香樟书库系列

数学卷

教育部高等学校特色专业建设教材

常微分方程

◎ 金银来　邱建龙　郭　政　主编

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

常微分方程

金银来　邱建龙　郭　政　主编

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry

内 容 简 介

本书是作者在临沂师范学院理学院多年教学实践的基础上，参考国内外一些同类教材，经过加工和补充编写而成的. 考虑到近几十年科学技术的发展，作者尽量保持常微分方程知识结构的完整性并遵循易学易教的特点，在教学时数不增加及内容可选的前提下，适当补充实例和应用模型. 在本书的最后几章，简要介绍了常微分方程边值问题、差微分方程、偏微分方程与泛函微分方程.

通过对该课程的学习，使学习者掌握常微分方程的基本概念、基本理论和初等解法等，为后继课的学习打下基础；同时，了解常微分方程的近代理论研究中某些基本内容，以开阔视野. 另外，通过该课程的学习，使学习者对具有强烈实际背景的常微分方程模型有初步了解，这有助于推动常微分方程在社会生产实践中的应用.

本书可作为综合性大学和师范院校数学类本、专科学生常微分方程的教材.

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程/金银来，邱建龙，郭政主编. —北京:电子工业出版社,2011.1
教育部高等学校特色专业建设教材
ISBN 978-7-121-11796-1

Ⅰ. ①常… Ⅱ. ①金… ②邱… ③郭… Ⅲ. ①常微分方程-高等学校-教材 Ⅳ. ①O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 176295 号

策划编辑：张贵芹
责任编辑：张　京
印　　刷：北京丰源印刷厂
装　　订：三河市鹏成印业有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：11.5　字数：294 千字
印　　次：2011 年 1 月第 1 次印刷
印　　数：4 000 册　定价：23.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010)88258888

“香樟书库”总序

2006年8月，由我校教师主编的首批立项资助教材——“香樟书库”系列校本教材由山东大学出版社正式出版．在此基础上，根据教学计划和课程建设的实际需要，我们又很快启动了第二批立项教材的编撰工作．在学校教材建设指导委员会的组织、指导与协调下，教材编著者们夜以继日地辛勤劳作，如今已顺利完成了第二批教材的编撰工作，即将付梓面世．这批教材的编撰出版，既是我校校本教材建设工作步入规范化、系统化、科学化轨道的一种重要标志，也是我校认真贯彻落实教育部、山东省教育厅高等院校质量建设工程、促进学校内涵发展的一项重大举措．

我认为，对今日之高校而言，思路决定出路，就业决定专业，能量决定质量，质量决定力量．办学质量始终是一所学校的声誉之源、立校之本、发展之基，是高等院校的一条生命线．提高教学质量，理应是高校矢志不渝所追寻的永恒主题和永远高奏的主旋律，这就是我们常讲的“教学为本，质量立校”．而众所瞩目的高校办学质量又始终贯穿于实现“人才培养、知识创新和服务社会”三大职能的各个具体环节之中，其中既有人才培养的质量问题，也有科技成果和社会服务的质量问题，但人才培养质量是核心和旨归．孔子曰：“君子务本，本立而道生．”培养高质量人才是大学责无旁贷的神圣使命，而人才培养的主渠道又相对集中于课堂教学．课堂教学的基本要素是教师、学生和教材．

教材即教学材料的简称．细言之，它是指依据教学大纲和教学实际需要为教师、学生选编的教科书、讲义、讲授提纲、参考书目、网络课程、图片、教学影片、唱片、录音、录像及计算机软件等．古人云：“书山有路勤为径，学海无涯苦作舟．”在漫漫求学路途上，千辛苦、万劳累，呕心沥血、夜以继日，书总会一直忠诚地陪伴着学习者，承前启后、继往开来，输送知识、启迪智慧，成为学习者解疑释难的知心朋友和指点迷津的人生导师，而学生之“书”的主体是教材．教材是教学内容和教学方法的知识载体，是教师实施课堂教学的依据和工具，是学生最基本的学习参考材料，是师生互动、教学相长、顺利完成教学任务的必要基础．“教本教本，教学之本．”教材建设水平，是衡量一所高校教学质量与学术水平的重要标志之一．临沂师范学院历来重视教材建设工作，曾多次对教材建设工作进行专题研究．几年前，为了督导教师选用优质教材，提高教学质量，强化教学管理，优化教学环境，学校曾严格规定：全部本科教材均使用教育部、教育厅统编教材或获奖教材，禁止使用教师自编教材，从而保证了教材质量，为规范、完善本科教学工作奠定了良好的基础．

近年来，伴随着我国高等教育大众化的迅速推进和高校本科教学工作水平评估的深入进行，临沂师范学院实现了超常规、跨越式发展，其中之一是卓有成效地开展了“四大建设”，即“深化课程建设，优化专业建设，亮化学科建设，强化师资队伍建设”，使专业学科建设水平与教师教学水平不断提高，课程体系建设与课程开出能力不断增强，课堂教学改革与课外活动革新不断深入，相继涌现出一批质量上乘、优势明显、特色突出

的优质课程和爱岗敬业、授课解惑、教书育人的优秀教师，因而启动自编教材工作的条件日臻成熟. 古人云："临渊羡鱼，不如退而织网". 2006 年，学校正式启动了首批立项教材建设工作，紧紧围绕人才培养目标，密切联系教学改革及课程建设实际，配合学校课程体系构建、教学内容改革及系列选修课程建设，在确保质量的基础上，正式出版了第一批校本教材，并于当年投入使用，得到了师生的普遍认可和同行专家的高度评价. 在认真总结第一批立项教材建设经验的基础上，2007 年，学校又启动了第二批立项教材的编撰与出版工作.

我校的教材建设是有计划、有组织、有步骤地进行的，经过教材建设指导委员会专家们的精心论证和严格审核，确定了校本教材建设的重点和选题范围：一是解决教学急需的，填补学科、专业、课程空白的新教材；二是体现我校教师在某一学科、专业领域独具优势或特色的专业基础课和选修课教材；三是针对我校作为区域性院校特点，结合地方社会政治、经济、科技、文化需求所开设的地方课程教材.

常言道：意识决定形态，细节决定成败. 在教材编撰原则上，我们强调：一是注重知识性与思想性相辅相成；二是注重学术性与可读性融为一体；三是注重科学性与学科性彼此糅合；四是注重理论性与实践性相得益彰；五是注重统一性与多样性有机结合；六是注重现实性与前瞻性有效拓展. 记得我国著名教育家张楚廷教授曾提出了教材编写的"五最"准则，即最佳容量准则、最广泛效用准则、最持久效应准则、最适于发展准则、最宜于传授准则，我深表赞同.

在教材编写内容上，我们要求：既重视对国内外该领域经典的基本理论问题进行透彻的解析，又对当前教育现实中所面临的新现象、新理论、新方法给予必要的回应；既考虑到如何有利于教师的课堂讲授与辅导，又顾及到如何有助于学生的课后复习和思考；既能反映我校教学内容和课程体系改革的基本方向，又要展示我校教材建设及学术研究的最新成果，适应我校创建精品课程、优质课程和品牌课程的实际需要. 在教材教法改革上，我们倡导：秉持素质教育理念，坚持课堂讲授与课堂讨论相结合、教师讲授与学生自学相结合、理论学习与案例分析相结合、文本学习与网络学习相结合，"优化课内，强化课外"，重视教师启发式、研讨式、合作式等教学方式方法的科学运用，重视学生思维能力、创新能力、实践能力与创业能力的培养和训练，力图为学生知识、能力、素质的协调发展创设条件. 可喜的是，这些方面都在教材编写中得到了充分体现. 同时，所有教材均是在试用多年的成熟讲义的基础上经编著者精心修改和委员会严格审定后出版的，保证了教材的思想性、科学性、系统性、适用性、启发性和相对稳定性. 作者所撰章节，都是自己多年来多次授教与潜心研究的内容，在阐述上颇有真知灼见，能够引领和推动学生对有关基本理论和基本技能问题产生独特的理解和感悟，最终进入学与习、学与辑、学与思、学与行、学与创相结合的学人境界. 学校对所有立项出版教材均给予经费资助.

临沂师范学院"香樟书库"系列立项校本教材的编撰出版，饱含了编著者们的辛勤劳动和指导委员会成员的热情支持. "香樟"为常绿乔木，树冠广展，枝叶茂密，香气浓郁，长势雄伟，乃优质行道树及庭荫树. 我们之所以命名为"香樟书库"，乃在于香樟树根系发达，材质上乘，耐贫瘠，能抗风，适应性广，生命力强. 它茁壮、清新、芳香，

代表健康、温馨、希望，寓意我们的校本教材建设一定也会像2001年首批由南方移植于我校校园，如今已是根深叶茂、枝繁冠阔的香樟树一样，生机勃勃，充满希望和力量. 然而，由于此项工作尚处于尝试、探索阶段，疏漏、偏颇甚或错误之处在所难免，正所谓“始生之物，其形必丑”，敬请各位同仁和同学批评指正，以期再版时予以修订.

最后，摘录俄国著名文学家托尔斯泰的一句名言与同学们共勉：“选择你爱的，爱你选择的!”

临沂师范学院院长　韩延明

2008年6月26日

草于羲之故里

前　言

《常微分方程》是一门研究自然科学和社会科学中的事物、物体和现象运动、演化和变化规律的最基本的数学理论和方法的学科. 它的形成与发展是和物理、化学、生物、工程、航空航天、医学、经济和金融领域及其他科学技术的发展密切相关的，如运动定律、万有引力定律、机械能守恒定律、能量守恒定律、人口发展规律、生态种群竞争、疾病传染、遗传基因变异、股票的涨伏趋热、利率的浮动、市场均衡价格的变化等，对这些规律的描述、认识和分析就归结为对相应的常微分方程描述的数学模型的研究. 因此，常微分方程的理论和方法不仅广泛应用于自然科学，而且越来越多地应用于社会科学的各个领域.《常微分方程》在长期的发展过程中，一方面直接从与生产实践联系的其他科学技术中汲取活力；另一方面又不断以全部数学科学的成就来武装自已，所以它的问题和方法越来越丰富多彩.

《常微分方程》是数学与应用数学专业及信息与计算科学专业本科生的重要的专业基础课程之一，也是应用性很强的一门数学课. 从数学的角度看，常微分方程分为经典和现代两部分内容：经典部分以数学分析、高等代数为工具，以求微分方程的解为主要目的；现代部分主要是用泛函分析、拓扑学等知识来研究解的性质. 这里的常微分方程是指经典部分内容，是重要的专业基础课程. 常微分方程对先修课程（数学分析与高等代数等）及后继课程（微分方程数值解法、偏微分方程、微分几何、泛函分析等）起到承前启后的作用，是数学理论中不可缺少的一个环节，也是学生学习本学科近代知识的基础，对培养学生分析问题和解决问题的能力有重要作用.

本书是学校精品课程建设的阶段性成果之一. 我们在编写本教材时，尽量吸收国内外《常微分方程》课程建设方面的最新研究成果和课程改革的先进经验，体现创新教学理念. 编写过程中，根据多年的教学经验精选内容，注重思维开发和知识应用，内容深入浅出，让学生了解问题产生的背景. 立足于激发学生的学习兴趣，有利于综合素质和创新能力的提高. 因此，与同类教材相比，本教材体现了三大特点：第一，淡化知识体系的完备性和某些复杂形式，注重核心内容但简而不略；第二，加强了理论与实际的联系，注意该学科知识在其他学科，特别是在经济与工程技术方面的具体应用；第三，将数学建模思想融入教材中，特别是在每一章节中增加了与本章节知识密切相关的数学模型，而且在本书的第 5 章给出了微分方程知识综合应用的模型；通过对实际问题模型的学习，加强学生理论建模的思维训练，培养学生解决实际问题能力. 同时，为加强《常微分方程》与后继课程的联系，本书的最后 4 章简要介绍了常微分方程边值问题、差微分方程、偏微分方程与泛函微分方程的基本概念与简单解法. 鉴于《常微分方程》密切联系实际，思维方法独特，同时又是高校学生普遍感兴趣的课程. 本书在每节都配备适量习题以加强理论知识的学习，这些题目有的是现实问题中的数学模型，有的是对基本理论的有益补充，在帮助学生开阔视野、提高应用能力训练等方面很有裨益.

在学校大力支持下，本教材作为我们“香樟书库”系列立项校本教材出版，这对我们

来说是一个巨大的鼓舞，正是学校领导和理学院领导的鼓励和帮助，才使我们有信心、有精力完成此书的编写工作.

本书除可作为普通师范类院校数学系的教材外，还可作为高等学校理工科及经济类各专业和其他相关专业相应课程的教材和参考书，还可作为准备报考研究生的学生和技术人员的参考书.

本书由金银来教授负责统一组织，邱建龙副教授和郭政统稿修改，李静、李锋、张冬梅、郭霄怡、刘溥臣和徐涵及2009级应用教学专业的硕士研究生杨锁玲、朱曼和郭丽艳同学也参加了本书编写工作. 同时，本书在编写过程中部分地参考了业内知名专家、学者的著作，在此对各位专家、学者表示崇高的敬意和感谢.

限于编者水平，加之时间仓促，书中疏漏与错误之处在所难免，敬请读者批评指正.

编　者

目　　录

第 1 章　微分方程基本概念与基本定理

数学分析中所研究的函数，是反映客观世界运动过程中量与量之间的一种关系. 在大量的实际问题中遇到稍微复杂的一些运动时，反映运动规律的量与量之间的关系(即函数)往往不能直接写出来，但比较容易建立这些变量和它们的导数(或微分)间的关系式. 这种联系着自变量、未知函数及它的导数(或微分)的关系式，数学上称为微分方程，当然其中未知函数的导数或微分是不可缺少的. 本章将概要地介绍常微分方程的一些物理背景、基本概念和基本定理.

1.1　微分方程基本概念

1.1.1　物理中的数学模型

三百年前，牛顿(I. Newton)和莱布尼兹(G. W. Leibniz)发明了微积分，同时也就开始了微分方程的研究，因此微分方程有着悠久的历史.

例 1.1.1　*开普勒的行星绕日运动三定律.*

牛顿万有引力定律：两个天体之间具有吸引力，吸引力与两个天体的距离的平方成反比，与它们的质量成正比，即

$$F = -G\frac{Mm}{|r|^2}\cdot\frac{r}{|r|}, \tag{1.1.1}$$

这里 G 是万有引力常数，M 和 m 分别表示两个天体的质量，r 是 M 和 m 两点的距离向量，$|r|$ 就是它们之间的距离.

为推出开普勒三定律，不妨设太阳的质量为 M，行星的质量为 m，r 是位置向量，t 是时间. 由于太阳系中行星的总质量远远小于 M，所以忽略其他行星的作用，同时认为太阳是静止的. 这是一种近似，从而若把坐标系的原点取在太阳上，那么就建立一个惯性坐标系. 于是由已知行星运行速度的变化率为 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$，利用牛顿力学定律，动量随时间的变化率等于力，其数学表达形式就是微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right) = F, \tag{1.1.2}$$

将式(1.1.1)带入方程(1.1.2)得到：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right) = -G\frac{Mm}{|r|^2}\cdot\frac{r}{|r|}, \tag{1.1.3}$$

这便是行星绕太阳、月球绕地球、人造卫星绕地球等天体运动的微分方程. 将微分方程(1.1.3)解出，可以得到开普勒(J. Kepler)由实测数据总结出来的行星绕日运动三定律，即：

(1) 行星是在以太阳为焦点的一个椭圆轨道上运行的；

(2) 行星到太阳的向径扫过的面积，与时间成正比；

(3) 行星周期 T 的平方与行星椭圆轨道的半长轴的三次方成正比.

例 1.1.2 物理冷却过程的数学模型.

将某物体置于空气中，在时刻 $t=0$ 时，测量的它的温度为 $u_0=150℃$，10 分钟后测量的温度为 $u_1=100℃$. 我们要求决定此物体的温度 u 和时间 t 的关系，并计算 20 分钟后物体的温度. 这里我们假设空气的温度保持为 $u_a=24℃$.

解：为了解决上述问题，需要了解有关热力学的一些基本规律. 例如，热量总是从温度高的物体向温度低的物体传导的；在一定的温度范围内（其中包括了上述问题的温度在内），一个物体的温度变化速度与这一物体的温度和其所在介质温度的差值成比例. 这是已为实验证明了的牛顿冷却定理.

设物体在时刻 t 的温度为 $u=u(t)$，则温度的变化速度以 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ 来表示. 注意到热量总是从温度高的物体向温度低的物体传导的，因而 $u_0>u_a$，所以温差 $u-u_a$ 恒正；又因物体将随时间而逐渐冷却，故温度变化速度 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ 恒负. 因此由牛顿冷却定律得到：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-k(u-u_a), \tag{1.1.4}$$

其中，$k>0$ 是比例常数. 方程(1.1.4)就是物体冷却过程的数学模型，它含有未知数 u 及它的一阶导数 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$，这样的方程我们称为“一阶”微分方程.

为了决定物体的温度 u 和时间 t 的关系，我们要从方程(1.1.4)中“解出”u. 注意到 u_a 是常数，且 $u-u_a>0$，可将式(1.1.4)改写成

$$\frac{\mathrm{d}(u-u_a)}{u-u_a}=-k\mathrm{d}t,$$

这样，变量 u 和 t 被分离开来了. 两边积分，得到

$$\ln(u-u_a)=-kt+\bar{c},$$

这里 $\bar{c}$ 是任意常数，根据对数的定义，得到

$$u-u_a=\mathrm{e}^{-kt+\bar{c}},$$

由此，令 $\mathrm{e}^{\bar{c}}=c$ 即得

$$u=u_a+c\mathrm{e}^{-kt}, \tag{1.1.5}$$

根据“初始条件”：

$$当\ t=0\ 时, u=u_0,$$

容易确定任意常数 c 的数值. 为此目的，以 $t=0$ 和 $u=u_0$ 代入，得到：

$$c=u_0-u_a,$$

于是：

$$u=u_a+(u_0-u_a)\mathrm{e}^{-kt}, \tag{1.1.6}$$

如果 k 的数值确定了，方程(1.1.6)就完全解决了温度 u 与时间 t 的关系.

根据条件 $t=10$，$u=u_1$ 得到

$$u_1=u_a+(u_0-u_a)\mathrm{e}^{-10k},$$

由此，有

$$k=\frac{1}{10}\ln\frac{u_0-u_a}{u_1-u_a},$$

用给定的 $u_0=150$，$u_1=100$ 和 $u_a=24$ 代入，得到

$$k=\frac{1}{10}\ln\frac{126}{76}\approx 0.051,$$

从而

$$u=24+126e^{-0.051t},\tag{1.1.7}$$

这样，根据方程(1.1.7)，就可以计算出任意时刻 t 物体的温度 u 的数值了．例如，20 分钟后物体的温度就是 $u_2\approx 70℃$．方程还告诉我们，当 $t\to+\infty$ 时，$u\to 24℃$，这可以解释为：经过一段时间后，物体的温度和空气的温度将会没有任何差别了．事实上，经过 2 小时后，物体的温度将变为 24.3℃，与空气的温度已相当接近．而经过 3 小时后，物体的温度为 24.01℃，我们的一些测量仪器已测不出它与空气的温度差别．在实用上，人们认为这是物体的冷却过程已基本结束．所以，经过一段时间后(如 3 小时后)，可以认为物体的温度和空气温度并没有任何差别了．

我们从例 1.1.1、例 1.1.2 中可以大体看出用微分方程解决实际问题的基本步骤：

(1) 建立起实际问题的数学模型，也就是建立反映这个实际问题的微分方程并提出相应的定解条件；

(2) 求解这个微分方程，或者对方程解的性态进行分析；

(3) 用所得的数学结果解释实际问题，从而预测到某些物理过程的特定性质，以便达到能动地改造世界、解决实际问题的目的．

建立起实际问题的数学模型一般是比较困难的，因为这需要对与问题有关的自然规律有一个清晰的了解(例如，例 1.1.2 中就要了解热力学中的牛顿冷却定律)，同时又需要有一定的数学知识．为了建立实际问题的数学模型，读者一定要学习有关的自然科学和工程技术的专业知识．微分方程往往可以看做各种不同物理现象的数学模型．我们在建立微分方程时，只考虑影响这一物理现象的一些主要因素，应把其他一些次要因素忽略掉．如果的确考虑到了那些最主要的因素，那么，所得到微分方程的解和所考虑的物理现象就是比较接近的．这时，我们得到的数学模型是有用的．否则，我们还应该考虑其他的一些因素，以便建立起更为有效、更为合理的数学模型．

不同的物理现象可以具有相同的数学模式这一事实，正是现代许多应用数学工作者和工程人员应用模拟方法解决物理或工程问题的理论根据．例如，利用电路来模拟某些力学系统或机械系统等在现在已相当普遍．

以上只举出了常微分方程的一些物理背景，其实在自然科学和技术科学的其他领域中，如化学、生物学、自动控制、电子技术等，都提出了大量的微分方程问题．同样，在社会科学的一些领域里也存在着微分方程的问题．因而社会的生产实践是常微分方程理论取之不尽的基本源泉．此外，常微分方程与数学的其他分支的关系也是非常密切的，它们往往互相联系、互相促进．例如，几何学就是常微分方程理论的丰富的源泉之一和有力工具．考虑到常微分方程是一门与实际联系比较密切的数学课程，我们自然应该注意它的实际背景与应用；而作为一门数学基础课程，我们又应该把重点放在应用数学方法研究微分方程本身的问题上．因此，读者不应该忽视本课程中所举出的实际例子及有关的习题，并从中注意培养解决实际问题的初步能力．但是，按照课程的要求，我们要把主要的注意力集中到弄清常微分方程的一

些基本理论和掌握各种类型方程的求解方法这两方面来，这是本课程的重点，也是我们解决实际问题的必要工具.

1.1.2 基本概念

以前已经学过，含有未知量的等式称之为方程. 它表达了未知量所必须满足的某些条件. 方程是根据对未知量所进行的运算来分类的，如代数方程、超越方程等. 从以上两个例子得到的方程(1.1.3)、方程(1.1.4)可以看出，微分方程与代数方程和超越方程不同，它的未知量是函数，对其所施加的运算涉及求导或微分. 因此对微分方程有如下定义.

1. 常微分方程和偏微分方程

凡含有自变量、未知函数及未知函数的导数(或微分)的等式称为微分方程. 如果在微分方程中，自变量的个数只有一个，我们称这种微分方程为常微分方程；自变量的个数为两个或两个以上的微分方程称为偏微分方程.

如方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+cy=f(t); \tag{1.1.8}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=0, \tag{1.1.9}$$

就是常微分方程的例子，这里 y 是未知函数，t 是自变量.

如方程：

$$\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2T}{\partial z^2}=0; \tag{1.1.10}$$

$$\frac{\partial^2T}{\partial x^2}=4\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{1.1.11}$$

就是偏微分方程的例子，这里 T 是未知函数，x, y, z, t 都是自变量. 方程(1.1.10)含有三个自变量，而方程(1.1.11)含有两个自变量.

微分方程中出现的未知函数最高阶导数的阶数称为微分方程的阶数. 例如，方程(1.1.8)是二阶常微分方程，而方程(1.1.10)与方程(1.1.11)都是二阶偏微分方程，一般的 n 阶常微分方程具有形式：

$$F\left(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}\right)=0, \tag{1.1.12}$$

这里 $F\left(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}\right)$是 $x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$的已知函数，而且一定含有$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$；$y$ 是未知函数，x 是自变量.

我们学习的这门课程是常微分方程. 今后，我们把常微分方程简称为“微分方程”，有时简称为“方程”.

2. 线性和非线性

如果方程(1.1.12)的左端为 y 及$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$的一次有理整式，则称方程(1.1.12)为 n 阶线性微分方程. 例如，方程(1.1.8)是二阶线性微分方程. 一般 n 阶线性微分方程具有形式

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x), \tag{1.1.13}$$

这里 $a_1(x),\cdots,a_n(x)$，$f(x)$是 x 的已知函数.

不是线性方程的方程称为非线性方程，例如，方程：

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0, \tag{1.1.14}$$

是二阶非线性方程，而方程(1.1.9)是一阶非线性方程.

3. 解和隐式解

如果函数 $y=\varphi(x)$代入方程(1.1.12)后，能使它变为恒等式，则称函数 $y=\varphi(x)$为方程(1.1.12)的解. 例如例 1.1.2，函数 $u=u_a+(u_0-u_a)e^{-kt}$就是方程(1.1.4)的解. 如果关系式 $\phi(x,y)=0$ 决定的隐函数 $y=\varphi(x)$ 是方程(1.1.12)的解，我们称 $\phi(x,y)=0$ 为方程(1.1.12)的隐式解，例如一阶微分方程：

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}, \tag{1.1.15}$$

有解 $y=\sqrt{1-x^2}$和 $y=-\sqrt{1-x^2}$；而关系式：

$$x^2+y^2=1, \tag{1.1.16}$$

就是方程(1.1.15)的隐式解. 简单起见，以后不把解和隐式解加以区别，通称为方程的解.

4. 通解和特解

我们把含有 n 个独立的的任意常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的解

$$y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

称为 n 阶方程(1.1.12)的通解. 同样，可以定义 n 阶方程(1.1.12)的隐式通解. 为了简单起见，以后我们也不把通解和隐式通解加以区别，统称为方程的通解. 为了确定微分方程一个特定的解，我们通常给出这个解所必须满足的条件，这就是所谓定解条件. 常见的定解条件是初始条件. 所谓 n 阶微分方程(1.1.12)的初始条件是指如下 n 个条件. 当 $x=x_0$ 时，

$$y=y_0,\frac{dy}{dx}=y_0^{(1)},\cdots,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=y_0^{(n-1)}, \tag{1.1.17}$$

这里 $x_0,y_0,y_0^{(1)},\cdots,y_0^{(n-1)}$ 是给定的 $n+1$ 个常数，初始条件式(1.1.17)有时写为：

$$y(x_0)=y_0,\frac{dy(x_0)}{dx}=y_0^{(1)},\cdots,\frac{d^{n-1}y(x_0)}{dx^{n-1}}=y_0^{(n-1)}. \tag{1.1.18}$$

求微分方程满足定解条件的解，就是所谓定解问题. 当定解条件为初始条件时，相应的定解问题就称为初值问题. 本书主要讨论初值问题.

把满足初始条件的解称为微分方程的特解. 初始条件不同，对应的特解也不同. 一般来说，特解可以通过初始条件的限制，从通解中确定任意常数而得到. 例如，在例 1.1.2 中，含有一个任意常数 c 的解：

$$u=u_a+ce^{-kt},$$

就是一阶方程(1.1.4)的通解，而：

$$u=u_a+(u_0-u_a)e^{-kt},$$

就是满足初始条件：

$$\text{当 } t=0 \text{ 时}, \ u=u_0,$$

的特解．特解(1.1.6)可以在通解(1.1.5)中令 $c=u_0-u_a$ 而得到．

容易验证，二阶微分方程：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+4y=0, \tag{1.1.19}$$

的通解为：

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{-4x}, \tag{1.1.20}$$

这里 c_1，c_2 是任意常数，满足初始条件

$$y(0)=2, \frac{dy(0)}{dx}=1,$$

的特解为：

$$y=3e^{-x}-e^{-4x},$$

可以在通解(1.1.20)中令 $c_1=3$，$c_2=-1$ 而得到．

5. 积分曲线

一阶微分方程：

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y), \tag{1.1.21}$$

的解 $y=\varphi(x)$ 代表 xy 平面上的一条曲线，称它为微分方程的积分曲线．而微分方程(1.1.21)的通解 $y=\varphi(x,c)$ 对应于 xy 平面上的一族曲线，我们称这族曲线为积分曲线族．满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的特解就是通过点 (x_0,y_0) 的一条积分曲线．此外，方程(1.1.21)的积分曲线的每一点 (x,y) 上的切线斜率 $\frac{dy}{dx}$ 刚好等于函数 $f(x,y)$ 在这点的值，也就是说，积分曲线的每一点 (x,y) 及这点上的切线斜率 $\frac{dy}{dx}$ 恒满足方程(1.1.21)；反之，如果在一条曲线每点上其切线斜率刚好等于函数 $f(x,y)$ 在这点的值，则这一条曲线就是方程(1.1.21)的积分曲线．

习题

1. 指出下面微分方程的阶数，并回答方程是否线性的：

(1) $\frac{dy}{dx}=4x^2-y$；

(2) $\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+12xy=0$；

(3) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x\frac{dy}{dx}-3y^2=0$；

(4) $x\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+3xy=\sin x$；

(5) $\frac{dy}{dx}+\cos y+2x=0$；

(6) $\sin\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+e^y=x$.