高等学校教材

离散数学导论

（第4版）

徐洁磐

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书第1版于1982年问世。本书在基本保持第3版的风格与主要内容的基础上，进行了适当的补充与删改，尤其是新增一篇“离散建模”，将离散数学与计算机紧密结合。本书由六篇组成，分别是绪言、集合论、代数系统、图论、数理逻辑和离散建模，并以离散建模为特色。本书取材精练、重点突出、简明易懂、篇幅短小，既强调数学的严谨性与抽象性，又不拘泥于数学的繁琐细节，非常适合于50～70学时的离散数学课程使用。本书配有相应的辅导教材——《离散数学导论（第4版）——学习指导与习题解析》。

本书可作为高等学校计算机及相关专业离散数学课程的教材或参考书，也可供从事计算机工作的科研人员、工程技术人员以及其他有关人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学导论／徐洁磐编著. —4版. —北京：高等教育出版社，2011.4
ISBN 978-7-04-031502-8

Ⅰ. ①离… Ⅱ. ①徐… Ⅲ. ①离散数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第018055号

策划编辑 刘 艳　责任编辑 廖肇源　封面设计 李卫青　责任绘图 黄建英
版式设计 王 莹　责任校对 王效珍　责任印制 张福涛

出版发行	高等教育出版社	网　址	http:// www.hep.edu.cn
社　址	北京市西城区德外大街4号		http:// www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http:// www.landraco.com
印　刷	北京七色印务有限公司		http:// www.landraco.com.cn
开　本	787×1092 1/16		
印　张	18.5	版　次	1982年6月第1版
字　数	410 000		2011年4月第4版
购书热线	010-58581118	印　次	2011年4月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　价	27.20元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 31502-00

第4版序言

本书第1版出版至今已近30年,现在已经是第4版了,它仍在保持原有风格的基础上继续改进和提高,以不断满足计算机专业广大师生的教学之需。

在这一版的修改中,作者坚持如下的编写方针。

1. 保持本书一贯的风格,坚持三个编写原则,即取材少而精的原则、编写简明易懂的原则、读者群体以计算机应用型本科学生为主的原则。

2. 为适应目前课程学时减少及学以致用的发展趋势,对教材内容作适当调整,进一步突出了重点。具体说来,在六篇内容中重点突出数理逻辑。此外,集合论突出集合的基本概念与关系;代数系统突出系统的整体性与群论;图论突出图的结构性与树;而数理逻辑则突出形式化推理。为适应离散数学在计算机学科中的地位与作用,本书还增加了"离散建模"的内容。

3. 一本好的教材不但需要不断增添新的内容,同时也需要不断淘汰落后、过时的内容,只有这样不断地新陈代谢与吐故纳新,教材才具有生命力。在本书此次改版中,我们对内容不但作了一定的增添,而且作了大胆的删减,并保持了总体上的平衡。

4. 离散数学是一门数学课程,因此要有严谨的抽象思维与逻辑推理训练,同时离散数学又是为计算机专业学生开设的课程,重在如何将其应用于计算机领域的实际中。因此本书一方面注重让学生建立严密的逻辑推理思维,另一方面却不追求过于繁琐的定理证明,这两者的有机结合,使得本书既能突出数学特色,又不过分强调数学的非本质性细节,使离散数学真正成为计算机专业所需的核心课程。

在具体修改的过程中,我们对书中的每一篇进行了如下的增、删、改。

1. 第一篇——绪言:重新改写了绪言。

2. 第二篇——集合论:适当调整了篇中部分章节内容,简化了部分定理证明。

3. 第三篇——代数系统:增添了代数系统整体性的部分内容,大量删减了环论中的内容,对格论中的内容作了部分修改,强调了它的代数性质,并加强了对布尔代数的介绍。

4. 第四篇——图论:保留了图论原理与树这两部分内容,删除了平面图与两步图的全部内容。

5. 第五篇——数理逻辑:增加了部分形式推理内容,删除了非经典逻辑介绍的全部内容及数理逻辑的公理化理论的部分内容。

6. 最后,增加了新的一篇,即第六篇——离散建模。

同时,对第 3 版中存在的错误作了全面的校正。

一本有生命力的教材一定要有特色,本书的特色是:

1. 内容简洁——篇幅短小,这是为了符合取材少而精的原则,也是为了适应目前课程学时的需要;

2. 重点突出——突出数理逻辑,因为数理逻辑是研究形式推理的学科,它对计算机专业的学生特别重要;

3. 学以致用——增加离散建模内容,因为学习离散数学的根本目的是为了解决应用中的问题。

这三个特色也可以作为本序言的小结。

为使教材更适应教学需要,本书还配有相应的辅导教材——《离散数学导论(第 4 版)——学习指导与习题解析》以及电子教案。

经过修改后的版本,其内容重点更为突出,适用性也更强,特别适合于 50 ~ 70 学时的离散数学课程的需要。在书中凡标有“*”之章节可以略去不讲,这些章节可为学时较少的课程提供更多的选择空间。在第 4 版修订过程中得到了南京大学计算机软件新技术国家重点实验室的支持,同时还得到了南京大学计算机科学与技术系的徐永森教授及朱怀宏副教授的支持,在此表示感谢!

徐洁磐

南京大学计算机软件新技术国家重点实验室

南京大学计算机科学与技术系

2010. 10

第3版序言

《离散数学导论》一书自1982年出版至今已有20余年,中间也经再版,这次已是第3版了。在这20余年中本书受到广大教师与学生的欢迎,其发行范围已普及国内各学校并已流传至港、澳、台等地区。为进一步适应各学校的需要,在这一版中对原版本的特色继续予以保留外,还作了一定程度的修改与删除,第3版的主要编写方针是:

1. 继续保持原版本简明易懂的原则;
2. 继续保持原版本读者群体范围;
3. 继续保持原版本的篇幅规模与内容;
4. 在章节编排上作适当的调整,将第2版中过长的章节作适当变更,使每一章节控制在合适范围内,以便于教学上的合理安排;
5. 为适应计算机科学与技术的发展,适当调整内容,如增加非经典逻辑等内容,删除一些繁琐证明及调整一些不合理的例子;
6. 为帮助学生复习,在每篇后特增加复习指导;
7. 在每章后增加习题,并在每篇后增加大量习题,以帮助学生复习;
8. 对原版中的一些错误作了订正;
9. 增加了中英文名词对照表及常用符号表。

按以上9点要求修订后,相信本书第3版更能适应读者要求。

在编写本书第3版过程中,得到南京大学计算机软件新技术国家重点实验室的支持,同时还得到南京大学计算机科学与技术系多位老师支持以及陈巧珍老师具体帮助,在此表示感谢!

徐洁磐

南京大学计算机软件新技术国家重点实验室

2003.10

再版前言

《离散数学导论》一书出版发行已有七年，在这七年中得到了广大读者的支持，同时他们还对本书提出了很多宝贵的意见。作者在多次讲授中也积累了不少经验，在此基础上对原书作了修订，其主要修改之处有：

1. 对原有章节内容作了重大调整，根据《离散数学教学大纲》重点讲授该大纲所确定的四个基本内容，即集合论、代数系统、图论与数理逻辑，并且重点突出了数理逻辑与代数系统，删除了有限自动机与图灵机器两章；

2. 对章节划分与次序作了调整，它们依次是：集合论初步、关系与映射、无限集、代数系统、图论与数理逻辑等；

3. 重点修改与增加了数理逻辑内容，使之适应目前的需要；

4. 增加了代数系统中的内容；

5. 关系与映射一章中增加了“相容关系”一节；

6. 每章都增补了习题；

7. 对原书中的一些错误作了订正。

在修订过程中继续保持了本书的原有特色。

经过上述修订后，相信此书能更适应读者要求，同时也希望能继续得到读者的支持。

作　者

1989.08　南京

原 版 序

《离散数学导论》一书是作者近年来在南京大学计算机科学系讲授此课程的讲义的基础上整理而成的。它可以作为理工科院校计算机有关专业学生的教材，也可作为从事计算机工作的有关人员的参考书。

本书内容比较广泛，它不仅包括目前一般离散数学的基本内容，如集合论、图论、关系与映射、代数系统及数理逻辑等，还包括目前应用得比较广泛的一些内容，如有限自动机理论、图灵机器等。

作者力图将离散数学中的各部分内容有机地联系起来，同时也尽量地将各部分内容的特色表达清楚。

由于离散数学是一门数学课程，因此作者力求叙述严格，证明与推导逻辑性强，思路清楚，使学生通过此课程的学习能得到严格的逻辑推理与抽象思维能力的训练。但是，考虑到此课程是为计算机有关专业学生开设的，因此在编写过程中作者力求做到能密切结合计算机的实际，能将理论与实际紧密地结合起来，使读者能知道如何利用离散数学的理论去解决计算机中的实际问题。

作者在编写过程中尽量做到内容深入浅出、文字浅显易懂，因此，本书非常适合于读者自学。

一般讲，只要具有初等数学知识的人即可看懂此书。但是，希望读者能具有一定的逻辑思维能力，这样，可以较为容易地掌握本书的实质。

在编写过程中曾得到惠永涛、汪承藻两位老师的协助，在此表示感谢。

作 者

1982.04　南京

目 录

第一篇 绪 言

第二篇 集 合 论

第一章 集合论初步 …… 3

§1.1 集合的基本概念 …… 3

§1.2 集合代数 …… 5

§1.3 幂集 …… 11

习题1 …… 11

第二章 关系 …… 13

§2.1 关系的预备知识——n元有序组与笛卡儿乘积 …… 13

§2.2 关系的基本概念 …… 14

§2.3 关系的运算 …… 16

§2.4 关系的重要性质 …… 20

§2.5 关系上的闭包运算 …… 21

§2.6 次序关系 …… 24

* §2.7 相容关系 …… 28

§2.8 等价关系 …… 30

习题2 …… 32

第三章 函数 …… 35

§3.1 函数的基本概念 …… 35

§3.2 复合函数、反函数、多元函数 …… 37

§3.3 常用函数介绍 …… 38

习题3 …… 39

第四章 有限集与无限集 …… 41

§4.1 有限集与无限集基本概念 …… 41

* §4.2 有限集 …… 41

§4.3 无限集的性质 …… 44

习题4 …… 48

第二篇复习指导 …… 49

第二篇总复习题 …… 53

第三篇 代数系统

第五章 代数系统基础 …… 57

§5.1 代数系统的一般概念 …… 57

§5.2 代数系统常见的一些性质 …… 59

§5.3 同构与同态 …… 62

§5.4 常用的代数系统分类 …… 72

习题5 …… 73

第六章 群论 …… 76

* §6.1 半群与单元半群 …… 76

§6.2 群 …… 79

习题6 …… 95

第七章 环论与格论 …… 96

* §7.1 环论 …… 96

§7.2 格论 …… 98

习题7 …… 105

第三篇复习指导 …… 106

第三篇总复习题 …… 109

第四篇 图 论

第八章 图论原理 …… 113
§8.1 图的基本概念 …… 114
§8.2 通路、回路与连通性 …… 122
§8.3 欧拉图 …… 126
§8.4 哈密顿图 …… 128
§8.5 图的矩阵表示法 …… 130
习题 8 …… 137
第九章 树 …… 140
§9.1 树及其基本性质 …… 140
§9.2 有向树 …… 141
§9.3 二元树 …… 144
§9.4 生成树 …… 147
习题 9 …… 150
第四篇复习指导 …… 151
第四篇总复习题 …… 154

第五篇 数理逻辑

第十章 命题逻辑 …… 158
§10.1 命题与命题联结词 …… 158
§10.2 命题变元与命题公式 …… 163
§10.3 重言式 …… 165
§10.4 命题逻辑的基本等式及等式推理 …… 165
§10.5 命题逻辑的基本蕴涵式及蕴涵推理 …… 171
§10.6 范式 …… 175
§10.7 命题联结词的扩充与归约 …… 181
习题 10 …… 184
第十一章 谓词逻辑 …… 185
§11.1 谓词与个体 …… 185
§11.2 量词 …… 187
§11.3 函数 …… 189
§11.4 谓词逻辑公式 …… 190
§11.5 自由变元与约束变元 …… 191
§11.6 谓词逻辑的永真公式 …… 192
§11.7 谓词逻辑的等式推理 …… 195
§11.8 谓词逻辑的蕴涵推理 …… 196
§11.9 谓词逻辑范式 …… 199
习题 11 …… 201
*第十二章 数理逻辑的公理化理论 …… 202
§12.1 公理化理论的基本思想 …… 202
§12.2 命题逻辑、谓词逻辑的公理化理论 …… 203
§12.3 数理逻辑应用公理系统 …… 211
§12.4 谓词逻辑的自动定理证明 …… 215
习题 12 …… 223
第五篇复习指导 …… 225
第五篇总复习题 …… 227

第六篇 离散建模

第十三章 离散建模概念与方法 …… 231
§13.1 离散建模概念 …… 232
§13.2 离散建模方法 …… 232
§13.3 离散建模方法的五个步骤 …… 234
习题 13 …… 236
第十四章 离散建模应用实例 …… 237
§14.1 数字逻辑电路中的离散建模 …… 237
§14.2 电话线路故障影响分析中的离散建模 …… 242
§14.3 数据库中关系数据模型的离散建模 …… 246
*§14.4 数据通信中纠错码的离散建模 …… 257
习题 14 …… 269

第六篇复习指导 ………………………… 270　第六篇总复习题 ………………………… 272

附录一　常用符号一览表 ……………………………………………………… 273
附录二　中英文名词对照表 …………………………………………………… 275
参考文献 ……………………………………………………………………… 282

第一篇 绪言

1. 计算机学科与离散数学

由于计算技术的日益发展、计算机应用的日益拓广、计算机软件的日益丰富、计算机理论研究的日趋完善,从而产生了计算机学科.在计算机学科的研究中需要借助于一些工具与方法,而离散数学正是研究计算机学科的有力工具.

离散数学作为有力的数学工具,对计算机的发展、计算机学科的研究起着重大的作用.远在计算机产生之前,图灵(Turing)在研究可计算性问题时就建立了著名的图灵机.图灵机的基本结构思想为1946年计算机的问世奠定了理论基础.在计算机发展的初期,利用布尔代数理论研究开关电路,从而建立了一门完整的数字逻辑理论,对计算机的逻辑设计起了很大的作用.在近期,利用自动机理论研究形式语言;利用谓词演算研究程序正确性问题;利用代数结构研究编码理论;利用能行性理论研究计算机中的可计算性问题;等等.目前,离散数学在人工智能、数据库理论、软件工程、程序理论等计算机研究领域中的作用越来越大.计算机学科中普遍地采用离散数学中的一些基本概念、基本思想和基本方法,使得计算机学科越趋完善与成熟.

此外,在计算机的应用开发中通过离散数学构作应用模型可为开发提供方便、有效的求解手段,如电信系统中的恶意欠费模型、电力系统中的故障分析模型等都是有名的实用模型.

所有这些,使得离散数学成为了解和学习计算机学科、掌握和研究计算机学科的必需的理论基础.如果不了解离散数学的基本内容,则在现代计算机学科中将寸步难行.

2. 离散数学之特征

离散数学是数学中的一个分支,它以离散量作为主要研究对象,如自然数、真假值、字母表等.这使它与数学分析在研究对象上形成了鲜明的差别.数学分析是以连续量作为研究对象的.二者在研究对象上的本质差别,使数学分成连续数学与离散数学两大门类.

离散数学有下面几个特征:

(1) 离散性——离散数学以离散量为其研究对象并以离散量间的关系为其研究内容.

(2) 可构造性——问题求解是数学研究的重要内容,离散数学特别重视解的可构造性.所谓可构造性,是指在求解时注重求解的过程与步骤,且这些步骤是有限的、有规则的.

(3) 抽象性——离散数学以集合论为基础,以数理逻辑的形式化推理、代数系统的抽象运算以及图论中的抽象结构为研究方法,这使它的抽象性比一般数学分支更高.

3. 离散数学的内容

由于离散数学是以离散量作为其研究对象,故一切以离散量作为其研究对象或作为其研究对象之一的数学均属于离散数学,它们可以是集合论、代数系统、图论、数理逻辑等.离散数学还包括诸如组合数学、数论、自动机理论、图灵机、递归函数论及离散概率等方面的内容.但是其核心内容为前述的四个部分,因此本书主要介绍集合论、代数系统、图论及数理逻辑等四方面内容.

这四方面内容之所以成为离散数学的核心内容,主要是由于:

(1) 集合论是数学的基础,因此也是离散数学的基础.

(2) 数学有三种研究方法,分别是:

- 推理方法——数理逻辑研究的内容;
- 运算方法——代数系统研究的内容;
- 结构方法——图论研究的内容.

(3) 数学研究建立在集合间的关系之上,它有五种研究手段,分别是:

- 关系——研究学科内容的一般性规律(集合论研究的内容);
- 函数——是一种规范化的关系(集合论研究的内容);
- 运算——是另一种规范化的关系(代数系统研究的内容);
- 图——是一种结构化的关系(图论研究的内容);
- 谓词逻辑——是一种推理化的关系(数理逻辑研究的内容).

由以上三点可以看出集合论、代数系统、图论及数理逻辑在离散数学中的重要性.离散数学的这些内容均以离散量为共同研究对象,而以不同的研究方法与手段形成各自的特色,它们互相补充、互相促进、互相渗透,逐渐形成一门以集合论为基础的新学科.

4. 离散建模

离散数学是为计算机科学与技术相关专业学生开设的课程,其设置目的是将离散数学作为工具用于计算机学科领域的应用与研究.具体地说,即用离散数学构作计算机学科领域的数学模型,从而将该领域的问题变成数学问题,这一过程称为离散建模.学习与掌握离散建模是离散数学课程的必需内容,因此本书除介绍离散数学四个核心内容外,还将介绍离散建模的基本内容.

第二篇 集合论

本篇由集合论初步、关系、函数、有限集与无限集等四个与集合论相关的内容组成,它们以集合概念为基础并进一步作扩充与延伸,组成一个内容关联的整体.

第一章 集合论初步

集合的概念是一般数学及离散数学中的基本概念,也是计算机学科中经常应用的基本概念.集合论还能直接应用到计算机学科的各个分支的研究对象一般性规律的探讨中.

§1.1 集合的基本概念

1.1.1 集合及其元素

首先,对集合及其元素的概念作一个说明.

我们把一些不同的确定的对象的全体称为集合,而这些对象称为集合的元素.由此可见,集合是由元素组成的.元素可以理解为存在于世上的客观物体.当然,这些物体可以是具体的,也可以是抽象的,如人、书、桌子、花、太阳、地球、原子、自然数、实数、字母、点、三角形,等等.

对于集合可以举一些例子:

例 1.1 地球上全体人类构成一个集合,而每个人则是此集合的元素.

例 1.2 计算机的全部内存单元构成一个集合,而每个内存单元为此集合之元素.

例 1.3 全体自然数构成一个集合,而每个自然数是这个集合的元素.

一般用带标号或不带标号的大写字母表示集合,如 A、S、X_1、B_i 等,用带标号或不带标号的小写字母表示集合的元素,如 a_1、b_2、x、y、e 等.为了表示一个集合由哪些元素组成,一般将集合的元素全部列出(元素间以逗号隔开),并用花括号括起来.例如集合 A 由元素 a、b、c、d 组成,则可

写成

$$A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$$

对于集合必须注意以下两点：

(1) 集合中的元素是确定的，也就是说，对集合 A，任一元素 a 或属于此集合，或不属于此集合，两者必居其一. 若一元素 a 属于集合 A，则用 $a\in A$ 表之；若不属于 A，则用 $a\notin A$ 表之.

(2) 集合中各元素互不相同，亦即集合 $\{a,\ b,\ b,\ c,\ d\}$ 与 $\{a,\ b,\ c,\ d\}$ 是一样的.

除此之外，对集合不作任何其他限制，使它具有最广泛的含义.

对集合的元素也不作任何限制，甚至某一集合可以作为另一集合的元素，如 $A=\{1,2,\{a,b\}\}$，其中集合 $\{a,b\}$ 是集合 A 的元素.

对于应由哪些元素构成一个集合，从理论上讲也不作任何限制. 当然，在实际应用时，集合往往具有明确的范围，即是说，一个集合的元素往往具有某种共同的性质.

对于集合元素的个数也不作任何限制，它可以是有限个也可以是无限个. 集合若由有限个元素组成，则称其为有限集；集合若由无限个元素组成，则称其为无限集. 如自然数集即为无限集，地球上人的集合则是有限集. 特别称元素个数为零的集合为空集，记以 $\varnothing$. 如“缺席今天会议的人”构成集合 A，则“今天全体出席会议”表示 $A=\varnothing$.

与空集相对应的是全集. 一个集合，如果它能包括我们所考虑的目标之内的所有元素，则称其为全集，记以 E. 如讨论存储器，则存储器之全体存储单元构成一个全集 E；如讨论人的问题，则全体人类构成一个全集 E.

前面已经提到集合的表示法，即集合 A 由元素 a、b、c、d 组成可写为 $A=\{a,b,c,d\}$，这种表示法叫“枚举法”，也就是将集合所有元素一一列出，但有时也可只列出一部分元素，而其余元素可根据前后关系很显然地推出，如

$$A=\{0,1,2,3,4,\cdots\}$$

表示全体自然数集合，又如

$$B=\{1,2,3,\cdots,100\}$$

表示从 1 到 100 这 100 个自然数所构成的集合.

前面所讨论的集合表示法称为显式表示法. 集合还可用另一种方法表示，称为隐式表示法，它是用集合元素所具有的共同性质来刻画该集合. 如正偶数组成的集合 A 可写成

$$A=\{x\mid x\text{ 是正偶数}\}$$

对于一般情况，可用如下方法表示集合：

$$A=\{x\mid P(x)\}$$

其中 P 表示某种性质，上式表示集合 A 由满足性质 P 的全部元素 x 所组成.

1.1.2 集合间的关系

集合间一般有两种关系——相等关系与包含关系.

定义 1.1 如果集合 A 与集合 B 的元素完全相同，则称这两个集合是相等的，记以 $A=B$；否则称这两个集合不相等，记以 $A\neq B$.

定义 1.2　给定集合 A,B,如果当 $a\in A$ 时必有 $a\in B$,则称 B 包含 A,或称 A 是 B 的子集,记以 $B\supseteq A$ 或 $A\subseteq B$;如果 $B\supseteq A$ 且存在 b,使得 $b\in B$ 但 $b\notin A$,则称 A 是 B 的真子集,记以 $B\supset A$ 或 $A\subset B$;若集合 A,B 不满足 $A\subseteq B$,则称 B 不包含 A,记以 $A\nsubseteq B$.

对于集合的相等与包含关系,可用一种图即文氏图(Venn Diagram)表示.

文氏图在表示集合间的关系时较为直观、形象,故目前被广泛应用.在文氏图中用一个平面中的方形区域表示一个全集,而对包含于全集内的集合用方形区域内的圆(或椭圆)表示之.这样,全集内的集合间关系就可用方形区域内若干个圆(或椭圆)之间的关系表示.对于相等与包含关系,可以很形象地用文氏图表示,如图 1.1 所示.

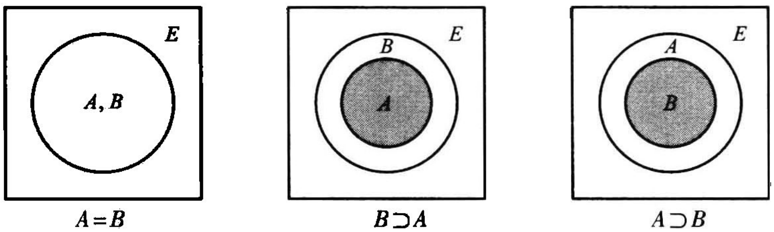

图 1.1　相等与包含关系之文氏图

例 1.4　设 $N=\{0,1,2,\cdots\}$, $A=\{1,2,3,\cdots,100\}$,则有 $A\subseteq N$,并且有 $A\subset N$.

例 1.5　设 $A=\{1,2,3,3\}$,$B=\{1,2,3\}$,则有 $A=B$.

例 1.6　设 $A=\{i\mid i$ 为正整数$\}$,$B=\{j\mid j$ 为正偶数$\}$,则有 $B\subseteq A$,且 $B\subset A$.

相等与包含关系有下面的一些性质.

性质 1　对任一集合 A,必有 $\varnothing\subseteq A$.

性质 2　对任一集合 A,必有 $E\supseteq A$.

由上面两个性质可以得到

性质 3　对任一集合 A,必有 $\varnothing\subseteq A\subseteq E$.

性质 4　给定集合 A 与 B,则 $A=B$ 的充要条件是 $A\supseteq B$ 且 $B\supseteq A$.

§1.2　集合代数

在这节中用代数的方法讨论集合,即建立集合的运算以及运算间的基本关系式.

首先建立一些集合的运算.

定义 1.3　由集合 A,B 中所有元素合并组成的集合 C 叫做集合 A 与 B 的并集,记以 $A\cup B=C$,而"$\cup$"称为并运算.

例 1.7　$A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$,则

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$$

定义 1.4　由集合 A,B 所有的公共元素所组成的集合 C 叫做集合 A 与 B 的交集,记以 $A\cap B=C$,而"$\cap$"称为交运算.

例 1.8　$A=\{1,3,5,7,9\}$，$B=\{1,3,8,10\}$，则

$$A\cap B=\{1,3\}$$

定义 1.5　集合 A,B 若满足 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 与 B 是分离的.

定义 1.6　由所有属于集合 A 而不属于集合 B 的元素所组成的集合 C 叫做集合 A 对集合 B 的差集，记以 $A-B=C$，而“$-$”称为差运算.

例 1.9　$A=\{a,b,c,d,e,f\}$，$B=\{d,e,f,g,h\}$，则

$$A-B=\{a,b,c\}$$

由差集可直接定义补集.

定义 1.7　集合 A 的补集 $\sim A$ 定义为

$$\sim A=E-A$$

而“$\sim$”称为补运算.

例 1.10　设 $E=\{0,1,2,3,\cdots\}$，$A=\{0,2,4,6,\cdots\}$，则

$$\sim A=E-A=\{1,3,5,7,\cdots\}$$

还可以由差集定义对称差.

定义 1.8　集合 A,B 的对称差（或叫布尔和）$A+B$ 定义为

$$A+B=(A-B)\cup(B-A)$$

其中“$+$”称为对称差运算，而 $C=A+B$ 中的 C 叫做集合 A 与 B 的对称差集.

例 1.11　设 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，则

$$A+B=\{1,2,5,6\}$$

由例 1.11 可以看出，$A+B$ 即为 A,B 的所有非公共元素所组成的集合.

到此为止，定义了四种二元运算，即并运算、交运算、差运算与对称差运算，以及一种一元运算——补运算. 这五种运算及集合的分离概念可用文氏图表示，如图 1.2 所示.

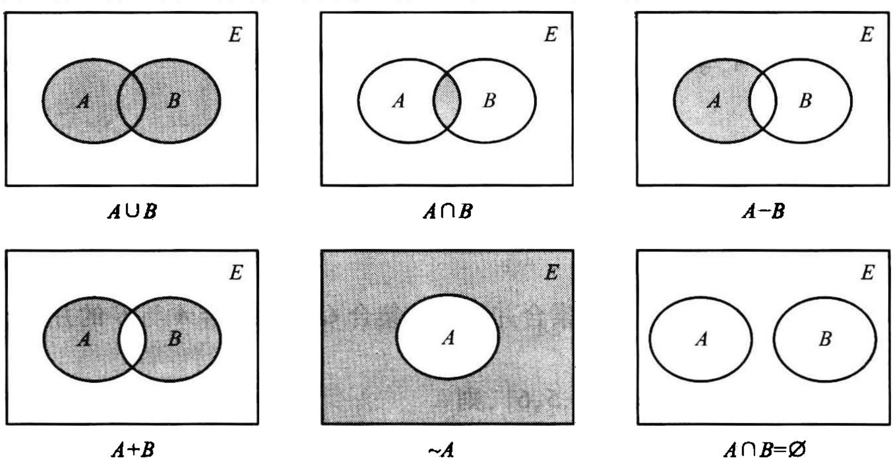

图 1.2　五种集合运算及集合分离概念的文氏图

下面着重讨论并、交、补三种运算的基本公式.

由定义可知并、交运算满足交换律,即

$$A\cup B=B\cup A \tag{1-1}$$

$$A\cap B=B\cap A \tag{1-2}$$

由定义可知并、交运算满足结合律,即

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C \tag{1-3}$$

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C \tag{1-4}$$

由定义还可知并、交运算满足分配律,即

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \tag{1-5}$$

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \tag{1-6}$$

由定义还可以得到有关空集、全集及补集的几个公式,即

同一律:

$$A\cup\varnothing=A \tag{1-7}$$

$$A\cap E=A \tag{1-8}$$

互补律:

$$A\cup\sim A=E \tag{1-9}$$

$$A\cap\sim A=\varnothing \tag{1-10}$$

零一律:

$$A\cup E=E \tag{1-11}$$

$$A\cap\varnothing=\varnothing \tag{1-12}$$

对(1-11)可以证明如下:

$$\begin{aligned}
A\cup E&=(A\cup E)\cap E && \text{由(1-8)}\\
&=E\cap(A\cup E) && \text{由(1-2)}\\
&=(A\cup\sim A)\cap(A\cup E) && \text{由(1-9)}\\
&=A\cup(\sim A\cap E) && \text{由(1-5)}\\
&=A\cup\sim A && \text{由(1-8)}\\
&=E && \text{由(1-9)}
\end{aligned}$$

对(1-12)可以证明如下:

$$\begin{aligned}
A\cap\varnothing&=(A\cap\varnothing)\cup\varnothing && \text{由(1-7)}\\
&=\varnothing\cup(A\cap\varnothing) && \text{由(1-1)}\\
&=(A\cap\sim A)\cup(A\cap\varnothing) && \text{由(1-10)}\\
&=A\cap(\sim A\cup\varnothing) && \text{由(1-6)}\\
&=A\cap\sim A && \text{由(1-7)}\\
&=\varnothing && \text{由(1-10)}
\end{aligned}$$

还可以得到幂等律: