

9002

城市桥梁建筑的规划、 设计与造型

建设部科技情报研究所编印

一九九〇年八月

目 录

曲线桥梁的空间计算.....	1
城市桥梁美的创作、欣赏和评价.....	16
略论城市桥梁建设与武汉长江公路桥桥型.....	23
武汉长江公路桥可行性研究报告.....	28
√广州市的城市桥梁建设.....	31
天津市中环线立交桥选型与建筑.....	36
大连市香炉礁立交方案.....	44
大连市香炉礁立交桥设计.....	53
上海市中山环路高架道路研究情况.....	61
济南市大纬二路经十路立体交叉方案介绍.....	67
南京市中央门立交桥的设计与施工.....	72
大连市香炉礁立交桥预应力段施工.....	77
关于环式立交设计.....	81
城市道路立体交叉等级设计.....	88
城市桥梁规划、设计与施工.....	95
北京西单商场人行天桥.....	98
上海市人行立交工程概况.....	113
南京市淮海路人行天桥.....	119
广州市近年来的天桥建设.....	122
我国城市人行立交工程的设计选型构思及其发展前景.....	127
徐州市淮海路人行天桥设计简介.....	140
话说抗城三天桥.....	144

编辑：商自福

印刷：北京印刷五厂

曲线桥梁的空间计算

张罗溪

(铁路桥梁系)

【提要】本文提出了一种计算曲线桥梁的空间曲梁单元有限元法,并且考虑了剪切变形的影响。由于推导出了这种单元在任意的空间力系作用下的等效节点力,这就为预应力曲线桥梁的计算提供了一种实用的空间分析方法。

为了证明这种方法的可靠性和实用性,文中给出了一数值分析算例。用本文的空间曲梁有限元法计算的结果与解析法结果比较,两者非常吻合。

【关键词】曲线桥梁, 空间计算, 等效节点力, 平衡矩阵。

一、概述

随着现代城市建设和交通运输事业的发展,曲线形桥的建造越来越多。特别是在城市立交桥中,它已是常用的结构型式。

关于曲线桥梁的研究,国内外不少学者已做了许多工作。但是,以往的一些计算方法,只适合于曲线桥梁受竖向荷载作用的情形。而对于曲线桥梁,特别是预应力曲线桥梁则是空间受力结构,这些方法就不适用了。

本文提出适合于预应力曲线桥梁内力分析的空间曲梁有限元法。笔者应用能量原理和力的平衡关系,直接推导出考虑一个节点六个自由度的曲梁单元刚度矩阵,并且考虑了剪力变形的影响。

单元等效节点力在有限单元法中占有很重要的地位。本文巧妙地利用变形协调关系,把单元的等效节点力与单元的柔度矩阵和平衡矩阵联系在一起,推导出这种曲梁单元在任意的空间力系作用下的等效节点力。这就使得曲梁的计算分析变得象直梁一样方便。

考虑到曲线桥梁结构大多采用箱形截面,为了便于公式的推导,本文中采用了下面两点假设:

- (1) 轴力通过截面形心,剪力通过截面剪心。若受均布荷载作用,亦作类似的简化;
- (2) 忽略形心与剪心之间的偏离影响。

二、单元的刚度矩阵

在有限元方法中,首先得把结构理想化为受节点荷载作用的离散单元的组合物,设一空

间曲梁单元如图 1 所示, 其两端的节点力用矢量表示如下:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_1 = [N_1 S_{x1} M_{y1} T_1 M_{x1} S_{y1}]^T \\ \mathbf{R}_2 = [N_2 S_{x2} M_{y2} T_2 M_{x2} S_{y2}]^T \end{cases} \quad (1)$$

与这些节点力对应的节点位移也可用矢量表示为

$$\begin{cases} \delta_1 = [u_1 v_1 \theta_{y1} \tau_1 \theta_{x1} w_1]^T \\ \delta_2 = [u_2 v_2 \theta_{y2} \tau_2 \theta_{x2} w_2]^T \end{cases} \quad (2)$$

图 1 中节点力与节点位移的方向均为正方向。若考虑距离 1 端任一点 ($0 < \phi < \alpha$) 的平衡关系, 则该点的内力素可用 1 端的节点力表示为

$$\begin{cases} N = -N_1 \cos \phi - S_{x1} \sin \phi \\ S_x = -N_1 \sin \phi - S_{x1} \cos \phi \\ M_y = -N_1 r (1 - \cos \phi) + S_{x1} r \sin \phi - M_{y1} \\ T = -T_1 \cos \phi - M_{x1} \sin \phi - S_{y1} r (1 - \cos \phi) \\ M_x = T_1 \sin \phi - M_{x1} \cos \phi - S_{y1} r \sin \phi \\ S_y = -S_{y1} \end{cases} \quad (3)$$

考虑剪切变形时, 贮存在曲梁单元内的应变能与内力的关系是

$$u = \frac{1}{2} \int_0^\alpha \left(\frac{N^2}{EA_z} + \frac{T^2}{GI_d} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{S_x^2}{GA_{sx}} + \frac{S_y^2}{GA_{sy}} \right) r d\phi \quad (4)$$

根据卡氏定理, 与节点力对应的节点位移分量可用下列各式求得

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\partial U}{\partial N_1} & v_1 = \frac{\partial U}{\partial S_{x1}} & \theta_{y1} = \frac{\partial U}{\partial M_{y1}} \\ \tau_1 = \frac{\partial U}{\partial T_1} & \theta_{x1} = \frac{\partial U}{\partial M_{x1}} & w_1 = \frac{\partial U}{\partial S_{y1}} \end{cases} \quad (5)$$

把 (3) 式中各内力表达式代入 (4) 式, 再利用 (5) 式并进行积分, 有

$$\begin{aligned} u_1 = \frac{\partial U}{\partial N_1} &= \int_0^\alpha \left(\frac{N}{EA_z} \frac{\partial N}{\partial N_1} + \frac{T}{GI_d} \frac{\partial T}{\partial N_1} + \frac{M_x}{EI_x} \frac{\partial M_x}{\partial N_1} + \frac{M_y}{EI_y} \frac{\partial M_y}{\partial N_1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{S_x}{GA_{sx}} \frac{\partial S_x}{\partial N_1} + \frac{S_y}{GA_{sy}} \frac{\partial S_y}{\partial N_1} \right) r d\phi \\ &= \frac{r}{EA_z} \int_0^\alpha (-N_1 \cos \phi - S_{x1} \sin \phi)(-\cos \phi) d\phi \\ &\quad + \frac{r}{GA_{sx}} \int_0^\alpha (N_1 \sin \phi - S_{x1} \cos \phi) \sin \phi d\phi \\ &\quad + \frac{r}{EI_y} \int_0^\alpha [-N_1 r (1 - \cos \phi) + S_{x1} r \sin \phi - M_{y1}] [-r (1 - \cos \phi)] d\phi \\ &= f_{11} N_1 + f_{12} S_{x1} + f_{13} M_{y1} \end{aligned} \quad (6-1)$$

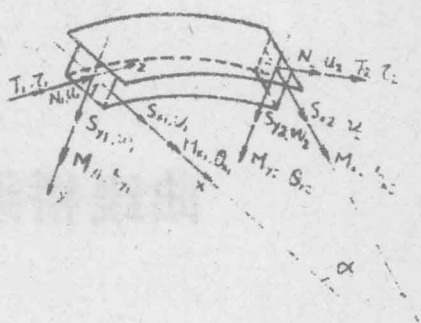


图 1

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{\partial U}{\partial S_{x1}} = \int_0^a \left(\frac{N}{EA_z} \frac{\partial N}{\partial S_{x1}} + \frac{T}{GI_d} \frac{\partial T}{\partial S_{x1}} + \frac{M_x}{EI_x} \frac{\partial M_x}{\partial N_1} + \frac{M_y}{EI_y} \frac{\partial M_y}{\partial N_1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{S_x}{GA_{sx}} \frac{\partial S_x}{\partial S_{x1}} + \frac{S_y}{GA_{sy}} \frac{\partial S_y}{\partial S_{x1}} \right) r d\phi \\
&= \frac{r}{EA_z} \int_0^a (-N_1 \cos\phi - S_{x1} \sin\phi)(-\sin\phi) d\phi \\
&\quad + \frac{r}{GA_{sx}} \int_0^a (N_1 \sin\phi - S_{x1} \cos\phi)(-\cos\phi) d\phi \\
&\quad + \frac{r}{EI_y} \int_0^a [-N_1 r (1 - \cos\phi) + S_{x1} r \sin\phi - M_{y1}] r \sin\phi d\phi \\
&= f_{21}^i N_1 + f_{22}^i S_{x1} + f_{23}^i M_{y1} \tag{6-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{y1} &= \int_0^a \left(\frac{N}{EA_z} \frac{\partial N}{\partial M_{y1}} + \frac{T}{GI_d} \frac{\partial T}{\partial M_{y1}} + \frac{M_x}{EI_x} \frac{\partial M_x}{\partial M_{y1}} + \frac{M_y}{EI_y} \frac{\partial M_y}{\partial M_{y1}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{S_x}{GA_{sx}} \frac{\partial S_x}{\partial M_{y1}} + \frac{S_y}{GA_{sy}} \frac{\partial S_y}{\partial M_{y1}} \right) r d\phi \\
&= \frac{r}{EI_y} \int_0^a [-N_1 r (1 - \cos\phi) + S_{x1} r \sin\phi - M_{y1}] (-1) d\phi \\
&= f_{31}^i N_1 + f_{32}^i S_{x1} + f_{33}^i M_{y1} \tag{6-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \int_0^a \left(\frac{N}{EA_z} \frac{\partial N}{\partial T_1} + \frac{T}{GI_d} \frac{\partial T}{\partial T_1} + \frac{M_x}{EI_x} \frac{\partial M_x}{\partial T_1} + \frac{M_y}{EI_y} \frac{\partial M_y}{\partial T_1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{S_x}{GA_{sx}} \frac{\partial S_x}{\partial T_1} + \frac{S_y}{GA_{sy}} \frac{\partial S_y}{\partial T_1} \right) r d\phi \\
&= \frac{r}{GI_d} \int_0^a (-T_1 \cos\phi - M_{x1} \sin\phi - S_{y1} r (1 - \cos\phi)) (-\cos\phi) d\phi \\
&\quad + \frac{r}{EI_x} \int_0^a (T_1 \sin\phi - M_{x1} \cos\phi - S_{y1} r \sin\phi) \sin\phi d\phi \\
&= f_{11}^n T_1 + f_{12}^n M_{x1} + f_{13}^n S_{y1} \tag{6-4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta_{x1} &= \int_0^a \left(\frac{N}{EA_z} \frac{\partial N}{\partial M_{x1}} + \frac{T}{GI_d} \frac{\partial T}{\partial M_{x1}} + \frac{M_x}{EI_x} \frac{\partial M_x}{\partial M_{x1}} + \frac{M_y}{EI_y} \frac{\partial M_y}{\partial M_{x1}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{S_x}{GA_{sx}} \frac{\partial S_x}{\partial M_{x1}} + \frac{S_y}{GA_{sy}} \frac{\partial S_y}{\partial M_{x1}} \right) r d\phi \\
&= \frac{r}{GI_d} \int_0^a (-T_1 \cos\phi - M_{x1} \sin\phi - S_{y1} r (1 - \cos\phi)) (-\sin\phi) d\phi \\
&\quad + \frac{r}{EI_x} \int_0^a (T_1 \sin\phi - M_{x1} \cos\phi - S_{y1} r \sin\phi) (-\cos\phi) d\phi \\
&= f_{21}^n T_1 + f_{22}^n M_{x1} + f_{23}^n S_{y1} \tag{6-5}
\end{aligned}$$

$$w_1 = \int_0^a \left(\frac{N}{EA_z} \frac{\partial N}{\partial S_{y1}} + \frac{T}{GI_d} \frac{\partial T}{\partial S_{y1}} + \frac{M_x}{EI_x} \frac{\partial M_x}{\partial S_{y1}} + \frac{M_y}{EI_y} \frac{\partial M_y}{\partial S_{y1}} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{S_x}{GA_{sx}} \frac{\partial S_x}{\partial S_{y1}} + \frac{S_y}{GA_{sy}} \frac{\partial S_y}{\partial S_{y1}}) r d\phi \\
& = \frac{r}{GI_d} \int_0^\alpha [-T_1 \cos\phi - M_{x1} \sin\phi - S_{y1} r (1 - \cos\phi)] [-r (1 - \cos\phi)] d\phi \\
& \quad + \frac{r}{EI_x} \int_0^\alpha (T_1 \sin\phi - M_{x1} \cos\phi - S_{y1} r \sin\phi) (-r \sin\phi) d\phi \\
& \quad + \frac{r}{GA_{sy}} \int_0^\alpha (-S_{y1}) (-1) d\phi \\
& = f_{31}^n T_1 + f_{32}^n M_{x1} + f_{33}^n S_{y1}
\end{aligned} \tag{6-6}$$

以上六式可写成下面简洁的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_{y1} \\ \hline \tau_1 \\ \theta_{x1} \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}^i & f_{12}^i & f_{13}^i & & \\ f_{21}^i & f_{22}^i & f_{23}^i & & \\ f_{31}^i & f_{32}^i & f_{33}^i & & \\ \hline & & & 0 & \\ & & & & f_{11}^n & f_{12}^n & f_{13}^n \\ & & & & f_{21}^n & f_{22}^n & f_{23}^n \\ & & & & f_{31}^n & f_{32}^n & f_{33}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ S_{x1} \\ M_{y1} \\ \hline T_1 \\ M_{x1} \\ S_{y1} \end{bmatrix} \tag{7}$$

或缩写成

$$\begin{bmatrix} \delta_i \\ \hline \delta_i^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i & 0 \\ \hline 0 & F_i^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i \\ \hline R_i^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i R_i \\ \hline F_i^n R_i^n \end{bmatrix} \tag{8}$$

其中脚标 i 和 n 分别代表曲率平面内和曲率平面外，各柔度系数 f_{ij}^i 和 f_{ij}^n 由附录 1 给出。

求解方程 (8)，就得到单元 1 端的节点力与节点位移的关系是

$$\begin{bmatrix} R_i \\ \hline R_i^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i & 0 \\ \hline 0 & F_i^n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \hline \delta_i^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^i & 0 \\ \hline 0 & K_{11}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_i \\ \hline \delta_i^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^i \delta_i \\ \hline K_{11}^n \delta_i^n \end{bmatrix} \tag{9}$$

式中 $K_{11}^i = [F_i]^{-1}$ ， $K_{11}^n = [F_i^n]^{-1}$ 分别代表单元 1 端在曲率平面内和曲率平面外的刚度矩阵。 F_i 和 F_i^n 则分别是这两个平面内的柔度矩阵。因为它们都是 3×3 阶的，所以，各刚度系数都可用柔度系数直接表达出来（见附录 3），而无需借助于计算机求逆。

在方程组 (3) 中令 $\phi = \alpha$ ，就得到单元两端节点力的关系式。写成矩阵形式是

$$\begin{bmatrix} R_2^i \\ \hline R_2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{12}^i & 0 \\ \hline 0 & E_{12}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1^i \\ \hline R_1^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{12}^i R_1^i \\ \hline E_{12}^n R_1^n \end{bmatrix} \tag{10}$$

或缩写成 $R_2 = E_{12} R_1$

(11)

其中

$$E_{12} = \begin{bmatrix} -\cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ -r(1-\cos\alpha) & r\sin\alpha & -1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$E_{12}^T = \begin{bmatrix} -\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ -r(1-\cos\alpha) & -r\sin\alpha & -1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

分别代表单元两端节点力在两个平面内的平衡矩阵。

单元的完全刚度矩阵可写成下面的分块矩阵形式

$$K_m = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}_{12 \times 12} \quad (14)$$

其中子矩阵 K_{11} 由前面 (9) 式已知。根据刚度系数的物理意义, 其余的子矩阵可利用与 (11) 式的相似关系求得

$$K_{21} = E_{12} K_{11} = \begin{bmatrix} E_{12} K_{11} & 0 \\ 0 & E_{12}^T K_{11} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$K_{12} = K_{21}^T \quad (16)$$

$$K_{22} = E_{12} K_{12} = \begin{bmatrix} E_{12} K_{11} E_{12}^T & 0 \\ 0 & E_{12}^T K_{11} E_{12} \end{bmatrix} \quad (17)$$

三、单元等效节点力

假设一曲梁单元受任意的空间力系作用, 如图 2 所示。在这些外力作用下, 单元两端将产生固端反力。固端力反号, 便是我们需要的等效节点力。为了减少一些符号, 图 2 中固端力的符号及其方向标成与图 1 的节点力一致, 即是等效节点力的方向。

这里采用柔度法求固端力。为此, 需要知道单元内力与外荷载及固端力的关系。同前面求单元的柔度系数一样, 先考虑单元上距离 1 端任意点 ($0 < \phi < \alpha$) 处力的平衡, 可得到该点的内力表达式是

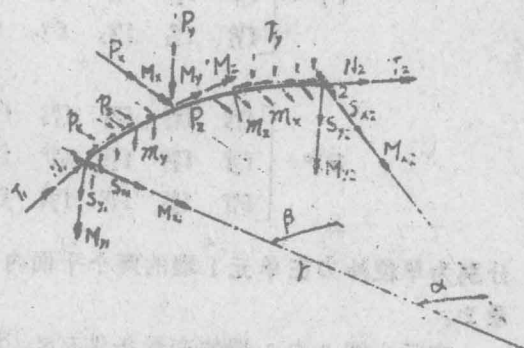


图 2

$$\begin{aligned}
N &= -N_1 \cos \phi - S_{x1} \sin \phi + \{-P_z \cos(\phi - \beta) - P_x \sin(\phi - \beta)\} |_{\phi=\beta} \\
&\quad - P_z r \sin \phi - P_x r (1 - \cos \phi) \\
S_x &= N_1 \sin \phi - S_{x1} \cos \phi + \{\phi - \beta\} - P_x \cos(\phi - \beta) |_{\phi=\beta} \\
&\quad + p_x r (1 - \cos \phi) - p_z r \sin \phi \\
M_y &= -N_1 r (1 - \cos \phi) + S_{x1} r \sin \phi - M_{y1} + \{-P_z r [1 - \cos(\phi - \beta)] \\
&\quad + P_x r \sin(\phi - \beta) - M_{yc}\} |_{\phi=\beta} - p_z r^2 (\phi - \sin \phi) \\
&\quad + p_x r^2 (1 - \cos \phi) - m_y r \phi \\
T &= -T_1 \cos \phi - M_{x1} \sin \phi - S_{y1} r (1 - \cos \phi) + \{-M_z \cos(\phi - \beta) \\
&\quad - P_y r [1 - \cos(\phi - \beta)] - M_{zc} \sin(\phi - \beta)\} |_{\phi=\beta} - m_z r \sin \phi \\
&\quad - m_x r (1 - \cos \phi) - p_y r^2 (\phi - \sin \phi) \\
M_z &= T_1 \sin \phi - M_{x1} \cos \phi - S_{y1} r \sin \phi + \{M_z \sin(\phi - \beta) - M_{xc} \cos(\phi - \beta) \\
&\quad - P_y r \sin(\phi - \beta)\} |_{\phi=\beta} + m_z r (1 - \cos \phi) - m_x r \sin \phi \\
&\quad - p_y r^2 (1 - \cos \phi) \\
S_y &= -S_{y1} + \{-P_y\} |_{\phi=\beta} - p_y r \phi
\end{aligned} \tag{18}$$

如果把图 2 中 1 端的约束全部放松, 则可应用前面类似的方法求得该端的各位移。通过一定的数学运算, 可写成下面的矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \delta_1^i \\ - \\ \delta_1^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^i & 0 \\ - & - \\ 0 & F_1^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1^i \\ - \\ R_1^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1^p & 0 \\ - & - \\ 0 & F_1^{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^i \\ - \\ P^n \end{bmatrix} \tag{19}$$

式中

$$P^i = [P_x, M_z, p_x, p_z, m_y]^T \tag{20}$$

$$P^n = [M_z, F_{xc}, F_{yc}, m_z, m_x, p_y]^T \tag{21}$$

分别是作用在单元曲率平面内和曲率平面外的荷载向量。

$$F_1^p = \begin{bmatrix} f_{11}^p & f_{12}^p & f_{13}^p & f_{14}^p & f_{15}^p & f_{16}^p \\ f_{21}^p & f_{22}^p & f_{23}^p & f_{24}^p & f_{25}^p & f_{26}^p \\ f_{31}^p & f_{32}^p & f_{33}^p & f_{34}^p & f_{35}^p & f_{36}^p \end{bmatrix} \tag{22}$$

$$F_1^{pn} = \begin{bmatrix} f_{11}^{pn} & f_{12}^{pn} & f_{13}^{pn} & f_{14}^{pn} & f_{15}^{pn} & f_{16}^{pn} \\ f_{21}^{pn} & f_{22}^{pn} & f_{23}^{pn} & f_{24}^{pn} & f_{25}^{pn} & f_{26}^{pn} \\ f_{31}^{pn} & f_{32}^{pn} & f_{33}^{pn} & f_{34}^{pn} & f_{35}^{pn} & f_{36}^{pn} \end{bmatrix} \tag{23}$$

分别为单位外力在单元 1 端的两个平面内产生的变形系数矩阵。其中的各系数 f_{ij}^p 和 f_{ij}^{pn} 列于附录 2。

实际上图 2 中 1 端的变形条件有 $\delta_1^i = \delta_1^n = 0$, 把这个条件代入 (19) 式, 就能解出单元在外荷载作用下的固端反力。其矩阵形式是

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^i \\ \mathbf{R}_1^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^i & 0 \\ 0 & \mathbf{F}_1^n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^{ip} & 0 \\ 0 & \mathbf{F}_1^{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}^i \\ \mathbf{P}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^i \mathbf{F}_1^{ip} \mathbf{P}^i \\ \mathbf{K}_{11}^n \mathbf{F}_1^{np} \mathbf{P}^n \end{bmatrix} \quad (24)$$

令 (17) 各式中的 $\phi = \alpha$, 得 2 端的固端力为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_2^i \\ \mathbf{R}_2^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{12}^i & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_{12}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^i \\ \mathbf{R}_1^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{12}^{ip} & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_{12}^{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}^i \\ \mathbf{P}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{12}^i \mathbf{R}_1^i + \mathbf{E}_{12}^{ip} \mathbf{P}^i \\ \mathbf{E}_{12}^n \mathbf{R}_1^n + \mathbf{E}_{12}^{np} \mathbf{P}^n \end{bmatrix} \quad (25)$$

式中

$$\mathbf{E}_{12}^{ip} = \begin{bmatrix} -\cos(\alpha - \beta) & -\sin(\alpha - \beta) & 0 & -r \sin \alpha \\ \sin(\alpha - \beta) & -\cos(\alpha - \beta) & 0 & r(1 - \cos \alpha) \\ -r(1 - \cos(\alpha - \beta)) & r \sin(\alpha - \beta) & -1 & -r^2(\alpha - \sin \alpha) \\ -r(1 - \cos \alpha) & 0 \\ -r \sin \alpha & 0 \\ r^2(1 - \cos \alpha) & -r \alpha \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{E}_{12}^{np} = \begin{bmatrix} -\cos(\alpha - \beta) & -\sin(\alpha - \beta) & -r(1 - \cos(\alpha - \beta)) \\ \sin(\alpha - \beta) & -\cos(\alpha - \beta) & -r \sin(\alpha - \beta) \\ 0 & 0 & -1 \\ -r \sin \alpha & -r(1 - \cos \alpha) & -r^2(\alpha - \sin \alpha) \\ r(1 - \cos \alpha) & -r \sin \alpha & -r^2(1 - \cos \alpha) \\ 0 & 0 & -r \alpha \end{bmatrix} \quad (27)$$

只要把 (24)、(25) 两固端力向量的符号改变, 就是单元两端的等效节点力。

四、曲梁单元的坐标变换

对于曲线桥梁结构, 可以取如图 3 所示的坐标体系。即让整体坐标系的 $\bar{y}$ 轴与局部坐标系的 y 轴取得一致。且认为该轴是一根主惯性轴, 则单元的坐标变换矩阵 T 是

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

其中

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\lambda_2 = \begin{bmatrix} \cos(\gamma \pm \alpha) & -\sin(\gamma \pm \alpha) & 0 \\ \sin(\gamma \pm \alpha) & \cos(\gamma \pm \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

五、算例

文献〔5〕给出了如图4所示三跨连续平面曲线梁桥的计算实例。该连续梁在桥台上为抗扭固定支承，在中间桥墩为点铰支座（即扭转不受约束）。

荷载情形：

- (1) 全桥上均布荷载 $g=220\text{KN/m}$ ；
- (2) 中跨均布荷载 $p=50\text{KN/m}$ ；
- (3) 中跨均布扭矩 $m_T=60\text{KNm/m}$ （活载作用在曲线外方偏心所引起）；
- (4) 中跨跨中的集中荷载 $P=600\text{KN}$ （加重车引起）；
- (5) 中跨跨中的集中扭矩 $M_T=2700\text{KNm}$ （加重车靠近曲线外方向行车道边缘时所引起）。

注意这里力的符号是从原文中引用来的，与本文中所用的符号有些不同。

图3 坐标系
 $\bar{x}$ 、 $\bar{z}$ —整体坐标轴
 x_1z_1 和 x_2z_2 —局部坐标轴



图4 算例的静力体系、主要尺寸和刚度值

作者把上述五种荷载情形作为五种荷载情况，用根据本文推导的有限元方法编制的计算机程序进行了内力与位移的计算分析。为了说明支承约束的影响，计算第一种荷载情形时，把中间桥墩上的支座也假定为抗扭固定。这里仅给出第一和第三两种荷载情形下的结果，分别

示于图 5 和图 6。与解析法〔5〕比较，其结果吻合良好。

六、结束语

本文推导的空间曲梁单元刚度矩阵以及这种单元的等效节点力，通过用矩阵形式表达和运算，使得复杂的曲线结构受力分析变得简单，并且与熟知的直梁单元形成对照，概念清楚，应用方便。通过数值算例分析，其结果与理论解吻合良好，表明这种单元的工作性能是可靠的。

由于这种方法实用性强，它已作为笔者与北京市政设计院合作开发“桥梁结构分析程序系统”课题中曲桥计算的主要方法。

在公路桥梁中，经常会遇到并列多梁式曲线梁桥。若把这种类型的桥视为曲线格子梁，

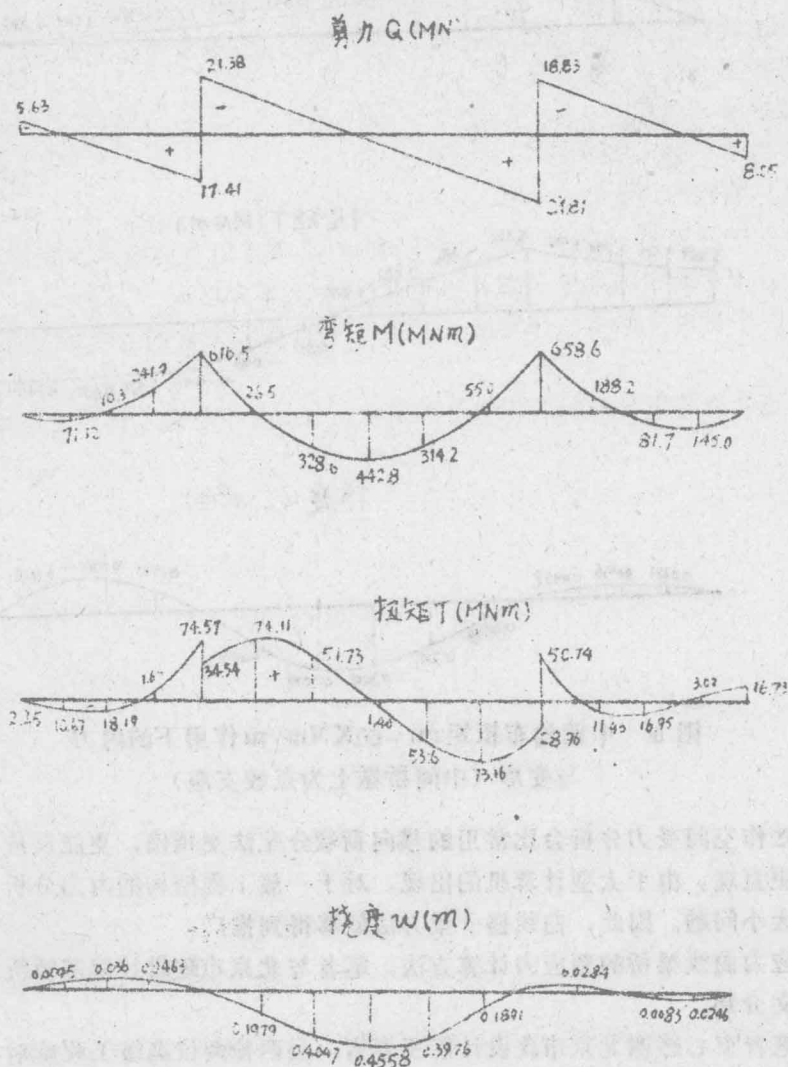


图 5 全梁上均布荷载 $g = 220 \text{ kN/m}$ 作用下的内力与变影 (中间桥墩上支座抗扭固定)

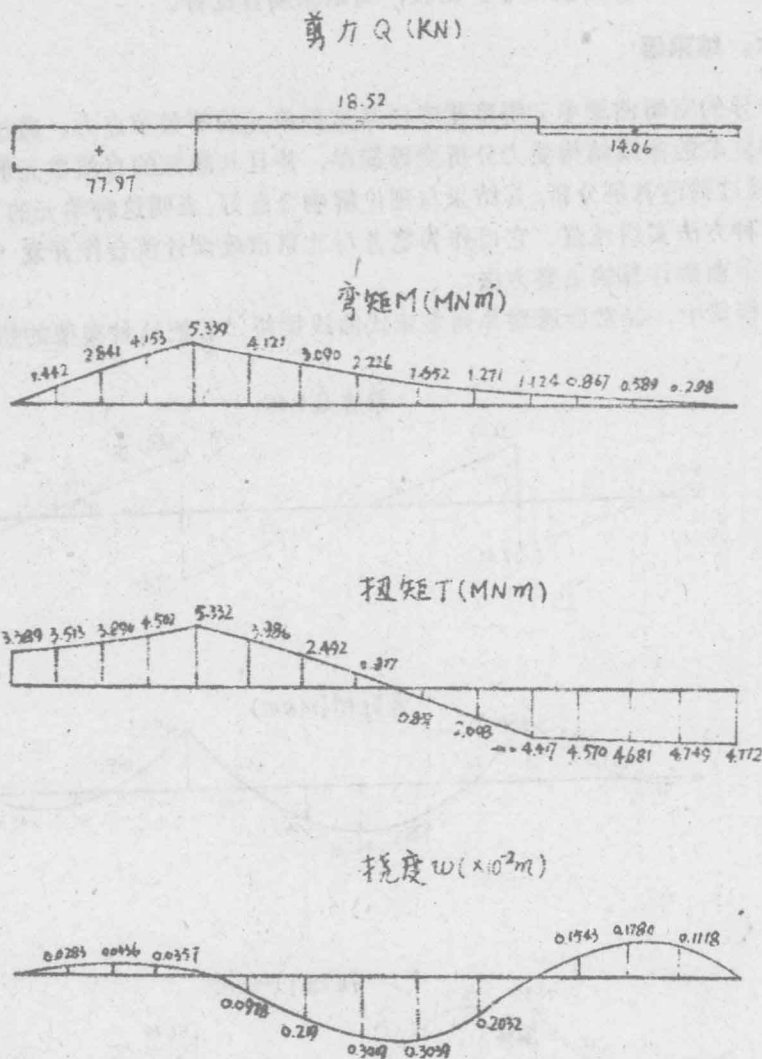


图 6 中跨均布扭矩 $m_t = 60 \text{ KNm/m}$ 作用下的内力
与变形 (中间桥墩上为点铰支座)

用本文的方法作空间受力分析会比常用的横向荷载分配法更精确，更能反应桥梁的实际受力特性，而且更直观。由于大型计算机的出现，对于一般工程结构的内力分析，无需去考虑计算机的内存大小问题。因此，曲线格子梁方法能够得到推广。

关于预应力曲线梁桥的预应力计算方法，笔者与北京市政设计院道桥所有关同志正在研究中，将另文介绍。

最后，笔者衷心感谢北京市政设计院王春富，吴西伦两位高级工程师对本文的热情指导和帮助。

附录一 单元柔度系数

$$f_{11}^i = \frac{r}{EA_z} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) + \frac{r^3}{EI_y} \left(\frac{3}{2}\alpha - 2\sin\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) + \frac{r}{GA_{xz}} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$$

$$f_{12}^i = \frac{r}{EA_z} \frac{1}{2} \sin^2 \alpha - \frac{r^3}{EI_y} \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha)^2 - \frac{r}{GA_{xz}} \frac{1}{2} \sin^2 \alpha$$

$$f_{13}^i = \frac{r^2}{EI_y} (\alpha - \sin \alpha)$$

$$f_{22}^i = \frac{r}{EA_z} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) + \frac{r^3}{EI_y} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) + \frac{r}{GA_{xz}} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$$

$$f_{23}^i = -\frac{r^2}{EI_y} (1 - \cos \alpha)$$

$$f_{33}^i = \frac{r\alpha}{EI_y}$$

$$f_{11}^n = \frac{r}{EI_x} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) + \frac{r}{GI_d} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$$

$$f_{12}^n = -\frac{r}{EI_x} \frac{\sin^2 \alpha}{2} + \frac{r}{GI_d} \frac{\sin^2 \alpha}{2}$$

$$f_{13}^n = -\frac{r^2}{EI_x} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) + \frac{r^2}{GI_d} \left(\sin \alpha - \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$$

$$f_{22}^n = \frac{r}{EI_x} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) + \frac{r}{GI_d} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} \right)$$

$$f_{23}^n = \frac{r^2}{EI_x} \frac{\sin^2 \alpha}{2} + \frac{r^2}{GI_d} \left(1 - \cos \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right)$$

$$f_{33}^n = \frac{r^3}{EI_x} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right) + \frac{r^3}{GI_d} \left(\frac{3}{2}\alpha - 2\sin \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) + \frac{r\alpha}{GA_{xy}}$$

附录二 荷载变形系数

$$f_{11}^p = \frac{r}{EA_z} \left[\frac{\alpha - \beta}{2} \cos \beta + \frac{1}{2} \cos \alpha \sin(\alpha - \beta) \right] + \frac{r^3}{EI_y} \left[(\alpha - \beta) \left(1 + \frac{1}{2} \cos \beta \right) - \sin \alpha + \sin \beta - \sin(\alpha - \beta) \left(1 - \frac{1}{2} \cos \alpha \right) \right]$$

$$f_{12}^p = \frac{r}{EA_z} \left[\frac{1}{2} \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \sin \beta \right] + \frac{r^3}{EI_y} \left[1 - \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \sin \beta \right]$$

$$f_{13}^{ip} = \frac{r^2}{EI_y} [a - \beta - \sin(a - \beta)]$$

$$f_{14}^{ip} = \frac{r^2}{EA_z} \frac{\sin^2 a}{2} + \frac{r^4}{EI_y} \left[a \left(\frac{a}{2} - \sin a \right) + \frac{1}{2} \sin^2 a \right]$$

$$f_{15}^{ip} = \frac{r^2}{EA_z} \left(\sin a - \frac{a}{2} - \frac{\sin^2 a}{4} \right) - \frac{r^4}{EI_y} \left(\frac{3}{2} a - 2 \sin a + \frac{\sin^2 a}{4} \right)$$

$$f_{16}^{ip} = \frac{r^3}{EI_y} \left[\frac{1}{2} a^2 - a \sin a - \cos a + 1 \right]$$

$$f_{21}^{ip} = \frac{r}{EA_z} \left[\frac{1}{2} (a - \beta) \sin \beta + \frac{1}{2} \sin a \sin(a - \beta) \right] - \frac{r^3}{EI_y} \left[\cos \beta - \cos a - \frac{1}{2} (a - \beta) \sin \beta - \frac{1}{2} \sin a \sin(a - \beta) \right]$$

$$f_{22}^{ip} = \left(\frac{r}{EA_z} + \frac{r^3}{EI_y} \right) \left[\frac{1}{2} (a - \beta) \cos \beta - \frac{1}{2} \cos a \sin(a - \beta) \right]$$

$$f_{23}^{ip} = \frac{r^2}{EI_y} (\cos a - \cos \beta)$$

$$f_{24}^{ip} = \frac{r^2}{EA_z} \left(\frac{a}{2} - \frac{\sin^2 a}{4} \right) - \frac{r^4}{EI_y} \left(\sin a - a \cos a - \frac{a}{2} + \frac{\sin^2 a}{4} \right)$$

$$f_{25}^{ip} = \left(\frac{r^2}{EA_z} + \frac{r^4}{EI_y} \right) \left(1 - \cos a - \frac{1}{2} \sin^2 a \right)$$

$$f_{26}^{ip} = -\frac{r^3}{EI_y} (\sin a - a \cos a)$$

$$f_{31}^{ip} = \frac{r^2}{EI_y} [a - \beta - \sin(a - \beta)]$$

$$f_{32}^{ip} = -\frac{r^2}{EI_y} [1 - \cos(a - \beta)]$$

$$f_{33}^{ip} = \frac{r}{EI_y} (a - \beta)$$

$$f_{34}^{ip} = \frac{r^3}{EI_y} \left(\frac{1}{2} a^2 + \cos a - 1 \right)$$

$$f_{35}^{ip} = -\frac{r^3}{EI_y} (a - \sin a)$$

$$f_{36}^{ip} = \frac{r^2 a^2}{2EI_y}$$

$$f_{11}^{np} = \frac{r}{GI_d} \left[\frac{1}{2} (a - \beta) \cos \beta + \frac{1}{2} \cos a \sin(a - \beta) \right] + \frac{r}{EI_x} \left[\frac{1}{2} (a - \beta) \cos \beta \right]$$

$$-\frac{1}{2}\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)]$$

$$f_{12}^{np} = \frac{r}{GI_d} \left[\frac{1}{2}\sin\alpha\sin(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\beta \right] - \frac{r}{EI_x} \left[\frac{1}{2}\sin\alpha\sin(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\beta \right]$$

$$f_{13}^{np} = \frac{r^2}{GI_d} \left[\sin\alpha - \sin\beta - \frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\beta - \frac{1}{2}\cos\alpha\sin(\alpha-\beta) \right] - \frac{r^2}{EI_x} \left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\beta - \frac{1}{2}\cos\alpha\sin(\alpha-\beta) \right]$$

$$f_{14}^{np} = \frac{r^2}{GI_d} \frac{1}{2}\sin^2\alpha + \frac{r^2}{EI_x} \left(1 - \cos\alpha - \frac{1}{2}\sin^2\alpha \right)$$

$$f_{15}^{np} = \frac{r^2}{GI_d} \left(\sin\alpha - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha \right) - \frac{r^2}{EI_x} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha \right)$$

$$f_{16}^{np} = \frac{r^3}{GI_d} (\alpha\sin\alpha + \cos\alpha - 1 - \frac{1}{2}\sin^2\alpha) - \frac{r^3}{EI_x} \left(1 - \cos\alpha - \frac{1}{2}\sin^2\alpha \right)$$

$$f_{21}^{np} = \frac{r}{GI_d} \left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\sin(\alpha-\beta) \right] + \frac{r}{EI_x} \left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\sin(\alpha-\beta) \right]$$

$$f_{22}^{np} = \frac{r}{GI_d} \left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\beta - \frac{1}{2}\cos\alpha\sin(\alpha-\beta) \right] + \frac{r}{EI_x} \left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\beta + \frac{1}{2}\cos\alpha\sin(\alpha-\beta) \right]$$

$$f_{23}^{np} = \frac{r^2}{GI_d} \left[\cos\beta - \cos\alpha - \frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\beta - \frac{1}{2}\sin\alpha\sin(\alpha-\beta) \right] - \frac{r^2}{EI_x} \left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\sin\beta - \frac{1}{2}\sin\alpha\sin(\alpha-\beta) \right]$$

$$f_{24}^{np} = \frac{r^2}{GI_d} \left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{\sin^2\alpha}{4} \right) - \frac{r^2}{EI_x} \left(\sin\alpha - \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin^2\alpha}{4} \right)$$

$$f_{25}^{np} = \frac{r^2}{GI_d} \left(1 - \cos\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha \right) + \frac{r^2}{EI_x} \frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

$$f_{26}^{np} = \frac{r^3}{GI_d} \left(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha - \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin^2\alpha}{4} \right) + \frac{r^3}{EI_x} \left(\sin\alpha - \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin^2\alpha}{4} \right)$$

$$f_{31}^{np} = \frac{r^2}{GI_d} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\cos\alpha \right) \sin(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\beta \right] - \frac{r^2}{EI_x} \left[\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\beta - \frac{1}{2}\cos\alpha\sin(\alpha-\beta) \right]$$

$$f_{32}^{xx} = \frac{r^2}{GI_d} \left[1 - \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} (\alpha - \beta) \sin \beta \right]$$

$$+ \frac{r^2}{EI_x} \left[\frac{1}{2} (\alpha - \beta) \sin \beta + \frac{1}{2} \sin \alpha \sin(\alpha - \beta) \right]$$

$$f_{33}^{xx} = \frac{r^3}{GI_d} \left[(\alpha - \beta) \left(1 + \frac{1}{2} \cos \beta \right) - \sin \alpha + \sin \beta - \left(1 - \frac{1}{2} \cos \alpha \right) \right]$$

$$\sin(\alpha - \beta) \left. \right] + \frac{r^3}{EI_x} \left[\frac{1}{2} (\alpha - \beta) \cos \beta - \frac{1}{2} \cos \alpha \sin(\alpha - \beta) \right]$$

$$f_{34}^{xx} = \left(\frac{r^3}{GI_d} - \frac{r^3}{EI_x} \right) \left(1 - \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right)$$

$$f_{35}^{xx} = \frac{r^3}{GI_d} \left(\frac{3}{2} \alpha - 2 \sin \alpha + \frac{1}{4} \sin 2\alpha \right) + \frac{r^3}{EI_x} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\alpha \right)$$

$$f_{36}^{xx} = \frac{r^4}{GI_d} \left(\frac{1}{2} \alpha^2 - \alpha \sin \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right) - \frac{r^4}{EI_x} \left(1 - \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right)$$

附录三 三阶柔度矩阵求逆公式

设

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}$$

其中

$$k_{11} = (f_{22} f_{33} - f_{23}^2) / D$$

$$k_{22} = (f_{11} f_{33} - f_{13}^2) / D$$

$$k_{33} = (f_{11} f_{22} - f_{12}^2) / D$$

$$k_{12} = k_{21} = (f_{13} f_{23} - f_{12} f_{33}) / D$$

$$k_{13} = k_{31} = (f_{12} f_{23} - f_{13} f_{22}) / D$$

$$k_{23} = k_{32} = (f_{12} f_{13} - f_{11} f_{23}) / D$$

$$D = f_{11} (f_{22} f_{33} - f_{23}^2) + f_{12} (f_{13} f_{23} - f_{12} f_{33}) + f_{13} (f_{12} f_{23} - f_{13} f_{22})$$

附录四 主要符号

A_x 横截面面积

A_{ex}, A_{ey} 有效剪切面积

I_x, I_y 截面惯性矩

I_d 扭转常数

E, G 弹性模量, 剪切模量

i, n 分别代表曲率平面内和曲率平面外

N, u 轴力, 轴向位移

S_x, v 径向剪力, 径向位移
 S_y, w 竖向剪力, 竖向挠度
 T, τ 扭矩, 扭角
 M_x, θ_x 径向弯矩, 转角
 M_y, θ_y 竖向弯矩, 转角
 f_{ij}, κ_{ij} 柔度系数, 刚度系数
 F, K 柔度矩阵, 刚度矩阵
 E, T 平衡矩阵, 变换矩阵
 R, δ 节点力与节点位移向量
 p_x, p_y, p_z 均布荷载
 P_x, P_y, P_z 集中荷载
 m_x, m_y, m_z 均布力矩
 M_x, M_y, M_z 集中力矩
 r, α 曲率半径, 圆心夹角
 β, ϕ 集中力作用位置, 曲线坐标。

参考文献

- [1] [日] 高岛春生著, 张德礼译:《曲线梁桥》, 中国建筑工业出版社, 1979年, 北京
- [2] 姚玲森: 曲线梁桥的实用计算方法, 《土木工程学报》, 1982年第3期
- [3] 黄剑源, 张罗溪: 考虑翘曲作用的曲线格子梁理论与应用——青岛曲线斜支承格子梁桥的分析, 《土木工程学报》, 1987年第3期
- [4] 张罗溪: 薄壁曲线梁桥的计算分析, 铁道部第三设计院《科技通讯》, 1967年第1期
- [5] 姚玲森编译: 平面曲线连续梁的实用计算, 《公路》, 1985年第4期和第5期
- [6] 吴西伦: 介绍一座弯、斜桥的结构和结构分析, 《公路》, 1986年第6期和第7期
- [7] C. P. Heins Steel Curved I and Box Girder Design and Analysis, Analysis and Design of Bridges, Netherlands, 1984
- [8] Peter waldron: Stiffness Analysis of Thinwalled Girders, Journal of structural Engineering, ASCE, Vol. 112, NO. 6, June, 1986