21世纪普通高等教育规划教材 · 公共基础课系列
21 SHI JI PU TONG GAO DENG JIAO YU GUI HUA JIAO CAI · GONGGONG JICHUKE XILIE

第三版

线性代数

Linear Algebra

主　编　尤正书　刘俊菊
副主编　朱　华

上海财经大学出版社

21世纪普通高等教育规划教材·公共基础课系列

线性代数

（第三版）

尤正书　刘俊菊　主　编
朱　华　副主编

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/尤正书,刘俊菊主编.—3版.—上海:上海财经大学出版社,2016.1

(21世纪普通高等教育规划教材·公共基础课系列)

ISBN 978-7-5642-1861-4/F·1861

Ⅰ.①线… Ⅱ.①尤…②刘… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第047672号

□责任编辑 袁春玉
□装帧设计 晨 宇
□责任校对 卓 妍 王从远

XIANXING DAISHU
线 性 代 数
(第三版)
尤正书 刘俊菊 主 编
朱 华 副主编

上海财经大学出版社出版发行
(上海市武东路321号乙 邮编200434)
网 址:http://www.sufep.com
电子邮箱:webmaster @ sufep.com
全国新华书店经销
上海华业装璜印刷厂印刷装订
2016年1月第3版 2016年1月第1次印刷

787mm×1092mm 1/16 11.25印张 288千字
印数:23 001—28 000 定价:30.00元

21世纪普通高等教育规划教材

21 SHI JI PU TONG GAO DENG JIAO YU GUI HUA JIAO CAI

编委会

BIAN WEI HUI

第三版前言

线性代数是理工类和经管类高等院校学生的一门重要基础课.由于这门课程比较抽象,学生学习有一定难度,而以前可供学生选用的线性代数教材又偏难.为了使教材既符合学生的实际情况,又能满足教学的要求,我们集中了湖北大学知行学院的骨干教师,精心编写了这本教材.本教材的主要特点是:语言通俗易懂,内容循序渐进;为便于学生解题,选择的例题也较多;重视应用,对难证明的定理只给出结论而不作详细证明,使学生将学习的主要方向放在会计算、应用等实际操作能力的训练上;每章末专门配置了典型例题解析,使学生在掌握重点内容的基础上有所提高;在第一章中,我们增加了空间直角坐标系的内容,主要是为没有学过这些知识的学生设置.

参加本书改编的有:梁军、尤正书、刘俊菊、朱华、吴海燕、余跃丰.

尤正书负责审稿和统稿.

尽管各位编者尽其所能,但由于我们的水平有限,编写时间仓促,本书可能有不少缺点和错误,欢迎广大师生、读者批评指正.

编者

2015年10月

目　录

第一章 行列式及空间直角坐标系

行列式是从解线性方程组的过程中产生和建立起来的，它是一个重要的数学工具，有时起到简化运算的作用.本章先介绍二阶、三阶行列式，再引出 n 阶行列式的概念，并给出行列式的性质和计算方法，最后介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆法则. 为了对空间有直观感受并了解线性方程组的直观意义，引入空间直角坐标系及平面和直线等方程的概念，如果学过此内容，也可略过此节.

第一节 行列式

一、二阶行列式

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1—1}$$

其中，x_1,x_2 为未知量；$a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 为未知量的系数；b_1,b_2 为常数项.

解此方程，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，有

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1—2}$$

为了便于记忆，引入符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 来表示 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ 来表示 $b_1a_{22}-a_{12}b_2$，$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$ 来表示 $a_{11}b_2-b_1a_{21}$，那么 $x_1=\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$，$x_2=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$.

二阶行列式的定义如下：

定义 1.1 将 2×2 个数排成两行两列，并在左、右两侧各加一竖线，表示算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1—3}$$

我们把(1—3)式的左端称为二阶行列式，记为 D；右端称为二阶行列式的展开式.展开式共有 $2!=2$ 项，每一项为取自不同行不同列的两个数之积.

$a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 称为二阶行列式的元素，这四个元素排成一个正方形，横排称为行，竖排称为列.二阶行列式共有两行两列，每个元素 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 的第一个下标 i 表示元素所在的

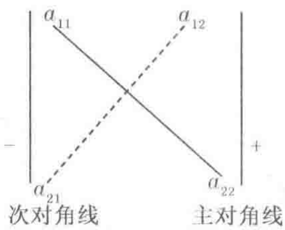

图 1—1

行,称为行标;第二个下标 j 表示元素所在的列,称为列标;如 a_{21} 表示该元素是行列式中第二行第一列的元素.

上述二阶行列式,可用对角线法则来记忆,如图 1—1 所示 .

从二阶行列式的左上角到右下角的对角线称为主对角线(实线);右上角到左下角的对角线称为副对角线(虚线).主对角线上的元素之积前取正号,副对角线上的元素之积前取负号.二阶行列式的值就是这两项的代数和.

如二元线性方程有(1—1)式中系数行列式可用 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示,(1—2)式中的分子也可用二阶行列式来表示:

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}$$

其中,$D_i(i=1,2)$表示把 D 中第 i 列元素换成(1—1)式右边相对应的常数列元素所得到的行列式.

于是,当 $D\neq 0$ 时,二元线性方程组(1—1)的解就可表示为:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D} \tag{1—4}$$

例 1 解二次线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_2=1 \\ 3x_1+x_2=0 \end{cases}$.

解 计算二阶行列式:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=1\times1-2\times3=-5$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\times1-2\times0=1$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=1\times0-1\times3=-3$$

因此,$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{1}{5}, x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-3}{-5}=\frac{3}{5}$.

二、三阶行列式

定义 1.2 将 3×3 个数排成三行三列,a_{ij} 表示第 i 行、第 j 列的数,称作元素($i,j=1,2,3$),并在左、右两侧各加一竖线,得到算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1—5}$$

(1—5)式的左端称为三阶行列式,记为 D;右端称为三阶行列式的展开式.展开式共有 $3!=6$ 项,每一项均取自不同行不同列的三个元素的乘积,并按一定的规则取正或负号.

三阶行列式也可用对角线法则记忆，如图 1—2 所示.

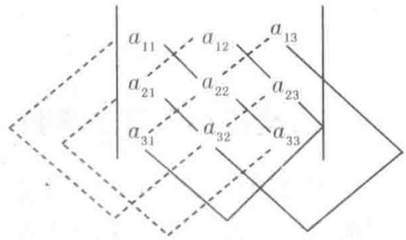

图 1—2

从左上角到右下角的对角线称为主对角线，从右上角到左下角的对角线称为副对角线.实线看作平行于主对角线的连线，虚线看作平行于副对角线的连线.实线上三个元素之积前取正号，虚线上三个元素之积前取负号，求其代数和就是这个三阶行列式的值.

设三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1—6}$$

利用加减消元法可求出三元线性方程组的解 x_1,x_2,x_3.

同样，类似于二阶行列式定义方式，式(1—5)中的 D 称为三元线性方程组(1—6)的系数行列式.根据三阶行列式的定义，有

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

其中，$D_i(i=1,2,3)$是把系数行列式 D 中的第 i 列元素换成三元线性方程组(1—6)右边相对应的常数列元素所得到的行列式.

当 $D\neq0$ 时，三元线性方程组(1—6)也可解出惟一的一组解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D}$$

例 2　计算行列式$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$的值.

解　利用对角线法则，

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix}=(2\times3\times4)+[1\times4\times(-2)]+[(-1)\times0\times5]$$
$$-[(-1)\times3\times(-2)]-(1\times0\times4)-(2\times4\times5)=-30$$

例 3　解方程组$\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=8 \\ x_1+x_2+x_3=6 \\ x_1+2x_2+x_3=8 \end{cases}$.

解　因为$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq0,D_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-2,$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix}=-4,D_3=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 8 \end{vmatrix}=-6$$

所以方程组的解为：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,x_2=\frac{D_2}{D}=2,x_3=\frac{D_3}{D}=3$$

三、全排列及其逆序数

用对角线法则计算行列式，虽然直观，但对于四阶及更高阶行列式，该方法就不适用了.为了求解四元及四元以上的线性方程组，需要把二阶、三阶行列式的要领进一步推广.下面先介绍全排列及其逆序数的概念及性质.

自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 按一定次序排成一排，称为一个 n 元排列，记为 $p_1p_2\cdots p_n$，排列 $1\ 2\ \cdots\ n$ 称为自然排列.这样，n 元排列总共有 $n!$ 个.例如，自然数 1，2，3 共有 $3!=6$ 个排列，它们是

$$123,231,312,132,213,321$$

我们将自然排列规定为标准次序.下面定义排列的逆序数：

定义 1.3 在一个 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，若一个大的数排在一个小的数的前面(即与标准次序不同时)，则称这两个数有一个逆序.在一个排列中，所有逆序的总数称为这个排列的逆序数，记为 $t(p_1p_2\cdots p_n)$.

例如，在四元排列 4132 中出现的所有逆序为 41，43，42，32，所以

$$t(4132)=4$$

在自然排列(标准次序)中没有逆序，其逆序数为 0.

下面给出逆序数的计算方法：

设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，如果比 p_i 大且排在 p_i 前面的数有 t_i 个，则称 p_i 这个元素的逆序数是 t_i，全体元素的逆序数的总和就是这个排列的逆序数，即

$$t(p_1p_2\cdots p_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i \tag{1-7}$$

例 4 求下列排列的逆序数：

(1)31524；

(2)$n(n-1)\cdots21$.

解 (1)在排列 31524 中：

3 排在首位，逆序数为 0；

1 的前面比 1 大的数有一个，它是 3，故逆序数为 1；

5 是最大数，逆序数为 0；

2 的前面比 2 大的数有两个，它们是 3，5，故逆序数为 2；

4 的前面比 4 大的数有一个，它是 5，故逆序数为 1.

因此，这个排列的逆序数为：

$$t(31524)=0+1+0+2+1=4$$

(2)同理可得：

$$t[n(n-1)\cdots21]=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

定义 1.4 逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列.

例如，自然数 1，2，3 构成的 6 个排列中，经计算可知偶排列为 123，231，312；奇排列为

321,132,213.

定义 1.5 将一个排列中的任意两个元素的位置互换,而其余的元素不动,就得到了一个新的排列,这样的变换称为一次对换;将相邻两个元素对换,称为相邻对换.

再看逆序数的性质.

定理 1.1 对排列进行一次对换则改变其奇偶性.

证明 首先证明相邻的对换情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l abb_1\cdots b_m$,对换 a 与 b 得到新的排列 $a_1\cdots a_l bab_1\cdots b_m$.显然,元素 $a_1,\cdots,a_l;b_1,\cdots,b_m$ 的逆序数没有改变,只有元素 a 和 b 的逆序数改变了.

当 $a<b$ 时,对换后,a 的逆序数增加 1,而 b 的逆序数不变;

当 $a>b$ 时,对换后,a 的逆序数不变,而 b 的逆序数减少 1.

因此,对换后新的排列与原排列的奇偶性不同.

其次证明一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_k bc_1\cdots c_s$,$a$ 和 b 之间相隔 k 个数,要实现 a 与 b 的对换,可先将 a 与 b_1 作相邻对换,再将 a 与 b_2 作相邻对换,照此继续下去,经 $k+1$ 次相邻对换,调成

$$a_1\cdots a_l b_1\cdots b_k bac_1\cdots c_s$$

然后,再把 b 依次与 $b_k,\cdots,b_1$ 作 k 次相邻对换,调成

$$a_1\cdots a_l bb_1\cdots b_k ac_1\cdots c_s.$$

这样,对换 a 和 b,可经过 $2k+1$ 次相邻对换而得到,所以这两个排列的奇偶性正好相反.

由定理 1.1 可得到下面的推论.

推论 1 奇排列调成自然排列的对换次数为奇数,偶排列调成自然排列的对换次数为偶数.

证明 因为自然排列 $12\cdots n$ 是偶排列(自然排列的逆序数为 0),由定理 1.1 知,一次对换改变了排列的奇偶性,当排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 是奇(偶)排列时,必须作奇(偶)次对换才能变成自然排列 $12\cdots n$,故所作的对换次数与排列具有相同的奇偶性.

推论 2 全体 n 元排列($n>1$)的集合中,奇排列与偶排列各一半.

四、n 阶行列式

定义 1.6 将 $n\times n$ 个数 a_{ij} 排成 n 行 n 列,a_{ij} 是位于第 i 行、第 j 列上的元素,并在左、右侧各加一竖线,得到算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1p_2\cdots p_n)} (-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1-8}$$

左端记为 D,右端为行列式 D 的展开式;其中($p_1p_2\cdots p_n$)为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列;t 为这个排列的逆序数;求和符号 $\sum\limits_{(p_1p_2\cdots p_n)}$ 是所有 n 元排列($p_1p_2\cdots p_n$)求和.n 阶行列式是一个数,它表示 $n!$ 项的代数和.

式(1-8)右边的每一项 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中的每一个元素取自 D 中不同的行和不同的列,行标排成自然排列,相应的列标是 $1,2,\cdots,n$ 的一个 n 元排列 $p_1p_2\cdots p_n$.若 $p_1p_2\cdots p_n$ 是偶排列,则该排列对应的项取正号;若是奇排列,则取负号.

当然，定义 1.6 也适用于二阶、三阶行列式.对于一阶行列式，$|a_{11}|=a_{11}$，注意这里的$|a_{11}|$并不表示 a_{11}的绝对值.

下面介绍几个特殊的行列式：

(1)上三角形行列式(主对角线以下的元素都为 0)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{1-9}$$

(2)下三角形行列式(主对角线以上的元素都为 0)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{1-10}$$

(3)对角形行列式(主对角线以外的元素都为 0)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{1-11}$$

(4)范德蒙德行列式(Vandermonde)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j) \tag{1-12}$$

其中，$n\geqslant 2$，$\prod$为连乘号，这里表示所有$(a_i-a_j)(1\leqslant j<i\leqslant n)$的乘积.

这里仅证明上三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证明 当 $j<i$ 时，$a_{ij}=0$，故 D 中可能不为 0 的元素是 a_{ip_i}，其下标应满足

$$p_i\geqslant i$$

即

$$p_1\geqslant 1,p_2\geqslant 2,\cdots,p_n\geqslant n$$

在所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，能满足上述关系的排列只有一个自然排列 $12\cdots n$，所以 D 中可能不为 0 的项只有一项$(-1)^{t(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.由于 $12\cdots n$ 是偶排列，此项的符号为正号，所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同样，对于下三角形行列式，有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别地，对于对角形行列式，有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

范德蒙德行列式展开式的结果在典型例题解析例 4 中可由行列式的性质推出.

第二节　行列式的性质

二阶和三阶行列式可直接利用对角线法则或定义计算，但当行列式的阶数较高时，根据行列式的定义，其计算量是非常大的.为此，下面将介绍行列式的性质，利用这些性质可简化行列式的计算.

设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，把 D 的行和列互换，得到新的行列式，称为 D 的转置行列式，记为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1　行列式的行和列互换，其值不变.

即行列式 D 与它的转置行列式相等，$D=D^{\mathrm{T}}$.

证明　记 D 的一般项为

$$(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

它的元素在 D 中位于不同的行、不同的列，因而在 D^{T} 中位于不同的列、不同的行.所以这 n 个元素的乘积在 D^{T} 中应为

$$a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$$

符号也是$(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}$. 因此，$D$ 与 D^{T} 是具有相同项的行列式.

性质 1 说明行列式的行和列具有同等地位，即对于行成立的性质，对于列也同样成立；反之亦然.

性质 2　互换行列式中任意两行(列)的位置，行列式的正负号改变.

证明 设$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (i\text{ 行}) \\ \\ (s\text{ 行}) \\ \\ \\ \end{matrix}$

交换 D 的第 i 行与第 s 行,得到行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (i\text{ 行}) \\ \\ (s\text{ 行}) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

记 D 的一般项中 n 个元素的乘积为

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

它的元素在 D 中位于不同的行、不同的列,因而在 D_1 中也位于不同的行、不同的列,所以也是 D_1 的一般项的 n 个元素的乘积.由于 D_1 是交换 D 的第 i 行与第 s 行,而各元素所在的列并没有改变,所以它在 D 中的符号为

$$(-1)^{t(1\cdots i\cdots s\cdots n)+t(p_1\cdots p_i\cdots p_s\cdots p_n)}$$

在 D_1 中的符号为

$$(-1)^{t(1\cdots s\cdots i\cdots n)+t(p_1\cdots p_i\cdots p_s\cdots p_n)}$$

由于排列 $1\cdots i\cdots s\cdots n$ 与排列 $1\cdots s\cdots i\cdots n$ 的奇偶性相反,所以 $D_1=-D$.

推论 1 如果行列式中有两行(列)的对应元素相同,则行列式等于 0.

证明 设行列式 D 中第 i 行和第 j 行的对应元素完全相同,把 D 的第 i 行和第 j 行对换,由性质 2,有

$$D=-D$$

即

$$D=0$$

性质 3 用一个数 k 乘以行列式的某一行(列)的各元素,等于该数乘以此行列式,即

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=kD$$

证明 因为行列式 D_1 的一般项为

$$(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots(ka_{ip_i})\cdots a_{np_n}=k\left[(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}\right]$$

上面等号右边方括号内是 D 的一般项,所以 $D_1=kD$.

推论 2 行列式的某一行(列)有公因子时,可以把公因子提到行列式的外面.

推论 3　若行列式的某一行(列)的元素全为 0,则该行列式等于 0.

推论 4　如果行列式中有两行(列)的对应元素成比例,则行列式等于 0.

证明　如果行列式中有两行(列)的对应元素成比例,那么提出比例系数后则有两行(列)的对应元素完全相同,故行列式等于 0.

性质 4　如果行列式的某行(列)中各元素均为两项之和,则这个行列式可以拆成除这一行(列)以外其余元素不变的两个行列式的和,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $D=D_1+D_2$.

证明　因为 D 的一般项是

$$\begin{aligned}&(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots(b_{ip_i}+c_{ip_i})\cdots a_{np_n}\\ &\quad=(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots a_{np_n}+(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots c_{ip_i}\cdots a_{np_n}\end{aligned}$$

上面等号右边第一项是 D_1 的一般项,第二项是 D_2 的一般项,所以 $D=D_1+D_2$.

性质 4 可推广到某行(列)各元素为多项之和的情形.

性质 5　把行列式中某一行(列)的各元素同乘以一个数 k,加到另一行(列)的对应元素上,行列式的值不变.

证明　设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ (i\text{ 行}) \\ \\ (s\text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array}$,以数 k 乘 D 的第 s 行各元素后加到第 i 行的对应元素上,得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{s1} & a_{i2}+ka_{s2} & \cdots & a_{in}+ka_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ (i\text{ 行}) \\ \\ (s\text{ 行}) \\ \\ \\ \end{array}$$

根据性质 4 和推论 4,可得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D+0=D$$

为简明起见,引进以下记号来表示行列式的三种变形:

(1)对换行列式的 i,j 两行(列),记作 $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$;

(2)把行列式的第 i 行(列)提出公因子 k,记作 $r_i\div k(c_i\div k)$;

(3)把行列式的第 j 行(列)的 k 倍加到第 i 行(列)上,记作 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$.

例 5 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ 的值.

解

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2\times1 & 2\times1 & 2\times(-2) \\ 3\times1 & 3\times2 & 3\times3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=2\times3\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=6\times(4-4-3-4-6-2)=6\times(-15)=-90$$

从例 5 可以看出,根据推论 2,把行列式中某一行(或列)的公因子提到行列式的外面,可起简化计算的作用.

例 6 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 4 & 8 & 10 \end{vmatrix}$ 的值.

解

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 4 & 8 & 10 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2\times2 & 2\times4 & 2\times5 \end{vmatrix}=2\times\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}=0$$

例 7 求证:$\begin{vmatrix} 1 & x^2 & a^2+x^2 \\ 1 & y^2 & a^2+y^2 \\ 1 & z^2 & a^2+z^2 \end{vmatrix}=0$.

证明

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 & a^2+x^2 \\ 1 & y^2 & a^2+y^2 \\ 1 & z^2 & a^2+z^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x^2 & a^2 \\ 1 & y^2 & a^2 \\ 1 & z^2 & a^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^2 \\ 1 & y^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & z^2 \end{vmatrix}=0$$