



全国高等院校机械类“十三五”规划系列教材



有限元程序设计 及在航空发动机结构中的应用

高希光 孙志刚 宋迎东 主编



华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>

全国高等院校机械类“十三五”规划系列教材

有限元法程序设计 及在航空发动机结构中的应用

主 编 高希光 孙志刚 宋迎东

华中科技大学出版社
中国·武汉

内 容 提 要

本书共六章:第1章通过桁架结构系统介绍了有限元法的基本概念和计算流程;第2章介绍了三角形单元;第3章介绍了平面等参元的构造和使用方法;第4章介绍了材料非线性有限元计算的基本理论和使用商用有限元软件进行二次开发的方法;第5章介绍了动力学问题有限元法求解的基本思路,以杆的振动为例介绍了程序设计的方法和技巧;第6章介绍了结构优化问题的基本概念和方法,以及如何使用现有商用有限元软件实现结构优化的方法。本书可作为本科生学习有限元法的教材,也可以作为研究生学习有限元程序设计的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

有限元法程序设计及在航空发动机结构中的应用/高希光,孙志刚,宋迎东主编. —武汉:华中科技大学出版社,2015.10

全国高等院校机械类“十三五”规划系列教材

ISBN 978-7-5680-1344-4

I. ①有… II. ①高… ②孙… ③宋… III. ①有限元法-程序设计-应用-航空发动机-结构设计-高等学校-教材 IV. ①O241.82 ②V23

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 263331 号

有限元法程序设计及在航空发动机结构中的应用

Youxianyuanfa Chengxu Sheji

高希光 孙志刚 宋迎东 主编

Ji Zai Hangkong Fadongji Jiegou Zhong de Yingyong

策划编辑:严育才

责任编辑:刘 飞

责任校对:祝 菲

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)81321913

录 排:武汉楚海文化传播有限公司

印 刷:武汉科源印刷设计有限公司

开 本:710mm×1000mm 1/16

印 张:10.25

字 数:216千字

版 次:2016年1月第1版第1次印刷

定 价:28.00元

封面设计:范翠璇

责任监印:张正林



华中科技大学

本书若有印装质量问题,请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线:400-6679-118 竭诚为您服务
版权所有 侵权必究

前 言

有限元法作为最为常用的数值计算方法之一,在工程结构设计中得到了广泛的应用。随着计算机技术和软件技术的发展,有限元法显示出了越来越强大的生命力。经过几十年的发展,有限元法的理论日趋成熟,也涌现出了许多优秀的教材,但是涉及程序实现的教材数量较少。作为一种数值计算方法,有限元法只有与计算机程序实现结合才更加有工程价值。因此,理解并熟练掌握相关的程序设计是极为重要的。基于这个出发点,本教材在有限元基本理论的基础上,将计算机程序设计与有限元理论结合,系统阐述桁架结构、平面问题、材料非线性问题、动力学问题的有限元计算流程和编程技巧。最后,以一个实际结构优化的算例,详细描述了结构优化设计的有限元实现方法。

由于水平有限,本书肯定存在不足和不妥之处,热忱地希望读者和同行专家批评指正。

编 者

2015 年 10 月

目 录

第 1 章 绪论	(1)
1.1 引言	(1)
1.2 以杆单元为例介绍有限元法的计算流程	(2)
1.3 杆单元有限元法的 C 语言实现	(8)
1.3.1 数据准备	(8)
1.3.2 数据读取和输出验证	(9)
1.3.3 计算单元刚度矩阵并合成总体刚度矩阵	(14)
1.3.4 考虑位移约束的总体刚度矩阵	(18)
1.3.5 求解及计算结果	(24)
1.4 弹性力学基本方程	(29)
1.4.1 应力状态	(29)
1.4.2 应变状态和几何方程	(31)
1.4.3 平衡方程	(35)
1.4.4 弹性物理方程	(35)
1.4.5 边界条件	(36)
1.5 小结与习题	(36)
第 2 章 平面三节点三角形单元	(37)
2.1 位移函数	(37)
2.2 形函数	(40)
2.3 单元刚度矩阵	(42)
2.4 等效节点载荷	(44)
2.5 导出有限元方程	(47)
2.6 总体刚度矩阵和载荷向量的合成	(48)
2.7 应力计算	(49)
2.8 平面三节点三角形单元的 C 语言实现	(50)
2.9 小结与习题	(67)
第 3 章 平面等参元	(69)
3.1 位移函数	(69)

3.2	形函数	(70)
3.3	单元刚度矩阵	(71)
3.4	等效节点载荷	(74)
3.5	高斯积分	(77)
3.6	导出有限元方程	(79)
3.7	总体刚度矩阵和载荷向量的合成	(80)
3.8	应力计算	(81)
3.9	平面四节点等参元的 C 语言实现	(82)
3.10	小结与习题	(92)
第 4 章	材料损伤非线性有限元	(95)
4.1	材料的非线性力行为和增量法	(95)
4.2	增量基本方程	(98)
4.3	增量虚位移原理	(100)
4.4	程序实现	(102)
4.4.1	usermat 子程序	(103)
4.4.2	usermat 编译连接	(104)
4.4.3	usermat 应用实例	(106)
4.5	小结与习题	(110)
第 5 章	动力学问题的有限元法	(111)
5.1	基本方程	(111)
5.2	有限元方程的解法	(113)
5.3	弹性杆振动的程序实现	(114)
5.4	弹性杆振动的 C 程序	(118)
5.5	习题	(121)
第 6 章	结构优化设计的有限元实现	(123)
6.1	结构优化设计的基本概念	(123)
6.2	遗传算法	(126)
6.2.1	构成要素	(126)
6.2.2	算法流程	(127)
6.2.3	约束的处理	(129)
6.3	形状优化的程序实现	(130)
6.3.1	计算流程	(130)

6.3.2 C 语言代码	(136)
6.3.3 输入文件:huizhuanpan.txt	(146)
6.3.4 输入文件:ImageOutput.txt	(150)
6.4 习题	(153)
致谢	(155)
参考文献	(156)

第 1 章 绪 论

1.1 引言

结构或者材料在受到外载荷作用时,会发生变形,材料内部也会产生应力。当应力达到一定数值后,结构或者材料将产生破坏或者损伤。判断结构是否发生破坏的理论称为强度理论,常用的破坏理论有:最大拉应力理论(第一强度理论),最大伸长线应变理论(第二强度理论),最大切应力理论(第三强度理论)和形状改变比能理论(第四强度理论)。

从强度理论的表达式可以看出,判断结构是否破坏,主要基于结构的应力或者应变的大小和应力分布情况。因此,应变和应力的分布情况是进行结构强度分析时的重要参数。

力学类的许多课程均讲述如何获得结构的位移、应变和应力的分布情况。例如:理论力学主要讨论刚体的力平衡以及刚体之间的相互运动;材料力学主要研究杆和梁等简单结构的变形问题(见图 1.1);弹性力学则重点研究弹性体在外载荷作用下的变形以及应力应变场的求解。然而,弹性力学也仅能给出几何结构和外载荷极为简单的一小类问题的应力应变场的解析解。为了解决复杂结构在外载荷作用下的变形和应力应变场问题,人们在工程实践中提出了采用有限元法进行数值求解的方法。

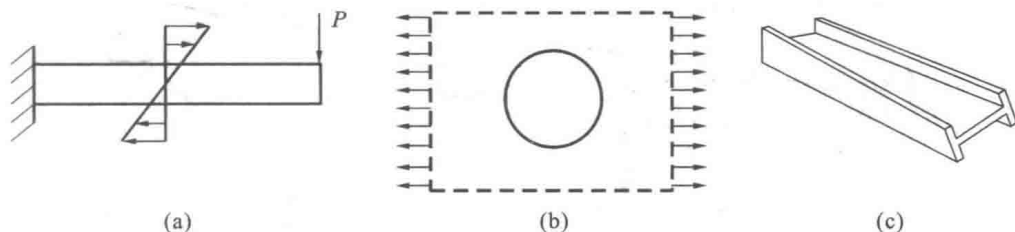


图 1.1 结构变形

(a) 悬臂梁的弯曲问题;(b) 无限大带孔板的拉伸问题;(c) 真实梁的扭转问题

对于复杂的结构,我们可以将其分割为一系列小的简单形状区域(见图 1.2)。通过简单形状区域之间的变形协调建立方程组,求解方程组即可获得每个简单区域内的应力分布。有限元法数值求解就是基于上述基本思想建立起来的。

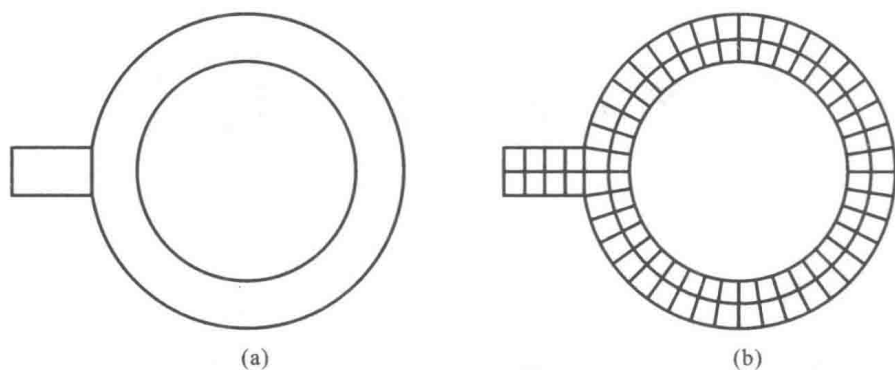


图 1.2 复杂结构离散成简单结构

(a) 复杂结构; (b) 复杂结构离散成简单几何形状结构的集合

1.2 以杆单元为例介绍有限元法的计算流程

本节以简单的桁架结构为例来展示一下有限元的基本思想和计算过程。

图 1.3 所示为一桁架结构,左端两节点约束 x 和 y 方向位移,右端受到沿 y 轴负方向的力,大小为 P 。杆为圆形截面,截面积为 A ,弹性模量为 E ,刚度为 k 。我们通过如下步骤进行桁架结构的变形计算:

- (1) 假设杆的位移模式;
- (2) 列出每根杆的刚度方程;
- (3) 根据节点的力平衡建立总体平衡方程;
- (4) 求解线性方程组,获得节点位移;
- (5) 根据节点位移计算出每根杆的应力。

第一步,假设杆的位移函数。

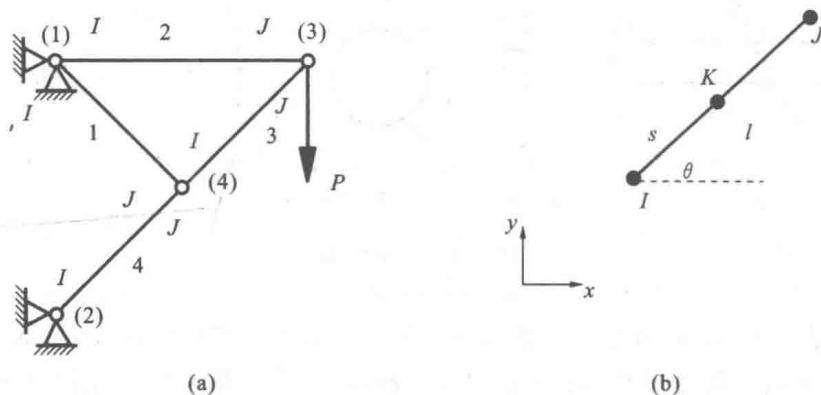


图 1.3 桁架结构和杆的位移函数

(a) 桁架结构; (b) 杆的位移函数

如图 1.3(b)所示,假设杆的长度为 l ,两个端点分别用 I 和 J 来表示。杆上任意一点 P 的位置用该点到 I 点的距离 s 来表示。如果用 u 和 v 分别表示点 P 沿 x 方向和 y 方向的位移。那么

$$\left. \begin{aligned} u &= u_I \left(1 - \frac{s}{l}\right) + u_J \frac{s}{l} \\ v &= v_I \left(1 - \frac{s}{l}\right) + v_J \frac{s}{l} \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

式中: u_I 、 u_J 分别是节点 I 和 J 的 x 方向位移;

v_I 、 v_J 分别是节点 I 和 J 的 y 方向位移。

第二步,列出每根杆的刚度方程。

由于杆只能发生沿杆轴向的变形,所以杆上任意一点沿轴向的位移为

$$u_a = u \cos \theta + v \sin \theta \quad (1.2)$$

轴向的应变为

$$\epsilon_a = \frac{\partial u_a}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial s} \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial s} \sin \theta \quad (1.3)$$

将式(1.1)代入式(1.3)后得

$$\epsilon_a = \frac{\partial u_a}{\partial s} = \frac{(u_J - u_I)}{l} \cos \theta + \frac{(v_J - v_I)}{l} \sin \theta \quad (1.4)$$

杆的内应力等于

$$\sigma_a = E \cdot \epsilon_a = E \frac{(u_J - u_I)}{l} \cos \theta + E \frac{(v_J - v_I)}{l} \sin \theta$$

节点 J 处受到的外力沿坐标轴正方向,符号为正;节点 I 处受到的外力沿坐标轴负方向,符号为负,即

$$F_{Ix} = -EA \frac{(u_J - u_I)}{l} \cos \theta \cos \theta - EA \frac{(v_J - v_I)}{l} \sin \theta \cos \theta \quad (1.5a)$$

$$F_{Iy} = -EA \frac{(u_J - u_I)}{l} \cos \theta \sin \theta - EA \frac{(v_J - v_I)}{l} \sin \theta \sin \theta \quad (1.5b)$$

$$F_{Jx} = EA \frac{(u_J - u_I)}{l} \cos \theta \cos \theta + EA \frac{(v_J - v_I)}{l} \sin \theta \cos \theta \quad (1.5c)$$

$$F_{Jy} = EA \frac{(u_J - u_I)}{l} \cos \theta \sin \theta + EA \frac{(v_J - v_I)}{l} \sin \theta \sin \theta \quad (1.5d)$$

可以看出,方程(1.5)建立了节点位移和节点所受外力之间的关系。可以将方程(1.5)改写为矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} F_{Ix} \\ F_{Iy} \\ F_{Jx} \\ F_{Jy} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_I \\ v_I \\ u_J \\ v_J \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

方程(1.6)也可以写成如下形式

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{K}^e \cdot \mathbf{u}^e \quad (1.7)$$

其中上标 e 表示“单元”的意思,每个向量的含义如下

$$\mathbf{F}^e = \begin{bmatrix} F_{Ix} \\ F_{Iy} \\ F_{Jx} \\ F_{Jy} \end{bmatrix}, \mathbf{K}^e = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \mathbf{u}^e = \begin{bmatrix} u_I \\ v_I \\ u_J \\ v_J \end{bmatrix}$$

方程(1.7)就称为杆单元的单元刚度方程, $\mathbf{K}^e$ 是单元刚度矩阵, $\mathbf{u}^e$ 是单元节点位移向量, $\mathbf{F}^e$ 是单元载荷向量。

需要注意的是, $\mathbf{K}^e$ 是不可逆矩阵。因为,如果 $\mathbf{K}^e$ 可逆,根据方程(1.7),就可以用 $\mathbf{F}^e$ 表示 $\mathbf{u}^e$,这意味着已知任意一组节点力就可以确定一组节点位移。但我们知道,由于存在刚体位移,即使这组力满足平衡条件,节点的位移也不能完全确定。因此 $\mathbf{K}^e$ 是不可逆的。

为了方便表示和编写程序, $\mathbf{K}^e$ 矩阵还可以表示为如下形式:

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & k_{13}^e & k_{14}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e & k_{23}^e & k_{24}^e \\ k_{31}^e & k_{32}^e & k_{33}^e & k_{34}^e \\ k_{41}^e & k_{42}^e & k_{43}^e & k_{44}^e \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

第三步,根据节点的力平衡建立总体平衡方程。

首先要介绍一下节点的两套编号。第一套编号是全局编号,即是图 1.3(a)所示的(1)(2)(3)(4),每个数字确定唯一一个点。另一套编号是局部编号,需要用单元编号和局部编号共同来确定一个节点。表 1.1 列出了每个杆单元局部节点 I、J 对应的全局编号。

表 1.1 每个杆单元局部节点 I、J 对应的全局编号

杆号	I	J
1	(1)	(4)
2	(1)	(3)
3	(4)	(3)
4	(2)	(4)

下面针对每个节点建立力平衡方程。

①节点(1)的平衡。

用 $\mathbf{F}_{(1)} = [F_{(1)x} \ F_{(1)y}]^T$ 表示节点(1)的外力。因为节点(1)在 x 方向上受到约束反力 $R_{(1)x}$ 作用,而在 y 方向上不受外力作用,因此 $\mathbf{F}_{(1)} = [R_{(1)x} \ 0]^T$ 。又因

为节点(1)还受到1号单元和2号单元的作用,因此 $\mathbf{F}_{(1)}$ 应该等于1号单元对节点(1)产生的外力 $\mathbf{F}_{(1)}^1$ 和2号单元对节点(1)产生的外力 $\mathbf{F}_{(1)}^2$ 之和。

$$\mathbf{F}_{(1)} = [\mathbf{R}_{(1)x} \quad \mathbf{R}_{(1)y}]^T = \mathbf{F}_{(1)}^1 + \mathbf{F}_{(1)}^2 = \mathbf{F}_I^1 + \mathbf{F}_I^2 \quad (1.9)$$

将方程(1.6)代入式(1.9)后得

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{(1)x} &= \mathbf{F}_{Lx}^1 + \mathbf{F}_{Lx}^2 \\ &= k_{11}^1 u_I^1 + k_{12}^1 v_I^1 + k_{13}^1 u_J^1 + k_{14}^1 v_J^1 + k_{11}^2 u_I^2 + k_{12}^2 v_I^2 + k_{13}^2 u_J^2 + k_{14}^2 v_J^2 \end{aligned} \quad (1.10a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{(1)y} &= \mathbf{F}_{Ly}^1 + \mathbf{F}_{Ly}^2 \\ &= k_{21}^1 u_I^1 + k_{22}^1 v_I^1 + k_{23}^1 u_J^1 + k_{24}^1 v_J^1 + k_{21}^2 u_I^2 + k_{22}^2 v_I^2 + k_{23}^2 u_J^2 + k_{24}^2 v_J^2 \end{aligned} \quad (1.10b)$$

将方程(1.10)中的位移按总体节点编号修改后得

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{(1)x} &= \mathbf{F}_{Lx}^1 + \mathbf{F}_{Lx}^2 \\ &= k_{11}^1 u_{(1)} + k_{12}^1 v_{(1)} + k_{13}^1 u_{(4)} + k_{14}^1 v_{(4)} + k_{11}^2 u_{(1)} + k_{12}^2 v_{(1)} + k_{13}^2 u_{(3)} + k_{14}^2 v_{(3)} \end{aligned} \quad (1.11a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{(1)y} &= \mathbf{F}_{Ly}^1 + \mathbf{F}_{Ly}^2 \\ &= k_{21}^1 u_{(1)} + k_{22}^1 v_{(1)} + k_{23}^1 u_{(4)} + k_{24}^1 v_{(4)} + k_{21}^2 u_{(1)} + k_{22}^2 v_{(1)} + k_{23}^2 u_{(3)} + k_{24}^2 v_{(3)} \end{aligned} \quad (1.11b)$$

合并同类项后得

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{(1)x} &= \mathbf{F}_{Lx}^1 + \mathbf{F}_{Lx}^2 \\ &= (k_{11}^1 + k_{11}^2) u_{(1)} + (k_{12}^1 + k_{12}^2) v_{(1)} + k_{13}^2 u_{(3)} + k_{14}^2 v_{(3)} + k_{13}^1 u_{(4)} + k_{14}^1 v_{(4)} \end{aligned} \quad (1.12a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{(1)y} &= \mathbf{F}_{Ly}^1 + \mathbf{F}_{Ly}^2 \\ &= (k_{21}^1 + k_{21}^2) u_{(1)} + (k_{22}^1 + k_{22}^2) v_{(1)} + k_{23}^2 u_{(3)} + k_{24}^2 v_{(3)} + k_{23}^1 u_{(4)} + k_{24}^1 v_{(4)} \end{aligned} \quad (1.12b)$$

②节点(2)的平衡。

$$\mathbf{F}_{(2)} = [\mathbf{R}_{(2)x} \quad \mathbf{R}_{(2)y}]^T = \mathbf{F}_{(2)}^4 = \mathbf{F}_I^4 \quad (1.13)$$

将方程(1.6)代入式(1.13)后得

$$\mathbf{R}_{(2)x} = \mathbf{F}_{Lx}^4 = k_{11}^4 u_I^4 + k_{12}^4 v_I^4 + k_{13}^4 u_J^4 + k_{14}^4 v_J^4 \quad (1.14a)$$

$$\mathbf{R}_{(2)y} = \mathbf{F}_{Ly}^4 = k_{21}^4 u_I^4 + k_{22}^4 v_I^4 + k_{23}^4 u_J^4 + k_{24}^4 v_J^4 \quad (1.14b)$$

将方程(1.14)中的位移按总体节点编号修改后得

$$\mathbf{R}_{(2)x} = \mathbf{F}_{Lx}^4 = k_{11}^4 u_{(2)} + k_{12}^4 v_{(2)} + k_{13}^4 u_{(4)} + k_{14}^4 v_{(4)} \quad (1.15a)$$

$$\mathbf{R}_{(2)y} = \mathbf{F}_{Ly}^4 = k_{21}^4 u_{(2)} + k_{22}^4 v_{(2)} + k_{23}^4 u_{(4)} + k_{24}^4 v_{(4)} \quad (1.15b)$$

③节点(3)的平衡。

$$\mathbf{F}_{(3)} = [0 \quad -P]^T = \mathbf{F}_{(3)}^2 + \mathbf{F}_{(3)}^3 = \mathbf{F}_J^2 + \mathbf{F}_J^3 \quad (1.16)$$

将方程(1.6)代入式(1.16)后得

$$0 = \mathbf{F}_{Jx}^2 + \mathbf{F}_{Jx}^3$$

$$=k_{31}^2 u_I^2 + k_{32}^2 v_I^2 + k_{33}^2 u_J^2 + k_{34}^2 v_J^2 + k_{31}^3 u_I^3 + k_{32}^3 v_I^3 + k_{33}^3 u_J^3 + k_{34}^3 v_J^3 \quad (1.17a)$$

$$-P = F_{Jy}^2 + F_{Jy}^3$$

$$=k_{41}^2 u_I^2 + k_{42}^2 v_I^2 + k_{43}^2 u_J^2 + k_{44}^2 v_J^2 + k_{41}^3 u_I^3 + k_{42}^3 v_I^3 + k_{43}^3 u_J^3 + k_{44}^3 v_J^3 \quad (1.17b)$$

将方程(1.17)中的位移按总体节点编号修改后得

$$0 = F_{Jx}^2 + F_{Jx}^3$$

$$=k_{31}^2 u_{(1)} + k_{32}^2 v_{(1)} + k_{33}^2 u_{(3)} + k_{34}^2 v_{(3)} + k_{31}^3 u_{(4)} + k_{32}^3 v_{(4)} + k_{33}^3 u_{(3)} + k_{34}^3 v_{(3)} \quad (1.18a)$$

$$-P = F_{Jy}^2 + F_{Jy}^3$$

$$=k_{41}^2 u_{(1)} + k_{42}^2 v_{(1)} + k_{43}^2 u_{(3)} + k_{44}^2 v_{(3)} + k_{41}^3 u_{(4)} + k_{42}^3 v_{(4)} + k_{43}^3 u_{(3)} + k_{44}^3 v_{(3)} \quad (1.18b)$$

合并同类项后得

$$0 = F_{Jx}^2 + F_{Jx}^3$$

$$=k_{31}^2 u_{(1)} + k_{32}^2 v_{(1)} + (k_{33}^2 + k_{33}^3) u_{(3)} + (k_{34}^2 + k_{34}^3) v_{(3)} + k_{31}^3 u_{(4)} + k_{32}^3 v_{(4)} \quad (1.19a)$$

$$-P = F_{Jy}^2 + F_{Jy}^3$$

$$=k_{41}^2 u_{(1)} + k_{42}^2 v_{(1)} + (k_{43}^2 + k_{43}^3) u_{(3)} + (k_{44}^2 + k_{44}^3) v_{(3)} + k_{41}^3 u_{(4)} + k_{42}^3 v_{(4)} \quad (1.19b)$$

④节点(4)的平衡。

$$\mathbf{F}_{(4)} = [0 \quad 0]^T = \mathbf{F}_{(4)}^1 + \mathbf{F}_{(4)}^2 + \mathbf{F}_{(4)}^3 = \mathbf{F}_J^1 + \mathbf{F}_I^3 + \mathbf{F}_J^4 \quad (1.20)$$

将方程(1.6)代入式(1.20)后得

$$0 = F_{Jx}^1 + F_{Jx}^3 + F_{Jx}^4$$

$$=k_{31}^1 u_I^1 + k_{32}^1 v_I^1 + k_{33}^1 u_J^1 + k_{34}^1 v_J^1 + k_{31}^3 u_I^3 + k_{32}^3 v_I^3 + k_{33}^3 u_J^3 + k_{34}^3 v_J^3 + k_{31}^4 u_I^4 + k_{32}^4 v_I^4 + k_{33}^4 u_J^4 + k_{34}^4 v_J^4 \quad (1.21a)$$

$$0 = F_{Jy}^1 + F_{Jy}^3 + F_{Jy}^4$$

$$=k_{41}^1 u_I^1 + k_{42}^1 v_I^1 + k_{43}^1 u_J^1 + k_{44}^1 v_J^1 + k_{41}^3 u_I^3 + k_{42}^3 v_I^3 + k_{43}^3 u_J^3 + k_{44}^3 v_J^3 + k_{41}^4 u_I^4 + k_{42}^4 v_I^4 + k_{43}^4 u_J^4 + k_{44}^4 v_J^4 \quad (1.21b)$$

将方程(1.21)中的位移按总体节点编号修改后得

$$0 = F_{Jx}^1 + F_{Jx}^3 + F_{Jx}^4$$

$$=k_{31}^1 u_{(1)} + k_{32}^1 v_{(1)} + k_{33}^1 u_{(4)} + k_{34}^1 v_{(4)} + k_{31}^3 u_{(4)} + k_{32}^3 v_{(4)} + k_{33}^3 u_{(3)} + k_{34}^3 v_{(3)} + k_{31}^4 u_{(2)} + k_{32}^4 v_{(2)} + k_{33}^4 u_{(4)} + k_{34}^4 v_{(4)} \quad (1.22a)$$

$$0 = F_{Jy}^1 + F_{Jy}^3 + F_{Jy}^4$$

$$=k_{41}^1 u_{(1)} + k_{42}^1 v_{(1)} + k_{43}^1 u_{(4)} + k_{44}^1 v_{(4)} + k_{41}^3 u_{(4)} + k_{42}^3 v_{(4)} + k_{43}^3 u_{(3)} + k_{44}^3 v_{(3)} + k_{41}^4 u_{(2)} + k_{42}^4 v_{(2)} + k_{43}^4 u_{(4)} + k_{44}^4 v_{(4)} \quad (1.22b)$$

合并同类项后得

$$\begin{aligned}
 0 &= F_{Jx}^1 + F_{Jx}^3 + F_{Jx}^4 \\
 &= k_{31}^1 u_{(1)} + k_{32}^1 v_{(1)} + k_{31}^4 u_{(2)} + k_{32}^4 v_{(2)} + k_{13}^3 u_{(3)} + k_{14}^3 v_{(3)} \\
 &\quad + (k_{33}^1 + k_{11}^3 + k_{33}^4) u_{(4)} + (k_{34}^1 + k_{12}^3 + k_{34}^4) v_{(4)}
 \end{aligned} \quad (1.23a)$$

$$\begin{aligned}
 0 &= F_{Jy}^1 + F_{Jy}^3 + F_{Jy}^4 \\
 &= k_{41}^1 u_{(1)} + k_{42}^1 v_{(1)} + k_{41}^4 u_{(2)} + k_{42}^4 v_{(2)} + k_{23}^3 u_{(3)} + k_{24}^3 v_{(3)} \\
 &\quad + (k_{43}^1 + k_{21}^3 + k_{43}^4) u_{(4)} + (k_{44}^1 + k_{22}^3 + k_{44}^4) v_{(4)}
 \end{aligned} \quad (1.23b)$$

这样,公式(1.12)、(1.15)、(1.19)和(1.23)建立了整个结构的节点位移和节点力之间的关系。可以将其写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} R_{(1)x} \\ R_{(1)y} \\ R_{(2)x} \\ R_{(2)y} \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^1 + k_{12}^2 & 0 & 0 & k_{23}^2 & k_{24}^2 & k_{13}^1 & k_{14}^1 \\ k_{21}^1 + k_{21}^2 & k_{22}^1 + k_{22}^2 & 0 & 0 & k_{23}^2 & k_{24}^2 & k_{23}^1 & k_{24}^1 \\ 0 & 0 & k_{11}^4 & k_{12}^4 & 0 & 0 & k_{13}^4 & k_{14}^4 \\ 0 & 0 & k_{21}^4 & k_{22}^4 & 0 & 0 & k_{23}^4 & k_{24}^4 \\ k_{31}^2 & k_{32}^2 & 0 & 0 & k_{33}^2 + k_{33}^3 & k_{34}^2 + k_{34}^3 & k_{31}^3 & k_{32}^3 \\ k_{41}^2 & k_{42}^2 & 0 & 0 & k_{43}^2 + k_{43}^3 & k_{44}^2 + k_{44}^3 & k_{41}^3 & k_{42}^3 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{31}^4 & k_{32}^4 & k_{33}^3 & k_{34}^3 & k_{33}^1 + k_{11}^3 + k_{33}^4 & k_{34}^1 + k_{12}^3 + k_{34}^4 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{41}^4 & k_{42}^4 & k_{23}^3 & k_{24}^3 & k_{43}^1 + k_{21}^3 + k_{43}^4 & k_{44}^1 + k_{22}^3 + k_{44}^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{(1)} \\ v_{(1)} \\ u_{(2)} \\ v_{(2)} \\ u_{(3)} \\ v_{(3)} \\ u_{(4)} \\ v_{(4)} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

第四步,求解线性方程组,获得节点位移。

方程(1.24)也不能直接求解,因为系数矩阵不可逆。原因和单元刚度矩阵不可逆相同,因此要求解方程(1.24)必须加入约束条件,消除系统的刚体位移。

根据图 1.3,由于存在约束, $u_{(1)}$ 、 $v_{(1)}$ 、 $u_{(2)}$ 、 $v_{(2)}$ 已知,等于零。因此方程(1.24)可以写成如下形式

$$\begin{bmatrix} R_{(1)x} \\ R_{(1)y} \\ R_{(2)x} \\ R_{(2)y} \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^1 + k_{11}^2 & k_{12}^1 + k_{12}^2 & 0 & 0 & k_{23}^2 & k_{24}^2 & k_{13}^1 & k_{14}^1 \\ k_{21}^1 + k_{21}^2 & k_{22}^1 + k_{22}^2 & 0 & 0 & k_{23}^2 & k_{24}^2 & k_{23}^1 & k_{24}^1 \\ 0 & 0 & k_{11}^4 & k_{12}^4 & 0 & 0 & k_{13}^4 & k_{14}^4 \\ 0 & 0 & k_{21}^4 & k_{22}^4 & 0 & 0 & k_{23}^4 & k_{24}^4 \\ k_{31}^2 & k_{32}^2 & 0 & 0 & k_{33}^2 + k_{33}^3 & k_{34}^2 + k_{34}^3 & k_{31}^3 & k_{32}^3 \\ k_{41}^2 & k_{42}^2 & 0 & 0 & k_{43}^2 + k_{43}^3 & k_{44}^2 + k_{44}^3 & k_{41}^3 & k_{42}^3 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{31}^4 & k_{32}^4 & k_{33}^3 & k_{34}^3 & k_{33}^1 + k_{11}^3 + k_{33}^4 & k_{34}^1 + k_{12}^3 + k_{34}^4 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{41}^4 & k_{42}^4 & k_{23}^3 & k_{24}^3 & k_{43}^1 + k_{21}^3 + k_{43}^4 & k_{44}^1 + k_{22}^3 + k_{44}^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{(3)} \\ v_{(3)} \\ u_{(4)} \\ v_{(4)} \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

上述方程组的未知量为 4 个,理论上只需要 4 个方程即可求解。由于 $R_{(1)x}$ 、 $R_{(1)y}$ 、 $R_{(2)x}$ 、 $R_{(2)y}$ 未知,因此并不需要这几个方程参与求解。将上述方程组简化为如下方程组:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{33}^2 + k_{33}^3 & k_{34}^2 + k_{34}^3 & k_{31}^3 & k_{32}^3 \\ k_{43}^2 + k_{43}^3 & k_{44}^2 + k_{44}^3 & k_{41}^3 & k_{42}^3 \\ k_{13}^3 & k_{14}^3 & k_{33}^1 + k_{11}^3 + k_{33}^4 & k_{34}^1 + k_{12}^3 + k_{34}^4 \\ k_{23}^3 & k_{24}^3 & k_{43}^1 + k_{21}^3 + k_{43}^4 & k_{44}^1 + k_{22}^3 + k_{44}^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{(3)} \\ v_{(3)} \\ u_{(4)} \\ v_{(4)} \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

对方程(1.26)求解,即可获得节点位移 $u_{(3)}$ 、 $v_{(3)}$ 、 $u_{(4)}$ 、 $v_{(4)}$ 。

第五步,根据节点位移计算出每根杆的应力。

计算出节点位移 $u_{(3)}$ 、 $v_{(3)}$ 、 $u_{(4)}$ 、 $v_{(4)}$ 后,由于 $u_{(1)}$ 、 $v_{(1)}$ 、 $u_{(2)}$ 、 $v_{(2)}$ 已知,因此所有节点位移分量均已知。可以应用方程(1.4)计算出每根杆的轴向应变,最后根据本构方程 $\sigma = E \cdot \epsilon$ 计算出所有杆的应力。

1.3 杆单元有限元法的 C 语言实现

1.3.1 数据准备

用有限元法计算结构的位移、变形和应力,需要大量的数据,其中包括:节点总数、节点坐标、单元总数、单元节点的总体编号、材料类型总数、每种材料的弹性模量 E 和泊松比 ν ,节点位移约束总数、节点位移约束、节点载荷总数、节点载荷。

假设图 1.3(a)所示的 1、3、4 号杆单元长度均为 1 m,2 号杆单元长度是 1.414 m,杆半径均为 0.03 m,截面积 A 为 0.00283 m²,弹性模量 E 为 200 GPa。

以国际单位制(N,m,s,kg)将上述所有数据写入一个.txt 文件中,将该文件命名为 Data.txt。文件具体内容如下:

材料总数

1

材料弹性模量、泊松比以及杆的截面积

200e9 0.3 0.00283

节点总数

4

节点坐标(这里以(1)点为坐标原点,假设 1 号杆的长度为 1)

0 0

0 -1.414

1.414 0

0.7071 -0.7071

单元总数

4

单元节点的总体编号

1 1 4

1 1 3

1 4 3

1 2 4

位移约束总数

4

具体的位移约束(第一个数字表示节点编号,后面的 x 、 y 表示约束方向,最后一个数字表示位移约束大小)

1 x 0

1 y 0

2 x 0

2 y 0

载荷总数

1

具体载荷(第一个数字表示节点编号,后面的 x 、 y 表示载荷方向,最后一个数字表示载荷大小)

3 y $-1e5$

1.3.2 数据读取和输出验证

首先定义四个结构体用来存储所有的数据。其中 `Data_bound` 结构体用于存储位移和力边界条件, `Data_Link` 结构体用于存储所有的数据, `Data_Link_UID` 结构体用于存储节点位移的编号, `Data_Link_KgFg` 结构体用于存储总体刚度矩阵和总体载荷向量。

```
struct Data_bound
```

```
{
```

```
    int id; //节点 id, 从 0 开始
```

```
    char dir; //方向, 'x', 'y'
```

```
    double v; //具体数值
```

```
};
```

```
struct Data_Link
```

```
{
```

```
    int Nn, Ne, Nm, Nb, Nf; //分别是节点总数、单元总数、材料总数、位移边界条件总数、
```

```
    载荷条件总数
```

```

double *pMat, *pNodxy; //分别用于存储材料常数,存储节点坐标、边界条件和载荷条件
int *pEle; //存储单元节点编号
Data_bound *p_displs, *p_force; //位移边界条件、力边界条件
} m_data_link; //这是一个全局变量

struct Data_Link_UID
{
    int ID; //在约化位移向量里的位置
    double v; //已知位移的具体数值,未知位移的具体数值
};

struct Data_Link_KgFg
{
    double *pKg; //存储总体刚度矩阵
    double *pFg; //存储总体载荷向量
    Data_Link_UID *p_uid; //存储的是一个向量
    int Nu; //约化后的未知位移总数
};

```

读取数据的函数如下:

```

int FEM_Link_Read(char *filename, Data_Link *p)
{
    int Nn, Ne, Nm, Nb, Nf; //分别是节点总数、单元总数、材料总数、位移边界条件总数、
    载荷条件总数

    double *pMat, *pNodxy; //分别用于存储材料常数,存储节点坐标、边界条件和载荷条件
    int *pEle; //存储单元节点编号
    int i; //用于循环
    Data_bound *p_displs, *p_force; //位移边界条件、力边界条件
    FILE *pf= NULL; //指向文件的指针
    char temp[100]; //用于临时存储数据
    //打开数据文件
    pf= fopen(filename, "r");
    if(pf= NULL)
    {
        printf("Read Data file error! \n");
        return 0;
    }
    fscanf(pf, "%s", temp); fscanf(pf, "%d", &Nm);
    pMat=(double *)malloc(3*Nm*sizeof(double));
    if(pMat==NULL)
    {

```