文登教育集团课堂用书
聚骄公司全心专业设计

FOCUS
聚焦图书

考研数学

模拟考场15套

主编 陈文灯 教授
编审 潘正义 教授

2008版
（数学二）

全新修订，重磅出击，拿下2008版考研高分！

世界图书出版公司

聚骄公司全心
文灯教育集团

考研数学

模拟考场15套

主编 陈文灯 教授
编审 潘正义 教授

2008版
(数学二)

全新修订，重磅出击，拿下2008版考研高分！

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

数学模拟考场.2/陈文灯等编著.—2版.—北京:世界图书出版公司北京公司,2005.7(2007.8修订)

ISBN 978-7-5062-6065-7

Ⅰ.2.… Ⅱ.数… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第070936号

数学二·模拟考场15套

主　　编:陈文灯
责任编辑:世　华
装帧设计:郑宝芬

出　　版:世界图书出版公司北京公司
发　　行:世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街137号　邮编:100010　电话:010-88861708)
销　　售:各地新华书店
印　　刷:北京忠信诚胶印厂

开　　本:787×1092毫米　1/16
印　　张:14
字　　数:298千字
版　　次:2007年8月第4版　2007年8月第1次印刷

ISBN 978-7-5062-6065-7/G·147　　定价:16.80元

服务热线:010-88861708

致读者

众所周知，数学是当今所有学科中最基础，也是最重要的一门学科，任何人想在学业中有所发现、有所发明、有所创造就必须以数学为工具、为武器。“遥望考研通天道，欲向谁家借舟桥。历数月宫折桂者，全凭数学逞英豪”。数学分值150分，弄通弄透了，全拿；弄不明白，可能全瞎！但是现今有不少同学谈“数”色变，放弃原本钟爱的专业，改报不考数学的陌生专业，真是太可惜、太遗憾了。

数学果真那么难考吗？许多文科专业报考理工类、经济管理类专业的考研数学高分者告诉我们：只要有毅力、有恒心，夯实数学基础，通过题型掌握解题方法和技巧，数学是完全可以考好的。

数学没有考好的考生，**失分的原因主要有以下四个方面：**

✲ 对概念没有彻底搞清楚，一知半解，似是而非。这种做题就把握不准，容易犯“南辕北辙”的错误。

✲ 定理公式只记“形式”，不记“本质”，尤其是“前提条件”。这样似乎题也做完了，但是“劳而无功”。因为是在错误条件下得出的错误结论，是不会被认可的。

✲ 基本运算能力不强。现在的考研数学试卷有两大特点：一是大题量，二是大计算量。如果平时不多做练习，不多记一些解题方法和技巧，做题速度自然快不了，成绩当然是不可能上去的。

✲ 格式不规范，推理不严谨。数学推理非常严谨，环环相扣，来不得半点的“错位”和“突兀”，尤其是综合题（这类题的比重有逐年增加趋势）。有如一堆乱丝，如果理不出头绪，那就会越做越无头绪，越做越乱。

为了帮助考研同学多得分、少失分、考高分，我们编写了这15套难度与真题相当、强调基础、题型新颖丰富多样和技巧性较高的模拟训练试题。

如何使用,效率才能最高?高分学员的经验是:

(1)“复习指南”至少看完两遍之后,再做试卷可收“事半功倍”的效果;

(2)做完至少8套试卷后要归纳总结;

(3)根据自己做题的情况,查漏补缺,有针对性地找些题做做,发扬优势,弥补不足。

汗水脸上流,
胜券手中握。

祝同学们成功!

陈文灯

2007年8月

附:

2008年理工类大纲变化情况:

高数里明确了 $f''(x)>0$, $f(x)$ 的图形是凹的,当 $f''(x)<0$, $f(x)$ 的图形是凸的。

高数和线代的比例为:

2007:选择:8:2	填空:5:1	解答题:6:2
2008:选择:6:2	填空:5:1	解答题:7:2

目录

模拟考场（一）

考生注意:(1) 本试卷共23大题,满分150分.

(2) 根据国家标准,试卷中的正切函数,余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 $\tan x$、$\cot x$、$\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示.

一、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设函数 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续的单调增加的奇函数,

$F(x)=\int_0^x (2t-x)f(x-t)dt$,则 $F(x)$ 是

(A) 单调增加的非奇非偶函数. (B) 单调减少的非奇非偶函数.

(C) 单调增加的奇函数. (D) 单调减少的奇函数. 【 】

(2) 设在全平面上有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}<0$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}>0$,则在下列条件中使 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的是

(A) $x_1<x_2$, $y_1<y_2$. (B) $x_1<x_2$, $y_1>y_2$.

(C) $x_1>x_2$, $y_1<y_2$. (D) $x_1>x_2$, $y_1>y_2$. 【 C 】

(3) 设 $f(x,y)$ 为连续函数,则使 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)dxdy=4\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 成立的充分条件是

(A) $f(-x,-y)=f(x,y)$. (B) $f(-x,-y)=-f(x,y)$.

(C) $f(-x,y)=f(x,-y)=-f(x,y)$. (D) $f(-x,y)=f(x,-y)=f(x,y)$. 【 】

(4) 方程 $2^x=1+x^2$ 实根的个数是

(A) 一个. (B) 二个. (C) 三个. (D) 四个. 【 】

(5) 设 D 是由直线 $x=-1$, $y=1$ 与曲线 $y=x^3$ 围成的平面区域, D_1 是 D 在第一象限的部分,则 $I=\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)d\sigma$ 等于

(A) $2\iint\limits_{D_1} xy\,d\sigma$; (B) $2\iint\limits_{D_1} xy+\cos x\sin y\,d\sigma$;

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)d\sigma$ (D) 0. 【 】

(6) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶连续可导,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-f(x)}-1}{\int_0^x \ln\cos(x-t)dt}=-1$

(A) $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点.

(B) $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点.

(C) $(0,f(0))$ 为曲线 $f(x)$ 的拐点.

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(0,f(0))$ 也非曲线 $y=f(x)$ 的拐点.　　【　】

(7) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$,$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)$,记向量组 Ⅰ:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, Ⅱ:$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$,Ⅲ:$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$. 如果向量组 Ⅲ 线性相关,则

(A) 向量组 Ⅰ 线性相关.　　(B) 向量组 Ⅱ 线性相关.

(C) 向量组 Ⅰ 与 Ⅱ 都线性相关.　　(D) 向量组 Ⅰ 与 Ⅱ 至少有一个线性相关.

【　】

(8) 下列矩阵中不能相似于对角矩阵的是

(A) $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　(B) $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.　(C) $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　(D) $\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.　【　】

二、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上)

(9) 设 $a>0$,则 $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\ln\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{3}dx=$ ________.

(10) 设曲线 $x=\int_1^t\frac{\cos u}{u}du$, $y=\int_1^t\frac{\sin u}{u}du$,则自原点到此曲线右边第一条垂直于 x 轴的切线之间的弧长为________.

(11) 设 $y_1=e^x-e^{-x}\sin2x$,$y_2=e^{-x}\cos2x+e^x$ 是某二阶常系数非齐次线性方程的两个解,则该方程是________.

(12) $y''+4y=\cos2x$ 的通解为 $y=$ ________.

(13) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{ax}=\int_{-\infty}^{a}te^t\mathrm{d}t$, 则 $a=$ ________.

(14) 设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$. λ_1,λ_2 所对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,a,1)^T$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(a,a+1,1)^T$,则 λ_3 所对应的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_3=$ ________.

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤).

(15)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是可导的偶函数,它在 $x=0$ 的某邻域内满足关系式 $f(e^{x^2})-3f(1+\sin x^2)=2x^2+o(x^2)$,求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程.

(16)(**本题满分 11 分**)

设 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-1}{x}=a$,

已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^1 g(x^2t)\,\mathrm{d}t-1}{x^2}, & x<0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\\ \dfrac{a+b\cos x}{x^2}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,求 a、b 的值.

(17)(**本题满分 10 分**)

设 $f'(x)=\arcsin(x-1)^2$ 及 $f(0)=0$,求 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(18)(**本题满分 10 分**)

质量为 1g(克) 的质点受外力作直线运动,这外力和时间成正比,和运动速度成反比.在 $t = 10$ s(秒) 时,速度为 50cm/s,外力为 4g · cm/s^2,问从运动开始多长时间后速度为 100 cm/s..

(19)(**本题满分 11 分**)

设 $f(x)$,$g(x)$ 可微,且 $f'(x) = g(x)$,$g'(x) = -f(x)$,$f(0) = 0$,$f'(0) = 1$,证明:$f^2(x) + g^2(x) = 1$.

(20)(本题满分 10 分)

用变量代换 $x = \cos t(0 < t < \pi)$ 化简微分方程 $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$,并求其满足 $y\Big|_{x=0} = 1, y'\Big|_{x=0} = 2$ 的特解.

(21)(本题满分 10 分)

设 f 为连续函数,求证:$\iint\limits_D f(x - y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-A}^{A} f(t)(A - |t|)\,\mathrm{d}t$,

其中 D 为:$|x| \leqslant \dfrac{A}{2}, |y| \leqslant \dfrac{A}{2}$($A$ 为正常数).

(22)(本题满分 11 分)

已知二维非零向量 $\boldsymbol{x}$ 不是二阶方阵 $\mathbf{A}$ 的特征向量.

(1) 证明:$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 线性无关.

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - 6\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$,求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值并讨论 $\mathbf{A}$ 可否相似对角化.

(23)(本题满分 11 分)

若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1}, \boldsymbol{\alpha}_n]$ 的前 $n-1$ 个列向量线性相关,后 $n-1$ 个列向量线性无关,$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_n$,证明:

(1) 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 必有无穷多解;

(2) 若 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的任一解,则 $k_n = 1$.

模拟考场(二)

考生注意:(1) 本试卷共 23 大题,满分 150 分.

(2) 根据国家标准,试卷中的正切函数,余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 $\tan x$、$\cot x$、$\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示.

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,且 $f(x)$ 是偶函数,则

(A) $F(x)$ 一定是奇函数.

(B) $F(x)$ 一定是偶函数.

(C) $F(x)$ 一定是既非奇函数,又非偶函数.

(D) 只有当 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 时,$F(x)$ 是奇函数. 【　】

(2) 由 $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的图形在 $(0,1)$ 内

(A) 单调下降且向下凹.　(B) 单调下降且向上凹.

(C) 单调上升且向下凹.　(D) 单调上升且向上凹. 【　】

(3) 设 $f(x) = \begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$,则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处

(A) 不连续.　(B) 连续但不可导.

(C) 可导但 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 不连续.　(D) 可导且 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 连续. 【　】

(4) 当 $x \to 0$ 时,$\int_0^x (t - \sin t)\mathrm{d}t$ 是 $\frac{1}{2}x^3$ 的

(A) 高阶无穷小.　(B) 低阶无穷小.

(C) 同阶无穷小但不等价.　(D) 等价无穷小. 【　】

(5) 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数,且 $f'(1) = 0$,$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f''(x)}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{2}$,则

(A) $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(x)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $(1, f(1))$ 是曲线 $f(x)$ 的拐点坐标

(D) $f(1)$ 不是 $f(x)$ 的极大值,$(1, f(1))$ 也不是曲线 $f(x)$ 的拐点坐标. 【　】

(6) 设 $D: x^2 + y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0$;$D_1: x^2 + y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0$,则

(A) $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　(B) $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(C) $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　(D) $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 【　】

(7) 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$是四维非零列向量组，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，$\boldsymbol{A}^*$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，已知方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系为$k(1,0,2,0)^T$，则方程组$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系为

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$.【　】

(8) A,B为n阶矩阵，且A可逆，$A\sim B$，有以下三个命题

(Ⅰ) $A^{\mathrm{T}}\sim B^{\mathrm{T}}$　　(Ⅱ) $A^{-1}\sim B^{-1}$　　(Ⅲ) $AB\sim BA$

(A) 以上有一个命题正确.　　(B) 以上有二个命题正确.

(C) 三个命题都正确.　　(D) 三个命题都不正确.　　【　】

二、填空题(本题共6小题，每小题4分，满分24分. 把答案填在题中横线上)

(9) 函数$y=f(x)$在点$(1,0)$处有$\Delta y=\Delta x+o(\Delta x)$，则极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_1^{e^x}f(t)dt}{\ln(1+x^2)}=$______.

(10) 设函数f,g均可微，$z=f(xy,\ln x+g(xy))$，则$x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$______.

(11) 设$f'(\ln x)=1+x$，则$\int_0^{\frac{1}{2}}f'(2x)\mathrm{d}x=$______.

(12) 已知当$x\to0$时，$x^2-\int_0^{x^2}\cos t^2\mathrm{d}t$与$Ax^k$是等价无穷小，则$A=$______，$k=$___10___.

(13) 设$y(x)$是微分方程$y''+(x-1)y'+x^2y=\mathrm{e}^x$的满足$y(0)=0,y'(0)=1$的解. 则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{y(x)-x}{x^2}=$______.

(14) 设向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1)$，矩阵$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}$，且有$\boldsymbol{A}^3+p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{E}=0$，其中$\boldsymbol{E}$为单位矩阵，则微分方程$y'''+py'+qy=0$的通解为______.

三、解答题(本题共9小题，满分94分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤).

(15)(本题满分10分)

设函数$f(x,y)$可微，且$\dfrac{\partial f}{\partial x}=-f$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(0,y+\frac{1}{n})}{f(0,y)}\right)^n=e^{\cot y}$，$f(0,\dfrac{\pi}{2})=1$，求$f(x,y)$.

(16)(本题满分 11 分)

设$f(x)$在$[0,+\infty]$上连续,且$\int_0^1 f(x)dx < -\frac{1}{2}$,$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

证明:至少$\exists\xi\in(0,+\infty)$,使$f(\xi)+\xi=0$.

(17)(本题满分 10 分)

已知曲线过$(1,1)$点，如果把曲线上任一点P处的切线与y轴的交点记作Q，则以PQ为直径所做的圆都经过$F(1,0)$，求此曲线方程.

(18)(本题满分 10 分)

设$f(x)=a|\cos x|+b|\sin x|$在$x=-\frac{\pi}{3}$处取得极小值,并且$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[f(x)]^2\mathrm{d}x=2$.试求常数$a$和$b$.

(19)(本题满分 11 分)

设$f(0)=0,0<f'(x)<1$,比较$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2$与$\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$的大小,并证明你的结论.