不受约束向量Y（$(n-q)$维）的线性组合，即$\Delta X=Z_qY$。

Z_q可由A_q的正交分解或通过A_q矩阵的分块计算得出（见下面线性方程组与矩阵计算），它的列向量构成了在X^*点，约束$h_q(X^*)$的切平面的一个基。

二阶极值的必要条件为 $Z_q^T[\nabla^2 L(X^*)]Z_q$ 是正半定的。

对于线性约束问题，$A_q(X)$与X的取值无关，而$\nabla^2 L(X)$简化成G。

三、线性方程组与矩阵计算

许多优化算法都要用到线性方程组求解或矩阵求逆计算，它们的求解效率和可靠性直接影响整体算法的性能，这里给出一些重要的概念和特殊算法。

1. 条件数

矩阵A的条件数定义为

$$K(A)=\|A\|\|A^{-1}\|$$

若条件数$K(A)$大，则称矩阵A是病态的。对于线性方程组，若系数矩阵是病态的，右端项的变化很小，得到的解的结果差异很大，有时甚至难于求解。

2. 矩阵求逆与线性方程组求解

若矩阵是方阵且是非奇异的，A矩阵有逆，对于线性方程组

$$AX=b$$

可有：

$$X = A^{-1}b$$

矩阵的直接求逆计算量很大（正比于n^3），对于大规模方程组一般很少采用直接求逆解法。

在需要多次重复计算时（右端项不同），常用分解方法；A阵的元素变化不多时，常用矩阵的修正算法。

（1） LU分解法

LU分解法，将A矩阵分成：

$$A = LU$$

式中，L为下三角阵，U为上三角阵。

可以用LU分解将线性方程组$AX = b$化成两个方程组计算：

$$LY = b \tag{2-6}$$

$$UX = Y \tag{2-7}$$

式中 Y为求解的中间向量。

由于L和U具有三角阵的特殊结构，式（2-6）和式（2-7）的求解只需前代和回代，方程求解比较方便。

（2） 对称正定矩阵的Cholesky分解

对称是指矩阵$A = A^T$，$a_{ij} = a_{ji}$

正定是指有$\|X\| \neq 0$，$X^TAX > 0$

Cholesky分解是将A矩阵分解成：

$$A = LDL^T$$

式中，D是对角矩阵；L是下三角阵，其对角线元素为1。

令A、L和D的元素是a_{ij}、l_{ij}和d_{ij}，按下式可以逐列计算D和L。

$$d_{jj} = a_{jj} - \sum_{q=1}^{j-1} d_{qq} l_{jq}^2$$

$$l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{q=1}^{j-1} d_{qq} l_{iq} l_{jq}\right) \Big/ d_{jj} \qquad i = j+1, N$$

其中 $j = 1, N$。

利用$A = LDL^T$，可以方便地求解线性方程，

$$AX = b$$

原方程组$AX = b$可以利用下述两个方程组求解：

$$LY = b \tag{2-8}$$

$$L^TX = D^{-1}Y \tag{2-9}$$

由于L是下三角矩阵，式（2-8）与（2-9）的求解只需前代和回代。

（3） 矩阵修正

若原矩阵已知，在矩阵元素按一定规律变化时，可以利用修正公式简化计算。在线性规划算法中，已知基矩阵的逆矩阵，求换基后的逆矩阵，在拟牛顿法中的矩阵更新都可以利用修正公式。

$$\text{设 } A' = A + RST^T$$

其中，A为（$n\times n$）矩阵，R和T是（$n\times m$）矩阵，S是（$m\times m$）矩阵，S可逆，则A'矩阵的逆可以用Sherman-Morrison公式求出：

$$(A')^{-1} = A^{-1} - A^{-1}RU^{-1}T^TA^{-1}$$

式中 $U = S^{-1} + T^TA^{-1}R$

3. 基矩阵Z的计算

满足$A^TZ=0$的Z矩阵，可以用正交分解或矩阵的分块表示法来求取。

（1） 正交分解法

对A矩阵进行正交分解可有：

$$A = Q\begin{bmatrix} R \\ O \end{bmatrix} = [Q_1Q_2]\begin{bmatrix} R \\ O \end{bmatrix}$$

式中，Q是（$n\times m$）正交矩阵；R是（$m\times m$）上三角矩阵，A是（$n\times m$）矩阵；O子阵是（$(n-m)\times m$）矩阵。

利用正交矩阵的性质：

$$\begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} R \\ O \end{bmatrix}$$

因此有：

$$Q_2^TA = 0 \quad \text{或} \quad A^TQ_2 = 0$$

可知：

$$Z = Q_2$$

（2） 分块表示法

将A矩阵适当分块

$$A = \begin{bmatrix} A_m \\ A_{n-m} \end{bmatrix}$$

式中，A_m是（$m\times m$）非奇异矩阵；A_{n-m}是（$n-m$）$\times m$矩阵。按照这样的分块，可取Z阵为

$$Z = \begin{bmatrix} -A_m^{-T}A_{n-m}^T \\ I \end{bmatrix}$$

显然这样取Z满足$A^TZ=0$。

解决大规模系统问题，常需要求解大规模线性方程组或进行高阶的矩阵运算，对此，降低内存使用量和提高计算效率是极为重要的，稀疏矩阵的存贮技术、修改三角因子方法等都是有效的程序技巧和算法，详见文献[1]。

第二节 数学规划的基本方法

近30年来，数学规划无论在理论研究和应用研究方面均有重大的进展，应用数学规