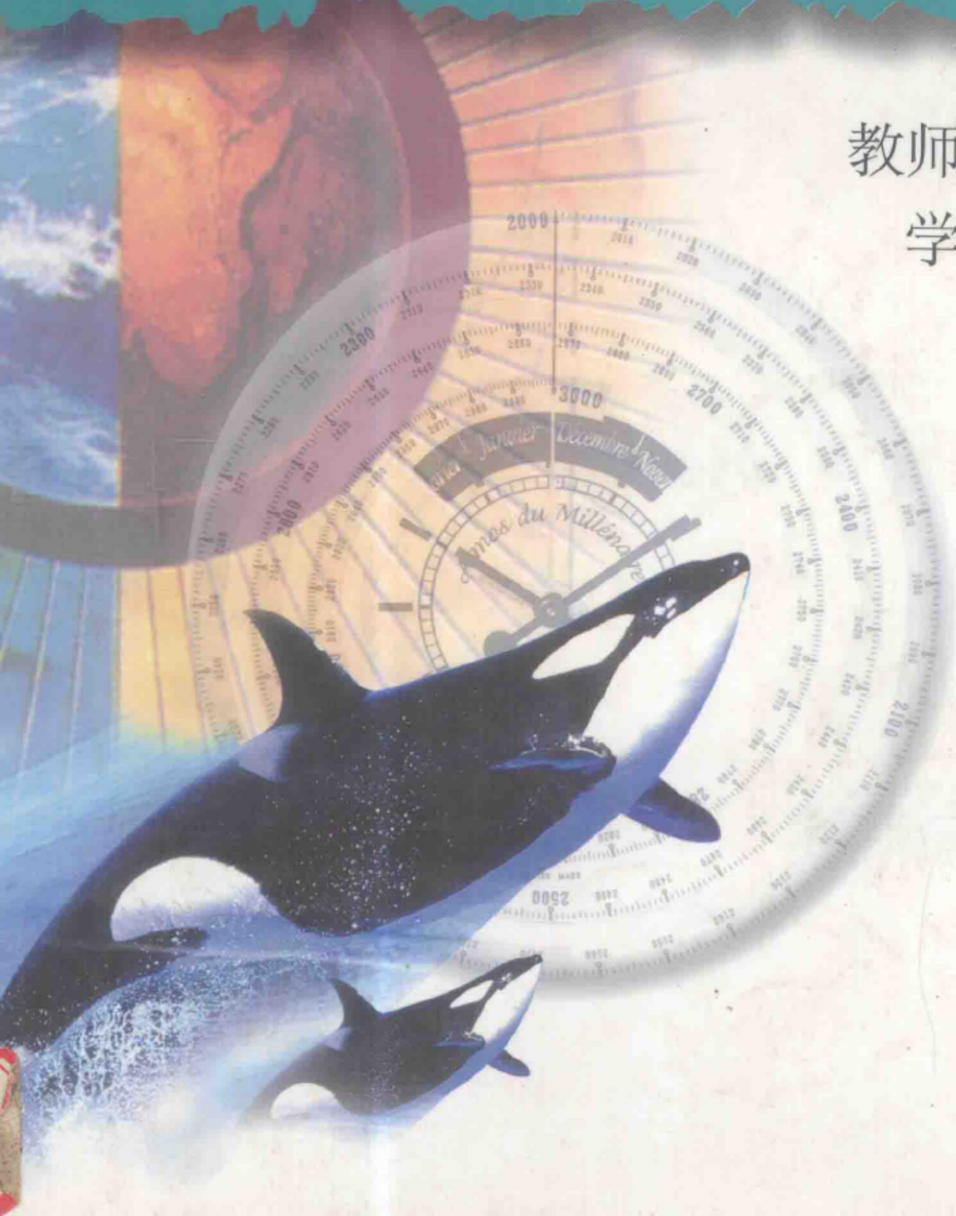
TEJIJIAOSHIJIAOSHUXUE

Teji Jiaoshijiao Shuxue

高三年级

奚定华　主编

特级教师教数学



教师的备课助手
学生的免费家教

学林出版社

特级教师教数学

高三年级

奚定华　主编
本册编写　忻再义　王春明

学林出版社

图书在版编目(CIP)数据

特级教师教数学. 高三年级 / 奚定华主编. —上海:学林出版社,2001.12

ISBN 7-80668-235-X

Ⅰ. 特…　Ⅱ. 奚…　Ⅲ. 数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 092472 号

特级教师教数学(高三年级)

主　　编——奚定华
本册编写——忻再义　王春明
特约编辑——韩希塘
责任编辑——吴耀根
封面设计——王　峥
出　　版——学林出版社(上海钦州南路 81 号)
电话:64515005　传真:64515005
发　　行——新华书店上海发行所
学林图书发行部(文庙路 120 号)
电话:63779027　传真:63768540
印　　刷——上海师范大学印刷厂
开　　本——787×1092　1/16
印　　张——12.25
字　　数——24 万
版　　次——2001 年 12 月第 1 版
2001 年 12 月第 1 次印刷
印　　数——5000 册
书　　号——ISBN 7-80668-235-X/G · 93
定　　价——17.00 元

前　言

数学是中学的一门主要学科，要学好数学必须掌握数学基础知识和基本技能，提高运算能力、思维能力、空间想象能力和分析问题、解决问题的能力。有不少学生感到数学难学，面对一系列抽象的概念、一大堆定理和公式，不知所措、无所适从，迫切需要有名师指点。为此我们组织了在教学上有很高造诣和丰富经验的特级教师编写这套丛书。这些特级教师多年来在教学第一线工作，其中有些教师多次参加教材编写和中考、高考命题工作，这是他们数学教学工作的经验总结和心血结晶，相信对广大中学生的数学学习会有所启迪，对广大的中学数学教师的教学也会有所帮助。阅读本丛书，好像特级教师就在你身边给你上课，循循善诱、启发引导、分析点拨、指点迷津，帮助你抓住重点、掌握要领、克服难点，领悟数学的真谛。

本书具有以下几个特点：

1. 既重视基础知识和基本技能，又注意培养数学能力

本丛书深入浅出地阐述数学概念的本质，对定理、公式和法则进行透彻的分析，使读者通过学习，能深刻地理解数学基础知识和熟练地掌握数学的基本技能。书中精选典型例题，对每一个例题进行分析，引导读者通过对条件和结论以及它们之间关系的分析，探究解题的思路，并在解题的基础上，进行反思，总结解题的规律。又编制各种不同类型、不同层次的习题，让读者通过练习，提高运算能力、思维能力、空间想象能力和分析问题、解决问题的能力。

2. 既能用于新知识的学习，又能作为复习的参考

本丛书在每一个单元设有“重点难点分析”的栏目，对中学数学的重要概念、定理、公式和法则，难学的数学知识和技能进行详细的剖析，并通过例题加以说明，指出在学习过程中应该注意的问题和可能产生的错误，使读者阅读以后能真正抓住重点知识、克服学习中的困难。每一单元后附有习题，题型多样，供读者初步熟悉和操练之用。通过这一部分内容的学习，可以使读者扎扎实实地学好新的数学知识。在每一章结束之前设有“知识提要”栏目，系统地归纳总结本章重要的知识，分类进行整理，帮助读者巩固所学的知识。接着有“例题精选”栏目，选择典型的、综合的问题进行讲解，提高读者灵活和综合运用数学知识分析问题、解决问题的能力。还有“方法指导”栏目是本丛书的重要特色，从数学思想方法的高度对一章的内容进行概括，对读者进行学习方法和数学思想方法的指导。每一章还设有“复习题”栏目，选择综合性较强的问题，让读者通过练习沟通各种数学知识。这些栏目的设置，为读者复习巩固有关的数学知识，提供了丰富的参考资料。

3. 既能使基础较差的读者有所得益，又能使水平较高的读者有所提高

本丛书面向全体学生，可供不同水平的读者选用。书中有很多基本的内容、例题和习题，通过一步步的引导和适量的练习，使基础较差的学生能牢固地掌握基础知识和基本技能，达到基本的要求。同时又注意编写提高的、综合的、灵活运用的内容和习题，让水平较高的学生通过学习也能得到进一步的提高。在一章和一个阶段结束时的测试评估都分 A、B 两组，A 组是基本要求，B 组是较高要求，让读者根据自己的基础和要求选用。

本丛书由上海市著名的特级教师和部分高级教师负责编写工作，具体分工如下：六年

级:周齐、胡平;七年级:吴传发、唐棣;八年级:邹一心、孙兆桂;九年级:叶锦义、奚根荣;高一:李大元、张颂方;高二:胡仲威、何维安、钱民广、杨兴中;高三:忻再义、王春明。最后全书由奚定华修改和统稿。

由于时间仓促,书中错误和不足之处在所难免,欢迎读者批评指正。

编　者

2001 年 11 月

目　　录

第十四章　排列、组合与概率

一、排　　列

重点难点分析

1. 乘法原理

如果完成一件事，需要 n 个步骤，做第一步有 m_1 种方法，做第二步有 m_2 种方法，……，做第 n 步有 m_n 种方法，那么完成这件事共有

$$\boldsymbol{N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n}$$

种方法。

这个原理称为**乘法原理**。

这里必须强调的是在乘法原理中完成一件事是需要分步的。如果只完成了其中的一步或几步，还有某一步尚未完成，那么这件事仍未完成。因此在计数时，必须将 n 个步骤中的每一步所含有的方法种数相乘。这样才能得到正确的结果。

为了使计数能有条理和具体化，常常采用树图帮助计数。所谓树图实际上是一种分支图，就好像一棵树，从“树干”上分出一些“树枝”，“树枝”又分出一些更细的“树枝”，……。

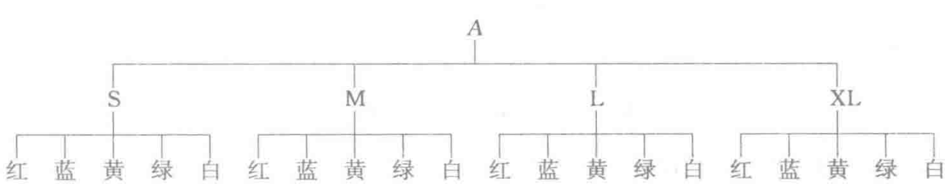
例 1　某羊毛衫厂近期推出 A、B、C、D、E 五种新款式的羊毛衫，每种款式都有 S(小号)，M(中号)，L(大号)，XL(特大号)这四种不同的规格，每种规格都配以红、蓝、黄、绿、白等 5 种不同的颜色，那么该羊毛衫厂共需要准备多少种款式、规格、色彩不全相同的样品？试用树图加以说明。

分析　本例中，在确定样品时要分三个步骤，第一步确定样品的款式，共有 5 种不同的款式。第二步，确定样品的规格，共有 4 种不同的规格。第三步，确定样品的颜色，共有 5 种不同的颜色。完成了上述三个步骤，样品可以完全确定，利用乘法原理可得出结果。

解　根据乘法原理，样品的种数为

$$N = 5 \times 4 \times 5 = 100(\text{种})。$$

相应的树图如图 14-1。



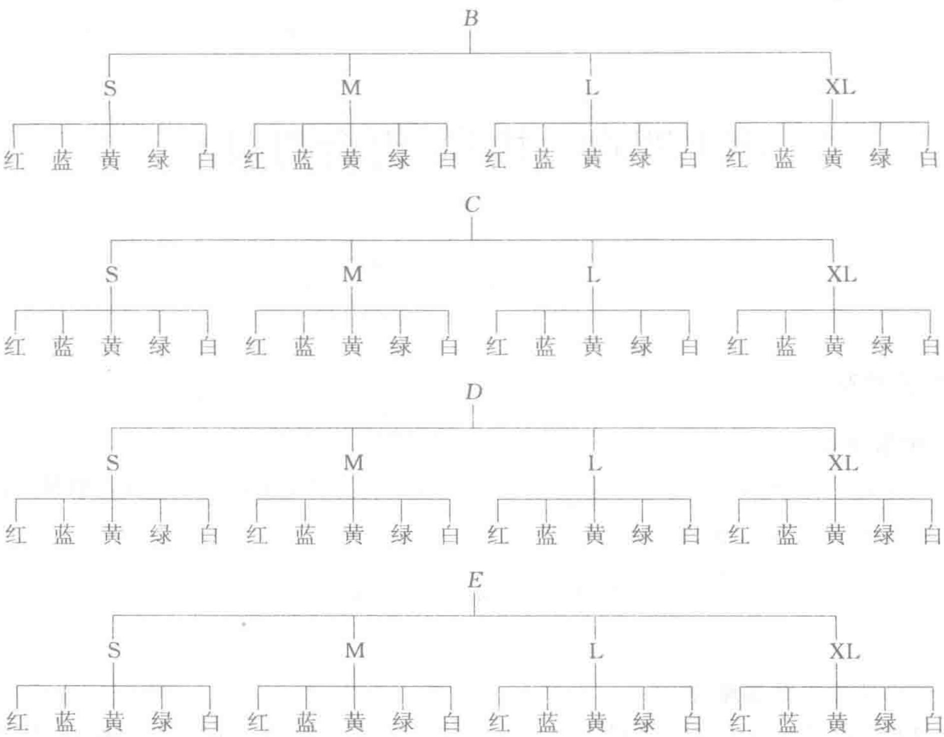


图 14-1

说明　树图可以根据需要画成竖式的，也可画成横式的。

例 2　某电脑软件提供了 20 种不同的版式，另有 48 种不同的色彩可供选择，并配有 16 种不同的字体。问该软件可为用户提供多少种版式、色彩、字体不全相同的版面设计？

分析　用户在确定版面时可分三个步骤：第一步确定版式，共有 20 种不同的版式可供选择。第二步确定色彩，共有 48 种不同的色彩可供选择，第三步确定字体，共有 16 种不同的字体可供选择。由乘法原理可得不同版面的种数。

解　根据乘法原理，不同版面的种数为

$$N = 20 \times 48 \times 16 = 15\,360(\text{种})。$$

2. 排列

从 n 个不同的元素中，任意选取 $m(m \leqslant n)$ 个不同的元素，按一定的顺序排成一列，叫做**从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素的排列**。当 $m = n$ 时，这 n 个元素全都参加了排列，叫做**全排列**。

这里应当指出的是在排列的定义中，规定了 n 个元素是互不相同的，同时所选出的 m 个元素也是互不相同的。并且强调了“按一定的顺序”排成一列。这就意味着在研究排列问题时，非常重视元素间的顺序。例如同样是 a，b，c 三个元素，我们仅改变它们的先后顺序就可以分别得到

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba$$

六种排列，这六种排列是不同的排列。

例 3 (1) 写出从 a, b, c, d 这 4 个元素中任意选取 3 个元素的所有的排列；

(2) 写出 a, b, c, d 这 4 个元素的全排列。

分析 为了写出满足要求的所有的排列,可画出相应的树图,在熟练的基础上,可以直接写出结果。例如在(1)中先确定 a 在第 1 位上,在第 2 位先写上 b,然后在第 3 位上分别写上 c, d,得到满足条件的两个排列:abc, abd。接下去将第 2 位换成 c,第 3 位上则分别写上 b, d,又得到满足条件的两个排列:acb, acd。以后把第 2 位上的字母换成 d,相应地又各可得到两个排列:adb, adc。至此以 a 为第 1 位的所有排列已经完整地写出了。当第 1 位分别换成 b, c, d 时,类似地可以写出满足条件的所有排列。

解 (1) abc, abd, acb, acd, adb, adc,
bac, bad, bca, bcd, bda, bdc,
cab, cad, cba, cbd, cda, cdb,
dab, dac, dba, dbc, dca, dcb。

(2) $abcd$, $abdc$, $acbd$, $acdb$, $adbc$, $adcb$,
$bacd$, $badc$, $bcad$, $bcda$, $bdac$, $bdca$,
$cabd$, $cadb$, $cbad$, $cbda$, $cdab$, $cdba$,
$dabc$, $dacb$, $dbac$, $dbca$, $dcab$, $dcba$。

3. 排列数公式

从 n 个不同元素中,任意取出 $m(m \leqslant n)$ 个不同元素的所有排列的个数叫做从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素的排列数,记作 P_n^m。特别地,当 $m = n$ 时,叫做 n 个不同元素的全排列数,记作 P_n^n,也可简记为 P_n。

$$\boldsymbol{P_n^m = n(n-1)\cdot \cdots \cdot (n-m+1)}。$$

特别地当 $m = n$ 时,因为 $n - m + 1$ 恰好等于 1,因此

$$\boldsymbol{P_n^n = n(n-1)\cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}。$$

$$\boldsymbol{P_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}}。$$

例 4 计算:(1) P_{12}^4;(2) P_6。

解 (1) $P_{12}^4 = 12 \times 11 \times 10 \times 9 = 11\,880$;

(2) $P_6 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$。

例 5 在全班 40 名学生中选取正、副班长各 1 名,共有多少种不同的选法?

分析 本例虽然没有明确指出“按一定顺序排成一列”,但由于正、副班长是两个不同的职务,同样是甲、乙两人当选,甲当正班长,乙当副班长与甲当副班长,乙当正班长应当被看作为两种不同的选法。因此本例是一个求排列数的问题。

解 共有

$$P_{40}^2 = 40 \times 39 = 1\,560$$

种不同的选法。

例 6 1 名老师和 6 名学生站成一排照相。如果老师排在正中,那么共有多少种不同的站法?

分析　本例是一个排列问题。可以让老师先站好，然后在老师左边和右边各有三个位置，共有六个位置，让 6 名学生站进去。于是问题转化为 6 名学生排在六个位置上，共有多少种站法。即转化为一个求全排列数的问题。

解　共有

$$P_6 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

种不同的站法。

例 7　用数字 0，1，2，3，4，5 可以组成多少个没有重复数字的五位数。

分析　数字 0 不能作为万位数，因此在确定万位数时，只能从 1，2，3，4，5 这 5 个数字中任意选取一个数。接下去确定其他四位数，由于在万位上已取了一个数，因此还剩下 5 个数，从这 5 个数中选取 4 个数，按一定顺序排列有 P_5^4 种不同的方法，利用乘法原理可求得本例的解。

解　共有

$$P_5^1 \cdot P_5^4 = 5 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 600$$

个没有重复数字的五位数。

说明　以下解法是错误的：因为数字 0 不能在万位，因此它只能在其余四个数位上，于是有 4 种不同的方法，由于 0 已排在某个数位上，还剩下四个数位，从 1，2，3，4，5 这 5 个数字中任意选取 4 个数字，有 P_5^4 种不同的方法，于是共有

$$P_4^1 \cdot P_5^4 = 4 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 480$$

种不同的方法。

发生上述错误的原因在于数字 0 有可能未被选中，将剩下的 1，2，3，4，5 这 5 个数字组成五位数，共有 P_5 种不同的方法。在上面的计算中遗漏了这些五位数，由此可见在计算较复杂的排列问题时，一定要防止出现遗漏或者重复的现象。

习　题　14.1

1. 将 $(a_1 + a_2 + a_3) \cdot (b_1 + b_2 + b_3) \cdot (c_1 + c_2)$ 展开，共能得到多少个项？用树图表示这些项。 $\frac{6\times3}{2\times1}\cdot 2$　$C_4^2 A_2^2$

2. 用 2，3，5，7 这 4 个数字，可以组成多少个不同的二位数。试写出这些二位数。

3. 某处有 4 幢六层楼房，每层有 5 套住房。该处最多可居住多少户住户？你能否应用树图的原理，对该处的每套住房进行编号，使人们能很方便地找到相应的住房？

4. 试写出用 1，2，3，4，5 这 5 个数字中的任意 3 个不同数字所组成的所有三位数。

5. 计算：$P_7^3 =$ __________。　0 6 0 0 0

6. 若 $P_8^n = 2P_7^4$，则 $n =$ __________。　1 2 3 4 5

7. 计算：$P_4 + P_3 + P_2 =$ __________。　5 4 3 2

8. 将 5 幅不同的画送给 5 个获奖者，每人一幅，共有多少种不同的送法？

9. 从 7 幅不同的画中挑选 5 幅，送给 5 个获奖者，每人一幅，共有多少种不同的送法？

10. 用 1，2，3，4，5 这 5 个数字可以组成多少个能被 5 整除的且没有重复数字的五位数？

$C_7^5 \cdot A_5^5$　$\frac{76543}{5432}$ = 5 4 3 2　42×60

11. 用 1，2，3，4，5 这 5 个数字可以组成多少个能被 5 整除的且没有重复数字的三位数？

12. 用 1，2，3，4，5，6 能够组成多少个能被 25 整除的且没有重复数字的六位数？

13. 用 1，2，3，4，5，6 能够组成多少个能被 25 整除的且没有重复数字的四位数？

14. 某班某天有 6 节课，可以排数学、语文、外语、物理、化学、政治、体育等 7 门课中的 6 门，如果体育课不能排在第一节，问该天的课程表共有多少种不同的排法？

15. 某次演出共有 7 个节目，其中有 3 个节目不能排在第一，该次演出的节目单可以有多少种不同的排法？

$C_4^1P_6^6$

16. 7 名同学排成一列拍照，若甲必须排在中间，乙和丙不能排在两端，问共有多少种不同的排法？

1 2 3 甲 4 5 6

$C_4^2P_2^2P_4^4$

二、组　　合

重点难点分析

$C_6^1P_6^5$

1. 组合

从 n 个不同元素中，任意选取 $m(m \leqslant n)$ 个不同的元素，并成一组，叫做从 **n 个不同元素中选取 m 个不同元素的组合。**

组合的定义强调所选出的 m 个元素并成一组，这时这 m 个元素完全处于同等的状态，它们之间不存在顺序问题，相互之间无需再作排列，而在排列的定义中所选出的 m 个元素要按照一定的顺序，排成一排。这 m 个元素的顺序稍作改变，便会产生一个新的排列。读者要用心体会排列与组合在概念上的差异，从而能正确区分排列问题与组合问题。

例 1　试确定下列各问题是排列问题还是组合问题：

(1) 从参加摇奖的 1 000 张票号中，抽取 4 张中奖的票号，共有多少种可能的抽取法？

(2) 从参加摇奖的 1 000 张票号中，抽取 4 张票号，分别得一等奖、二等奖、三等奖和四等奖，共有多少种可能的抽取法？

(3) 在有 12 支球队参加的足球赛中，采用主客场制进行比赛，求比赛的总场次。

(4) 在有 12 支球队参加的足球赛中，采用单循环赛，求比赛的总场次。

分析　在问题(1)中，从 1 000 张票号中，抽取 4 张作为中奖的票号，由于对 4 张中奖票号不再加以区分，因此这 4 张票号之间也就不存在顺序问题，因而实际上只是将 4 张票号并成一组，所以是组合问题。

在问题(2)中，从 1 000 张票号中，抽取 4 张分别作为一等、二等、三等、四等奖的中奖票号。同样是 4 张中奖票号，但只要中奖的等第作了变化，就应当被认为是不同的抽法，因而在所抽取的 4 张票号之间，存在着顺序关系，所以所求的问题为排列问题。

在问题(3)中，由于采取的是主客场制比赛，同样是甲、乙两支球队进行比赛，甲队为主场，乙队为客场与甲队为客场，乙队为主场应被看作为是两场不同的比赛。因此这里实际上也存在着顺序问题。所以所求的问题为排列问题。

在问题(4)中，由于采取的是单循环赛，无需区别主客场，因此在比赛的两队之间就不存在顺序问题，所以所求的问题为组合问题。

解　问题(1)和问题(4)为组合问题;问题(2)和问题(3)为排列问题。

说明　在区别排列问题与组合问题时,一般可将所选出的元素交换一下位置,看是否有区别。例如问题(1)中,甲、乙、丙、丁 4 张票号中奖与乙、甲、丙、丁 4 张票号中奖并无区别。而在问题(2)中,甲、乙、丙、丁 4 张票号分别中一、二、三、四等奖与乙、甲、丙、丁 4 张票号分别中一、二、三、四等奖,则是有区别的。

例 2　(1) 某学生从 A、B、C、D、E 5 本书中选 3 本书借阅,共有多少种不同的借法?

(2) 如果由甲、乙、丙 3 名学生借阅这 5 本书中的 3 本书,每人借阅 1 本,问共有多少种不同的借法?

分析　某学生从 5 本书中借阅 3 本书,与他所借的书的顺序无关。例如借阅的是 A、B、C 3 本书,改变它们的顺序,改为 B、A、C,并没有改变该学生的借书情况。因此这是组合问题。如果由 3 个人借阅 3 本书,每人限借一本,那么甲、乙、丙 3 人分别借 A、B、C 与他们分别借 B、A、C 应是两种不同的借法。显然这是一个与顺序有关的排列问题。

解　(1) 可能的借法有 ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE。共有 10 种不同的借法。

(2) 可能的借法数为

C_5^3　$\frac{5!}{(5-3)!3!}$

$$P_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60(\text{种})。$$

$\frac{543}{32}$

2. 组合数公式

从 n 个不同的元素中每次取出 $m(m \leqslant n)$ 个不同元素的所有组合的个数叫做从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素的组合数,并用符号 C_n^m 表示。

$$C_n^m = \frac{n(n-1) \cdot \cdots \cdot (n-m+1)}{m(m-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1},$$

C_{12}^8

或

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}。$$

$\frac{12!}{4!8!}$

例 3　假设你所在的班级有 40 名学生,从中选取 5 名学生作为班委委员。求:

(1) 你作为 5 名中的 1 名被选上的所有可能选法的种数;

(2) 你未被选上的所有可能选法的种数。

分析　在第(1)题中,如果你作为 1 名班委委员被选中,那么在其余的 39 名学生中只能再选 4 名。而在第(2)题中,由于你肯定未被选上,那么在其余的 39 名学生中应该再选 5 名班委成员。

解　(1) 符合条件的选法总数为

$$C_{39}^4 = \frac{39 \times 38 \times 37 \times 36}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 82\,251(\text{种})。$$

(2) 符合条件的选法总数为

$$C_{39}^5 = \frac{39 \times 38 \times 37 \times 36 \times 35}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 575\,757(\text{种})。$$

例 4 从 10 名男同学和 12 名女同学中分别选取 2 名同学,参加会议,

(1) 若参加的是同一个会议,共有多少种不同的选法?

(2) 若参加的是 4 个不同的会议,共有多少种不同的选法?

分析 解决问题(1)可以分为两个步骤:第一步从 10 名男同学中选取 2 名同学,共有 C_{10}^{2}种不同的方法。第二步从 12 名女同学中选取 2 名同学,共有 C_{12}^{2}种不同的方法。当且仅当这两步都完成了,参加会议的学生名单才算确定。利用乘法原理即可得到问题(1)的答案。

问题(2)比问题(1)稍为复杂。除了完成上述两步外,还需要有第三步,即对被挑选出的 4 个与会代表作分工,让他们分别参加 4 个不同的会议,易知完成第三步共有 P_4 种不同的方法,利用乘法原理可得到问题(2)的答案。

解 (1) 不同选法的总数为

$$C_{10}^{2}\cdot C_{12}^{2}=\frac{10\times 9}{2}\times\frac{12\times 11}{2}=2\,970(\text{种})。$$

(2) 不同选法的总数为

$\frac{5\ 4\ 12}{2\ 3\ 2}$

$$C_{10}^{2}\cdot C_{12}^{2}\cdot P_{4}=71\,280(\text{种})。$$

说明 从 10 名男同学和 12 名女同学中分别选 2 名代表,其选法的总数为 $C_{10}^{2}\cdot C_{12}^{2}$ 而不是 C_{22}^{4}。在 C_{22}^{4}中包含了 4 名代表全是男同学或全是女同学的选法,也包含了 3 名男同学,1 名女同学或 3 名女同学,1 名男同学的选法。要正确区分。

又若所选的 4 名同学参加 4 个不同的会议,应表示为 $C_{10}^{2}\cdot C_{12}^{2}\cdot P_{4}$,而不能写成 $P_{10}^{2}\cdot P_{12}^{2}$。后者实际上把 4 个会议分成两组,其中有 2 个会议指定由男同学参加,另 2 个会议指定由女同学参加。如若将本题的解写成 $C_{10}^{2}\cdot C_{12}^{2}\cdot C_{4}^{2}\cdot P_{2}\cdot P_{2}$。那也是可以的。这里 $C_{10}^{2}\cdot C_{12}^{2}$ 仍表示从 10 名男同学和 12 名女同学中各选 2 名代表的所有可能选法的总数。C_{4}^{2} 表示从 4 个会议中任意选取 2 个,让男(或女)同学参加的所有可能选法。P_2 表示选出的 2 名男同学参加 2 个被选出的会议,共有的可能的方法数。最后再乘一个 P_2 表示留下的 2 个会议由选出的 2 名女同学参加,可能有的方法数。这种解法把问题(2)分成了五个步骤,显得比较复杂,但也告诉我们,对于一个较复杂的问题,只要分步正确,并且计算也正确,往往可以有多种解法。

3. 用计算器计算排列数与组合数

计算排列数与组合数往往要进行多次乘法运算,借助于计算器可以迅速而又准确地得到答案。下面我们以 CASIO fx-82SX 型计算器为例,说明如何利用计算器计算排列数、全排列数和组合数。

在该型号的计算器中排列键标为 $\boxed{nPr}$,全排列键标为 $\boxed{x!}$,组合键标为 $\boxed{nCr}$,它们全被安放在第二功能区内,并分别与数字键 $\boxed{1}$,取出寄存器内的数值用键 $\boxed{\mathrm{MR}}$,数字键 $\boxed{2}$ 共用,分别被写在这些键的上方,用黄字标出。使用这些键之前必须先按计算器左上角的第二功能键 $\boxed{\mathrm{SHIFT}}$(亦用黄字标出)。其中排列键(或组合键)都要输入两个数:不同元素的个数n以及从中取出的不同元素个数r(相当于前面的m)。其步骤为:n(某个具体的数字)

$\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{nPr}$（或 $\boxed{nCr}$）r（另一个具体的数字）$\boxed{=}$。这时显示屏上就会显示答案。使用全排列键较为简单。其步骤为 x $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x!}$，这时显示屏也就会显示出答案。必须注意输入数 n, r, x 都应当为整数。否则显示屏会出现错误记号 $\boxed{\text{-E-}}$。在计算 P_n^r 与 C_n^r 时，该计算器允许输入的 n 应小于 10^{10}，在求 $x!$ 时，输入的 x 的最大值为 69。超出上述范围，计算器会显示 $\boxed{\text{-E-}}$。

例 5 用计算器计算：

(1) P_{15}^7；　(2) C_{40}^5；　(3) C_{40}^{35}；　(4) P_9。

解 (1) 15 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{nPr}$ 7 $\boxed{=}$　显示 32 432 400；

(2) 40 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{nCr}$ 5 $\boxed{=}$　显示 658 008；

(3) 40 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{nCr}$ 35 $\boxed{=}$　显示 658 008；

(4) 9 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x!}$　显示 362 880。

用上述键还可进行有关的运算。

例 6 用计算器计算：

(1) $\dfrac{P_{20}^4 - P_{16}^4}{C_{20}^4}$；　(2) $P_5 \cdot P_4 + P_5^4 \cdot P_4^3 + C_5^4 \cdot C_4^3$。

解 (1) $\boxed{[(\cdots}$ 20 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{nPr}$ 4 $\boxed{-}$ 16 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{nPr}$ 4 $\boxed{\cdots)]}$ $\boxed{\div}$ 20 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{nCr}$ 4 $\boxed{=}$　显示 14.984 520 12；

(2) 5 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x!}$ $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{x!}$ $\boxed{+}$ 5 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{nPr}$ 4 $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{nPr}$ 3 $\boxed{+}$ 5 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{nCr}$ 4 $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{nCr}$ 3 $\boxed{=}$　显示 5 780。

4. 组合数的性质

性质 1　$C_n^m = C_n^{n-m}$。

对于性质 1 也可作出如下解释：C_n^m 表示从 n 个不同元素中任意选取 m 个不同元素，组成一组的所有不同的组合的个数。由于在选取 m 个元素的同时，也留下了未被选取的 $n-m$ 个元素，因此也可认为是选取了 $n-m$ 个将被留下的元素。这两种选法只是考虑问题时的角度不一，对于 C_n^m 个不同选法中的每一个选法实际上也就确定了从 n 个元素中选取 $n-m$ 个元素的某一种选法，两者所有的选法的总数无疑是相等的。因而 $C_n^m = C_n^{n-m}$。

因为 C_n^n 表示从 n 个不同元素中任意取出 n 个不同的元素，组成一组，其所有选法的总数，所以 $C_n^n = 1$。因为 $C_n^n = C_n^{n-n} = C_n^0$，因此应规定 $C_n^0 = 1$。有了这个公式，当 m 比较大时，可应用性质 1 使计算显得简单些。

性质 2　$C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m (m \geqslant 1)$。

利用组合数的计算公式，容易证得上述性质。

性质 2 常可用来化简某些与组合数有关的算式。 $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$

例 7 计算：

(1) C_{50}^{47}； (2) $C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \cdots + C_{100}^2$。

分析 (1) 由于 $m = 47$ 比较大，可利用组合数的性质 1 予以化简。一般地当 $m > \frac{n}{2}$ 时有 $n - m < m$，可使用性质 1。

(2) 组合数的性质 2 的特征是其左边为两个组合数的和，这两个组合数右下角的数字相等，右上角的数字相差 1。右边为一个组合数，其右下角的数字比左边的大 1，其右上角的数字等于左边两个组合数右上角中的较大的一个数。本题中左边有多个组合数相加，可反复利用组合数的性质 2。但由于左边各项的右下角上的数字都不相同，因此不能直接利用性质 2。若将 C_2^2 换成 C_3^3（它们的值都等于 1），那么就具备了利用性质 2 的条件。

解 (1) $C_{50}^{47} = C_{50}^3 = \dfrac{50 \times 49 \times 48}{3 \times 2 \times 1} = 19\,600$。

(2) $C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \cdots + C_{100}^2$

$$= C_3^3 + C_3^2 + C_4^2 + \cdots + C_{100}^2 = (C_3^3 + C_3^2) + C_4^2 + \cdots + C_{100}^2$$

$$= (C_4^3 + C_4^2) + \cdots + C_{100}^2 = C_5^3 + C_5^2 + \cdots + C_{100}^2$$

$$= \cdots = C_{100}^3 + C_{100}^2 = C_{101}^3 = 166\,650。$$

男 2 女 3

男 3 女 2

5. 加法原理

如果某件事情可以由 k 类不同办法完成，在第一类办法中有 m_1 种不同方法完成；在第二类办法中有 m_2 种不同方法完成；……；在第 k 类办法中有 m_k 种不同方法完成，那么完成这件事情共有 $m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ 种方法。这个计数原理称为**加法原理**。

例 8 在 20 名男同学，15 名女同学中选出 5 名同学作为班委，若规定男女同学至少都有 2 名班委成员，问共有多少种不同的选法？

分析 由于已知男、女同学至少都有 2 名班委成员，而班委一共由 5 人组成，因此实际上有两种组建班委的方案：男同学 2 名，女同学 3 名以及男同学 3 名，女同学 2 名。这样在选班委时就有两类方案，分别求出两类方案各有多少种选法，再利用加法原理将它们相加。在每一类中由于既要选男同学，又要选女同学，因而要分为两个步骤。分别求出男同学有多少种不同的选法，女同学有多少种不同的选法，然后利用乘法原理，将两步的结果相乘。

解 5 名班委成员中，若男同学有 3 名，女同学有 2 名，那么共有 $C_{20}^3 \cdot C_{15}^2$ 种不同的选法。若男同学为 2 名，女同学为 3 名，则共有 $C_{20}^2 \cdot C_{15}^3$ 种不同的选法。

由加法原理，共有

$$C_{20}^3 \cdot C_{15}^2 + C_{20}^2 \cdot C_{15}^3 = 1\,140 \times 105 + 190 \times 455 = 206\,150$$

种不同的选法。

说明 不论是选出 3 名男同学，2 名女同学，还是选出 3 名女同学，2 名男同学，只要完成了其中的一种，就得到了一个符合题意的班委组成方法。因此班委中男、女同学的两种不同的人数分配方案是选班委的两类办法。应当用加法原理将这两类办法的不同的方法种数相加。只在 20 名男同学中选出 3(或 2)名，班委并未全部产生，同样只在 15 名女同学中选