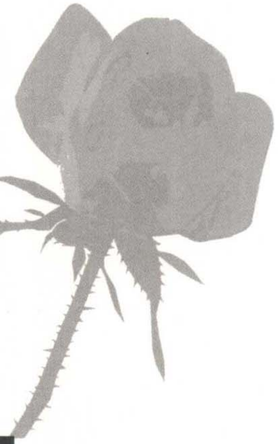

棘手又迷人的数学

概率统计拾遗

从平凡中发掘惊奇，给你一个又一个意外．
比如打麻将掷骰子定庄问题，谁掷对自己坐庄才有利呢？
通过简单严谨的分析计算，得出的结论令人口服心服，
其方法平凡而又有启发性．
书中有不少看似平凡其实暗藏玄机的问题，
要想真正想明白，
真是要有不怕棘手的精神．

孙荣恒／著

$$\left(\sum_{k=0}^{0}\frac{\lambda^k}{k!}+\sum_{k=0}^{1}\frac{\lambda^k}{k!}+\cdots\right.$$

科学出版社

棘手又迷人的数学

概率统计拾遗

孙荣恒/著

科学出版社
北京

总　　序

数学如一束玫瑰，棘手，但很迷人．

数学的美是迷人的．然而很多漂亮有趣的数学题，开始常常叫人产生无从下手之感，所以数学又常常是棘手的．其中组合数学的问题更是五花八门，几乎每个题目都要有独特的思路，使你在解题的思考过程中得以充分享受“从山重水复走向柳暗花明”的乐趣，体验在百思不解后豁然开朗的快乐．

擅长组合数学的柳柏濂先生，从他多年研究成果和数学教学的思考中撷取精华，写成十几篇数学小品与读者共同分享，其书名取为《数学，棘手但很迷人》，是非常贴切的．

这本书是本丛书的第一册，丛书其他分册内容形式多有不同而各具特色．编者用《棘手又迷人的数学》作为丛书的书名，想来主要是希望读者从多个角度领略数学的迷人和棘手之处.

柳先生的这些短文，引领我们走进一个颇有深度的数学世界．他不满足于浮光掠影或眼前一亮，而是与读者一同思考和探索．在脍炙人口的“阿凡提传奇”中，他选取了一个巧拆金环的故事，让我们在惊叹中，欣赏数论的完备分拆和有关的新结果．接着，作者带领我们从动物园的栏栅前和每天上下往返的楼梯中，走向组合数学的前沿观光；又从法国著名数学家傅里叶的经典提问，谈到中国古代的数学泰斗祖暅的数学原

理；从生命科学“克隆”羊的伟大成就谈起，把现代图论的知识和思维奉献给读者．其他如从有机化合物谈到红楼梦的族谱，再引出信息科学技术中的密码、树结构和有相当难度的机器证明；从宋代词人的名句将我们引向他的研究专题“组合矩阵论”中寻寻觅觅；又在绞肉机旁，把函数的迭代引向“混沌”的动力系统理论；在眼花缭乱的应用中，我们领会了数学模型的真谛，尝到了数学的美味……“棘手但很迷人”，也就成为作者与读者的共同体验了．作者用几乎是文学而不是数学的笔触，给我们娓娓道出现代数学的“故事”．这不是东采西摘的材料堆砌，而是一个二十多年来承担国家自然科学基金任务的教授在研究之余的思想札记．

“棘手但很迷人”，这是数学学习甘苦的内心独白，也是数学探索“无限风光在险峰”的壮志豪言．

古老的幻方，是棘手但却迷人的数学主题之一．吴鹤龄先生为《好玩的数学》丛书写了一本《幻方及其他——娱乐数学经典名题》（第二版），引得许多读者对幻方入迷而且跃跃欲试，詹森先生就是其中之一．詹先生玩幻方玩得熟能生巧，玩出了创新，把“棘手”玩成了顺手．于是他为本丛书写了一本《你亦可以造幻方》，与读者分享成功的快乐．书中提供了构造奇数阶的幻方、完美幻方、对称幻方、对称完美幻方、奇偶数分开的对称幻方等多种构造幻方的方法．构造一个这样的幻方，只需两步或三步，这两三步小学生都可以做到．即使你还没有完全理解其中的道理，也能造出许多个有各种特色的幻方．

具有不确定性的事件叫随机事件．随机事件的数学问题常常是迷人而棘手的．在《好玩的数学》丛书中《趣味随机问

题》一书的作者孙荣恒教授，这次又为我们带来了一串新的故事．他的新作《概率统计拾遗》，从平凡中发掘惊奇，给读者一个又一个意外．比如打麻将要掷骰子定庄的问题．有人认为自己掷骰子对自己坐庄有利，想自己坐庄者常抢着掷；有的人认为谁掷都一样，4 家坐庄机会均等，都是 1/4. 两种看法哪一种正确？意外的答案是都错了．由此引出的纸上作业法，有各种各样的应用．又如由鞋子配对引出的 S 矩阵给出四同、五同等问题的简单计算法．孙先生通过简单、严谨的分析计算，得出的结论令人口服心服，其方法平凡而又有启发性．像这样来自生活的看似平凡其实暗藏玄机的问题书中不少，有的例子涉及考生的成绩，有的例子涉及法官的判决，要想真正想明白，真是要有不怕棘手的精神．

如果在棘手的辛劳之余想轻松一下，就翻翻本丛书中的另一本《邮票王国中的迷人数学》吧．作者之一是大家熟悉的易南轩老师，他的《数学美拾趣》（第二版）深受读者欢迎，也是《好玩的数学》丛书中的一册．另一位作者王芝平老师也是作品颇丰的数学教育专家．两位先生花费了三年多的光阴和心血，收集整理了 1300 多枚与数学有关的邮票，按图索骥，向我们一一道来．邮票的轮廓联系着各种几何形体，邮票的主题或涉及数学史上的事件，或纪念数学家的丰功伟绩，或展示数学的应用，琳琅满目，美不胜收．联系着这上千余枚邮票，作者纵横畅叙，笔墨酣畅，谈古论今，说天看海，大至卫星飞船，小至象棋游戏，都和数学的美妙关联起来．不论是数学爱好者、集邮爱好者或一般的读者，都能在阅读此书时享受人类文明之雅趣．不过这并不棘手，棘手的工作作者已经代我们辛劳了．

本丛书的读者可能有男女老少，可能术业各有专攻，对数学的理解和鉴赏的角度与能力各不相同．有人认为棘手的问题，也有人能够驾 轻就熟地手到擒来．但编者希望并且相信，每位翻阅过丛书的朋友都能从中看到几点迷人的星光；果真如此，那将是作者和编者最大的快乐．

2011 年 11 月 9 日

前　言

断断续续花了两年多时间才写成这本书．它所讨论的内容是概率统计方面被别人疏忽的一些小而有趣的问题，属于拾遗补阙一类，故取其名为：概率统计拾遗．全书分为 11 个部分，每个部分讨论一个专题，各个专题独立成立．有的专题曾为重庆大学的学生作过专题报告．因此，本书也可叫做：专题报告集．前 8 个部分属于概率论的内容，第 9 和第 10 部分属于数理统计的内容，第 11 部分既与概率统计有关，也与随机过程和排队论有关．因此，阅读本书需要初步概率统计知识．书中大部分结果是本书首次给出的，有些概念，如频数分布、频数母函数、事件的奇交、事件的偶交、S 分布、S 矩阵等也是作者第一次给出的．但是，这不是作者写本书的主要目的．作者是想在如何发现和提出问题、如何分析和解决问题、如何推广和应用已解决的问题上能为读者（尤其是年轻读者）提供一点点帮助．

作者首先要感谢林德华教授对本书 11 个部分的整合给予的帮助．还要感谢重庆大学数学和统计学院对本书出版给予的资助．

由于作者水平有限，书中一定存在不少缺点和错误，恳请读者批评指正．

孙荣恒

2011 年 5 月

目　　录

1　由打麻将定庄引出的几个问题

打麻将是一种古老、简单、受人喜爱的游戏，它起源于中国，已有几千年的历史，可以说是中国的国宝．最初打麻将是宫廷里的一种游戏，逐步传到民间，经过长期的演变，到明朝已形成基本的玩法．有人说是明朝江苏泰仓一个粮仓里的一些人把它定为条、筒、万各 36 张，东、南、西、北、中、发、白各 4 张，共计 136 张牌的模式．也有人说是郑和在下西洋的船上为了打发无聊的时间，常与手下人打牌而逐步形成 136 张牌的模式．今天，它不仅风靡全国，而且传遍全球，像象棋、围棋等运动项目一样，还定期举行国际性比赛．打麻将特别受到老年人的喜爱，因为它不仅可以怡性、健身、健脑，而且还可以打发退休后的时间．

打麻将，首先要掷骰子（一般是掷两颗均匀骰子）定庄．有人认为自己掷骰子对自己坐庄有利，故想自己坐庄者（庄家有先多摸一张牌的好处）常抢着掷．有时为尊敬（年）长者，常谦让请长者掷．有的人认为谁掷都一样，4 家坐庄机会均等，都是 1/4．这不得不使人提出如下问题：这 2 种看法哪一种正确？由此，就引出如下几个问题．现按照思路的顺序逐个进行介绍．

1.1　打麻将掷两颗骰子定庄谁掷对自己坐庄有利

为回答此问题，我们先来看看掷两颗骰子出现点数和的（频数）分布．掷两颗骰子出现的点数和可能是 2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12 之一．而这 11 个数出现的可能频数分别是 1，2，3，4，5，6，5，4，3，2，1，即如表 1.1 所示．

表 1.1

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

由表 1.1 可知,如果由南家掷两颗骰子定庄,当点数和为 5 或 9 时,则南家坐庄,而与 5 和 9 对应的数是 4 和 4,它们的和为 8;当点数和为 2 或 6 或 10 时,则东家坐庄,而与 2,6,10 对应的数分别是 1,5,3,这 3 个数之和为 9;当点数和为 3 或 7 或 11 时,则北家坐庄,而与 3,7,11 对应的数分别是 2,6,2,这 3 个数之和为 10;当点数之和为 4 或 8 或 12 时,则西家坐庄,而与 4,8,12 对应的数分别是 3,5,1,这 3 个数和为 9(见下图). 我

3,7,11
2 + 6 + 2 = 10
北

4,8,12
3 + 5 + 1 = 9
西

2,6,10
1 + 5 + 3 = 9
东

5,9
4 + 4 = 8
南

们又知道,掷两颗骰子出现的两点数共有 $6^2 = 36$ 种不同的排列. 由上述知,南、东、北、西家分别有 8,9,10,9 种排列,也即南、东、北、西家坐庄的概率分别为 8/36,9/36,10/36,9/36(将上表第 2 行诸数均除以 36 就得概率分布表). 因此,最后的结论是:请对家掷骰子对自己坐庄最有利,自己掷骰子对自己坐庄最不利.

类似可知,掷 3 颗骰子定庄,自己掷或下家掷对自己坐庄有利. 掷 4 颗骰子定庄,上家掷对自己坐庄最有利,下家掷对自己坐庄最不利. 为什么? 这分别与掷 3 颗骰子点数和分布与掷 4 颗骰子点数和分布有关. 关于这两个分布可参阅下节.

在实际当中,有时候掉了 1 个骰子,这时常用 1 个骰子定庄. 用掷 1 个骰子定庄显然自己掷或上家掷对自己坐庄有利. 由于掷 2 颗骰子等价

于将 1 颗骰子连续掷 2 次,这样会提出如下的问题:第 1 次骰子点数为多少时对自己坐庄有利? 易知:如果仍由南家掷骰子,当第 1 颗骰子为 1 或 2 或 6 或 5 时北家坐庄的概率均为 1/3 ,为 1 或 4 或 5 时东家坐庄概率均为 1/3 ,为 2 或 3 或 6 时西家坐庄均为 1/3 ,为 3 或 4 时南家坐庄均为 1/3 ,最后得:

对南家坐庄有利的第 1 次点数是 3,4;

对东家坐庄有利的第 1 次点数是 1,4,5;

对北家坐庄有利的第 1 次点数是 1,2,5,6;

对西家坐庄有利的第 1 次点数是 2,3,6.

即

第 1 次掷 1 对北家和东家坐庄有利;

第 1 次掷 2 对北家和西家坐庄有利;

第 1 次掷 3 对南家和西家坐庄有利;

第 1 次掷 4 对南家和东家坐庄有利;

第 1 次掷 5 对东家和北家坐庄有利;

第 1 次掷 6 对北家和西家坐庄有利.

1.2 如何决策

甲乙两人进行一种轮流掷 3 颗骰子比点数和大小的游戏. 当两人下注以后,由一人先掷. 如果先掷者掷出 3 颗骰子的点数分别为 4, 5,6,第 2 个人可以掷,也可以不掷. 如果他掷,掷出点数和大于 15,他将赢得所有赌注;如果掷出点数和小于 15,他将输掉他所下的赌注;如果掷出点数和为 15,则这一局为和局,各自取回自己赌注;如果他不掷,他将输掉所下赌注的一半. 试为后掷者决策,是否放弃掷这一局骰子?

要回答此问题,先得算出掷 3 颗骰子点数和的频数分布,易知,此分布为表 1.2.

表 1.2

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

由表 1.2 知,如果他掷,他赢的概率为 10/216,不到 5%;他输的概率为 196/216,超过 90%;和的概率为 10/216,不到 5%,因此建议他投降,放弃掷这一局骰子.

很自然,我们会问:何时选择掷?何时选择不掷?严格地说,没有统一标准.不过,当赢的概率不小于 0.5 或输的概率不大于 0.5 时,应选择掷.当输的概率大于 0.5,应选择不掷,其他情形不定.即当 3 点和不大于 10 时,掷;当 3 点和不小于 12 时,不掷;当 3 点和等于 11 时,可以掷,可以不掷,大多数人可能还是选择掷.

如果游戏改为把 3,4,…,17,18 这 16 个数分为两组,第 1 组为数字 8,9,10,11,12,其余 11 个数为第 2 组.如果掷出的 3 颗骰子的点数和为第 1 组中的一个数,则一人赢;否则,另一人赢.那么,为了赢,你该选那一组数?由表 1.2 知,选第一组赢的概率为

$$\frac{21+25+27+27+25}{216}=\frac{125}{216}=0.5787>0.5,$$

所以,应该选第 1 组.

如果掷 4 颗骰子,点数和将为 4,5,…,23,24 之一.现把这 21 个数分成两组,第 1 组是数字 12,13,14,15,16.其余 16 个数为第 2 组.当掷出 4 颗骰子点数和为第 1 组中的一个数时,则一人赢;否则另一人赢.那么,为了赢,这时你该选哪一组数呢?为回答这个问题,先得求出 4 颗骰子点数和的分布.用求 3 颗骰子点数和分布的相同方法可求得 4 颗骰子点数和分布.只不过现在更麻烦了.例如,掷 4 颗骰子点数和为 11 将由

6311,6221,5411,5321,4412,4322,3332,3312,2225

9 个不同的数组构成,而这 9 个不同的数组分别有

$$C_4^2\cdot 2!,C_4^2\cdot 2!,C_4^2\cdot 2!,4!,C_4^2\cdot 2!,C_4^2\cdot 2!,C_4^1,C_4^2\cdot 2!,C_4^1$$

种不同排列,这些不同排列种数之和为 104,即掷 4 颗骰子点数和为 11 共

有 104 种不同排列．对于和为 4,5,6,…,10,12,13,…,24 亦可用相同方法分别求出它们的排列种数，于是，可得表 1.3.

表 1.3

4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140	125	104	80	56	35	20	10	4	1

又因 $6^4=1296$，由表 1.3 知，选第 1 组赢的概率为

$$\frac{125+140+146+146+125}{1296}=\frac{676}{1296},$$

选第 2 组赢的概率为

$$\frac{1296-676}{1296}=\frac{620}{1296},$$

因此，仍应该选第 1 组．

求掷 5 颗或 5 颗以上骰子点数和的分布可用求掷 4 颗骰子点数和分布相同的方法．但是，用此方法太麻烦，而用下面公式(1.1)或表 1.9 将简单得多．

1.3　数字和的分布

前两个问题都与掷骰子求出现点数和分布有关．所谓骰子就是将正六面体的六个面分别刻上 1,2,3,4,5,6 个点．类似，将均匀硬币的两个面上分别写上 1 和 2 两个数字，可以把这样的硬币看成正两面体．可以考虑掷几个这样的正两面体求出现的数字和分布问题．将正四面体的四个面上分别写上数字 1,2,3,4，我们也可以考虑掷几个这样的四面体求与桌面接触的数字和分布问题．显然，这些问题就是有放回随机取若干个数字然后求取出的数字和分布问题．

即设有编号为 1,2,3,4,5,6(7,8,…)个袋子，(为了叙述方便)袋中分别装 1 到 1,1 到 2,…,1 到 6(1 到 7,1 到 8,…)(同类型)个球，球上分别写上 1 到 1,1 到 2,…,1 到 6(1 到 7,1 到 8,…)个诸数字，即将 1 号袋

中的一个球上写上 1 一个数字，将 2 号袋中的两个球上分别写上数字 1 和 2，将 3 号袋中的 3 个球上分别写上数字 1，2，3，其他依此类推．这样，求掷两颗骰子出现点数和分布就等价于从 6 号袋中有放回连续摸两个球求两球上数字和分布；求掷 3 个四面体与桌面接触的 3 个数字和分布就等价于从 4 号袋中有放回连续摸出 3 个球求球上 3 个数字和分布；求掷 4 个硬币出现数字和分布就等价于从 2 号袋中有放回连续摸 4 个球求摸出的球上数字和分布；求掷 1 个骰子与 1 个硬币出现点数和分布等价于先从 6 号袋中摸 1 个球，再从 2 号袋中摸 1 个球，求 2 个球上数字和分布；等等．现来看几个例子：

【例 1.1】 易知，从 2 号袋中有放回（连续）摸 2 个球，2 个球上数字和频数分布为

2	3	4
1	2	1

简记为［2(1)，3(2)，4(1)］．

从 2 号袋中有放回摸 3 个球，3 个球上数字和分布为［3(1)，4(3)，5(3)，6(1)］，即

3	4	5	6
1	3	3	1

从 2 号袋中有放回摸 4 个球，4 个球上数字和分布为［4(1)，5(4)，6(6)，7(4)，8(1)］，即

4	5	6	7	8
1	4	6	4	1

【例 1.2】 从 2 号袋中有放回摸 2 个球，再从 3 号袋中摸 1 个球，求 3 个球上数字和的频数分布．

解 首先，3 数之和可能为 3，4，5，6，7 之一．和为 3 只能是 3 个数均