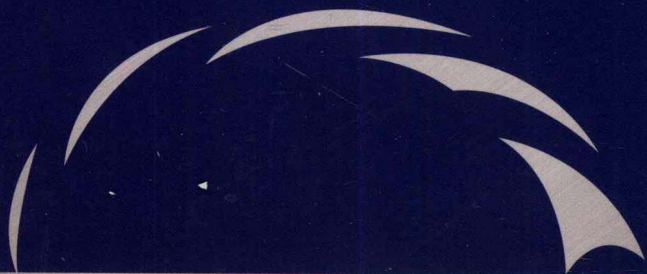


锯片非线性 振动与稳定性

母德强 著



科学出版社

锯片非线性振动与稳定性

母德强 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书系统地论述了锯片非线性振动理论、稳定性与控制技术的研究成果和矩阵摄动理论及其在锯片稳定性控制技术分析方面的应用。内容包括:锯片的非线性振动、锯片的振动与控制技术、结构振动分析的矩阵摄动法、圆锯片的最佳辊压适张度处理位置、锯夹对锯片动态特性与稳定性的影响和带锯片非线性振动分析的模态摄动法。其理论分析和计算结果对提高锯片切削稳定性和控制技术问题的深入研究,不但具有理论意义,而且对提高木材和大理石等加工领域的出材率 and 生产率具有重要的工程实用价值。

本书可供从事机械、航空、林业工程等方面的工程技术人员以及相关专业的研究生和教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

锯片非线性振动与稳定性/母德强著. —北京:科学出版社,2012

ISBN 978-7-03-032706-2

I. ①锯… II. ①母… III. ①锯片-非线性振动-研究②锯片-稳定性-研究 IV. ①TG717

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 227431 号

责任编辑:于俊杰 朱晓颖 / 责任校对:林青梅

责任印制:张克忠 / 封面设计:迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京市农林印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 3 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2012 年 3 月第一次印刷 印张:6 1/2

字数:130 000

定价:30.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

圆锯和带锯是木材加工的主要设备,减少锯切过程的锯口损失或锯片厚度、提高锯切速度、延长每次换锯片后的有效切削时间,就能达到提高出材率和生产率的目的;而降低刀具的横向振动、提高锯片的切削稳定性,不但能延长刀具的使用寿命、提高加工精度和表面质量,也有利于安全生产和降低噪声。统计资料表明:锯片的厚度或锯路跑偏减少 0.8mm,能使出材率提高 1%~3%。可见,使用具有良好稳定性的薄锯片进行高速切削,能取得巨大的经济效益和社会效益。

由于提高锯切速度和减少锯片的厚度,会使锯片的切削稳定性下降,因此对提高锯片切削稳定性理论和技术问题的深入研究,不但具有理论意义,而且对木材加工业及大理石加工业等具有重要的工程实用价值。

在国外,该领域的研究已有近百年的历史,取得了很大进展,部分研究成果已广泛地应用于生产实际。相比之下,国内在该研究领域还有一定差距。作者在博士学位论文中,利用导师陈塑寰教授的结构振动分析矩阵摄动相关理论对锯片的振动与稳定性等问题进行了深入研究,在此基础上,综合国内外有关文献资料撰写此书,以期望能对高等学校的研究生、教师以及从事锯片研究和设计的读者有所帮助,对推动我国锯片设计与制造业的发展起到一定的作用。

本书共六章。

第 1 章,分析锯片的非线性振动,建立中面力和大位移对锯片动态特性影响的运动方程式,给出求解锯片非线性振动的有限元方程。

第 2 章,系统地讨论锯片的振动、稳定性、临界转速的理论及相关控制技术。

第 3 章,简述结构振动实模态的矩阵摄动理论,包括孤立特征值和重特征值的摄动。

第 4 章,利用结构振动分析的矩阵摄动理论,分析锯片在离心力场、切削温度应力场共同作用下,辊压适张度处理对锯片动态特性的影响问题,并利用该理论与方法对最佳辊压适张度处理位置进行快速求解和模态谱分析。

第 5 章,利用矩阵摄动理论,分析锯夹的数量、刚度和布置位置对中心夹紧边缘自由的锯片最低临界转速的影响。此外,还分析了双锯夹的刚度和布置位置对带锯片动态特性和切削稳定性的影响。

第 6 章,系统地讨论结构非线性振动分析的模态摄动法及其在带锯片非线性动力响应分析中的应用。

借此书出版之际,向导师陈塑寰教授表示衷心的感谢。

由于作者水平有限,书中不妥之处在所难免,敬请广大读者批评指正。

作 者

2011 年 12 月

目 录

前言

第 1 章 锯片的非线性振动	1
1.1 引言	1
1.2 锯片的非线性振动分析	1
1.3 锯片的非线性振动方程	11
第 2 章 锯片的振动与控制技术	12
2.1 引言	12
2.2 锯片的稳定性及控制技术	12
2.2.1 锯片的振动分析	12
2.2.2 锯片的动态稳定性	13
2.2.3 锯片的结构	18
2.2.4 锯片的适张度处理	20
2.2.5 锯夹系统	23
2.2.6 反馈控制	24
第 3 章 结构振动分析的矩阵摄动法	25
3.1 引言	25
3.2 孤立特征值的摄动法	25
3.2.1 一阶摄动	26
3.2.2 二阶摄动	27
3.2.3 $C_i^{(1)}$ 和 $C_i^{(2)}$ 的确定	29
3.3 退化系统特征值的摄动法	30
3.4 矩阵摄动法的计算机实施	34
3.5 结构参数大修改的迭代摄动方法	43
3.6 结构振动模态设计灵敏度分析的摄动法	44
第 4 章 圆锯片的最佳辊压适张度处理位置	50
4.1 引言	50
4.2 问题的描述与计算公式	50
4.3 圆锯片面内应力场分析	60
4.3.1 圆锯片的离心应力场	61
4.3.2 切削温度引起的内应力场	62

4.4	最佳辊压适张度处理位置的计算分析	64
第5章	锯夹对锯片动态特性与稳定性的影响	69
5.1	引言	69
5.2	锯夹对圆锯片动态特性与稳定性的影响	69
5.2.1	问题的描述	69
5.2.2	问题的摄动求解方法	70
5.2.3	算例分析	71
5.3	锯夹位置对带锯动态特性的影响	80
5.3.1	问题的描述	80
5.3.2	问题的摄动求解方法与算例分析	81
第6章	带锯片非线性振动分析的模态摄动法	84
6.1	引言	84
6.2	非线性系统响应分析的模态摄动法	84
6.2.1	非线性运动方程的线性化处理	85
6.2.2	局部模态叠加法	85
6.2.3	非线性模态的迭代摄动求解	86
6.3	带锯片非线性振动问题的描述与计算	87
6.4	算例分析	91
参考文献		93

第 1 章 锯片的非线性振动

1.1 引言

即使实际应变可能很小,并且不超过结构材料的弹性极限,但由于锯片的横向振动幅度较大,为了分析锯片内应力场对锯片的振动特性的影响,平面变形和弯曲变形之间的耦合关系就不能忽略^[1-3]。因此,我们需要讨论锯片的非线性振动问题。

1.2 锯片的非线性振动分析

无论位移(或应变)是大还是小,总是必须满足内力和外力之间的平衡条件。因此,如果用有限个(节点)参数 $\mathbf{a}$ 给定了位移,可以写出

$$\psi(\mathbf{a}) = \int_V \bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (1-1)$$

式(1-1)中, ψ 表示广义内力与广义外力之和, $\mathbf{f}$ 表示系统载荷的等效节点力矢量,而 $\bar{\mathbf{B}}$ 由如下应变定义式确定

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\mathbf{B}} d\mathbf{a} \quad (1-2)$$

矩阵 $\bar{\mathbf{B}}$ 依赖于 $\mathbf{a}$ 。由于在固体力学的大变形问题中,格林应变张量可表示为线性和非线性两部分。因此, $\bar{\mathbf{B}}$ 可以写成

$$\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L(\mathbf{a}) \quad (1-3)$$

式(1-3)中, $\mathbf{B}_0$ 是与线性分析中所用相同的矩阵, $\mathbf{B}_L$ 是位移的线性函数。

如果应变是较小的,我们仍可写出一般的弹性关系

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (1-4)$$

取式(1-1)对于 $d\mathbf{a}$ 的适当变分,有

$$d\psi = \int_V d\bar{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V \bar{\mathbf{B}}^T d\boldsymbol{\sigma} dV = \mathbf{K}_T d\mathbf{a} \quad (1-5)$$

式(1-5)中, $\mathbf{K}_T$ 是系统在某时刻的切线刚度矩阵。

利用式(1-2)和式(1-4)可以得到

$$d\sigma = D d\varepsilon = D \bar{B} da \quad (1-6)$$

如果式(1-3)成立, 则有

$$d\bar{B} = dB_L \quad (1-7)$$

因此, 式(1-5)可变成

$$d\psi = \int_V d\bar{B}^T \sigma dV + \bar{K} da \quad (1-8)$$

$$\bar{K} = \int_V \bar{B}^T D \bar{B} dV = K_0 + K_L \quad (1-9)$$

这里 K_0 代表通常的小位移刚度矩阵, 即

$$K_0 = \int_V B_0^T D B_0 dV \quad (1-10)$$

矩阵 K_L 是由大位移引起的, 故称之为大位移矩阵或初位移矩阵, 它可由下式给出:

$$K_L = \int_V (B_0^T D B_L + B_L^T D B_L + B_L^T D B_0) dV \quad (1-11)$$

式(1-8)右端第一项一般可写成

$$\int_V dB_L^T \sigma dV \equiv K_\sigma da \quad (1-12)$$

式(1-12)中, K_σ 是依赖于应力水平的对称矩阵, 可称之为初应力矩阵或几何刚度矩阵。

因此, 系统在某时刻的切线刚度矩阵 K_T 可写成

$$K_T = K_0 + K_\sigma + K_L \quad (1-13)$$

在利用有限元分析时, 对于不同的单元, K_0 、 K_σ 及 K_L 会有不同的形式。

对于大挠度, 当平板承受横向载荷时, 板中的内力除了弯曲内力外, 还有薄膜内力, 如图 1-1 所示。

如果 Oxy 平面和平板中面重合, 那么平板应变可以用中面位移来描述。令 $\{\epsilon\}$ 表示中面应变和曲率列阵, $\{\sigma\}$ 表示薄膜内力和弯曲内力列阵, 于是有

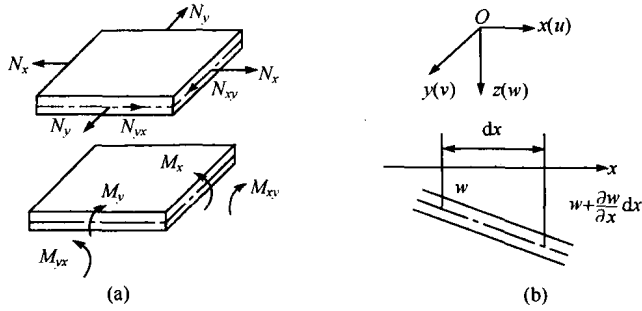


图 1-1 平板的内力和挠度

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_p \\ \epsilon_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_y & \epsilon_{xy} & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^T \quad (1-14)$$

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_p \\ \sigma_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} & M_x & M_y & M_{xy} \end{bmatrix}^T \quad (1-15)$$

式中, p 和 b 分别表示中面和弯曲。

考虑平板挠度 w 对于中面线段在 x 和 y 方向上产生的附加伸长和附加角变形时, 应变可以写成

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1-16)$$

这样, 式(1-14)可以写成

$$\begin{aligned} \{\epsilon\} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^T \\ &\quad + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 & \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{Bmatrix} \epsilon_p^0 \\ \epsilon_b^0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \epsilon_p^L \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1-17)$$

式(1-17)右端第一项表示线性应变, 第二项表示非线性应变。

如果锯片材料仍是弹性的,于是平板弹性矩阵 $\mathbf{D}$ 可由平面应力弹性矩阵 $\mathbf{D}^p$ 和弯曲弹性矩阵 $\mathbf{D}^b$ 所组成,即

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^p & 0 \\ 0 & \mathbf{D}^b \end{bmatrix} \quad (1-18)$$

式中

$$\mathbf{D}^p = \frac{E}{1-\mu} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (1-19)$$

$$\mathbf{D}^b = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (1-20)$$

节点位移列阵可以区分为平面的 $\{\delta_i^p\}$ 和弯曲的 $\{\delta_i^b\}$ 两类,即

$$\{\delta_i\} = [\{\delta_i^p\}^T \quad \{\delta_i^b\}^T]^T \quad (1-21)$$

式中

$$\{\delta_i^p\} = [u_i \quad v_i]^T, \quad \{\delta_i^b\} = \left[w_i \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \right]^T \quad (1-22)$$

同样,形函数可写成

$$\{N_i\} = \begin{bmatrix} N_i^p & 0 \\ 0 & N_i^b \end{bmatrix} \quad (1-23)$$

在上述公式中,除了非线性应变项 $\{\epsilon_p^L\}$ 以外,其余的和标准线性分析完全相同。

在公式(1-3)中, $\mathbf{B}_0$ 和 $\mathbf{B}_L$ 可分别写成

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0^p & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_0^b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{B}_L^b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1-24)$$

式中, $\mathbf{B}_0^p$ 和 $\mathbf{B}_0^b$ 就是平面元素和弯曲元素按线性分析所得到的标准矩阵,而 $\mathbf{B}_L^b$ 可以由 $\{\epsilon_p^L\}$ 通过结点弯曲位移列阵 $\{\delta^b\}$ 来确定。

在式(1-17)中,应变分量的非线性部分可以写成

$$\{\epsilon_p^L\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} [C] \{\theta\} \quad (1-25)$$

式中, w 的一阶导数可以用结点弯曲位移列阵 $\{\delta^b\}^e$ 来表示

$$\{\theta\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = [G] \{\delta^b\}^e \quad (1-26)$$

在式(1-26)中,矩阵 $[G]$ 完全是由单元坐标所决定,可由下式求得

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i^b}{\partial x} & \frac{\partial N_j^b}{\partial x} & \dots \\ \frac{\partial N_i^b}{\partial y} & \frac{\partial N_j^b}{\partial y} & \dots \end{bmatrix} \quad (1-27)$$

对方程(1-25)取微分,经整理可得

$$d\{\epsilon_p^L\} = \frac{1}{2} d[C] \{\theta\} + \frac{1}{2} [C] d\{\theta\} = [C] d\{\theta\} = [C][G] d\{\delta^b\}^e \quad (1-28)$$

所以

$$B_L^b = [C][G] \quad (1-29)$$

式中,矩阵 $[C]$ 可从式(1-25)中求得。

对于线性小变形的刚度矩阵为

$$K_0 = \begin{bmatrix} K_0^p & 0 \\ 0 & K_0^b \end{bmatrix} \quad (1-30)$$

式(1-30)中, K_0^p 和 K_0^b 分别是薄板平面应力问题和弯曲问题的线性刚度矩阵。

把式(1-24)代入式(1-11),可以得到大位移矩阵

$$\mathbf{K}_L = \int_V \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{B}_0^{bT} \mathbf{D}^p \mathbf{B}_L^b \\ \mathbf{B}_0^{bT} \mathbf{D}^p \mathbf{B}_L^b & \mathbf{B}_L^{bT} \mathbf{D}^p \mathbf{B}_L^b \end{bmatrix} dV \quad (1-31)$$

由式(1-24)可得

$$d\mathbf{B}_L^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d\mathbf{B}_L^{bT} & 0 \end{bmatrix} \quad (1-32)$$

把式(1-32)代入式(1-12)中,并利用式(1-15)和式(1-28),可得

$$\mathbf{K}_\sigma d\{\delta^b\}^\epsilon = \int_V \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ [\mathbf{G}]^T d[\mathbf{C}]^T & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{array} \right\} dV \quad (1-33)$$

因为

$$d[\mathbf{C}]^T \left\{ \begin{array}{c} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} d\{\theta\} = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} d\{\delta^b\}^\epsilon \quad (1-34)$$

最后可得

$$\mathbf{K}_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_\sigma^b \end{bmatrix} \quad (1-35)$$

式(1-35)中, $\mathbf{K}_\sigma^b$ 是薄板弯曲问题的几何刚度矩阵。

$\mathbf{K}_\sigma^b$ 可通过虚位移原理求得。设作用在板中面的薄膜力列阵是

$$\{\sigma^p\} = [\sigma_x^p \quad \sigma_y^p \quad \tau_{xy}^p]^T \quad (1-36)$$

它的作用方向如图 1-2 所示。根据板的弯曲理论,它的弯曲应变 ϵ 和挠度 w 的关系为

$$\{\epsilon^b\} = \left\{ \begin{array}{c} \epsilon_x^b \\ \epsilon_y^b \\ \gamma_{xy}^b \end{array} \right\} = -z \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^T \quad (1-37)$$

若记

$$\{\tilde{\epsilon}\} = -z \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^T \quad (1-38)$$

利用应力和应变关系,可得板弯曲应力列阵

$$\{\sigma^b\} = [D] \{\epsilon^b\} = -z [D] \{\tilde{\epsilon}\} \quad (1-39)$$

式(1-39)中, $[D]$ 是平面应力状态下的弹性矩阵,和式(1-19)相同。因此,板内存在薄膜力时,总的应力是

$$\{\sigma\} = \{\sigma^p\} + \{\sigma^b\} = \{\sigma^p\} - z [D] \{\tilde{\epsilon}\} \quad (1-40)$$

设板微元在弯曲变形后的平衡位置 ABC 附近有一任意微小的虚挠度 w^* , 如图 1-3 所示。

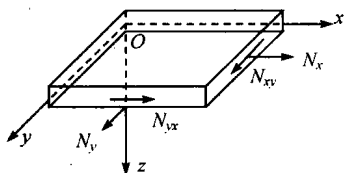


图 1-2 板的内薄膜力

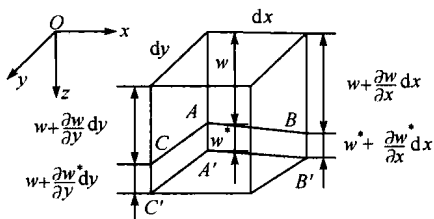


图 1-3 板微元的挠度和虚挠度

由于虚挠度引起板纤维的虚应变包括两部分:薄膜虚应变和弯曲虚应变。弯曲虚应变可写成

$$\{\epsilon^{*b}\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^{*b} \\ \epsilon_y^{*b} \\ \gamma_{xy}^{*b} \end{Bmatrix} = -z \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} & 2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^T \quad (1-41)$$

或可写成

$$\{\epsilon^{*b}\} = -z \{\tilde{\epsilon}^*\} \quad (1-42)$$

$$\{\tilde{\epsilon}^*\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} & 2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}^T \quad (1-43)$$

从图 1-3 可以看出, x 方向的薄膜虚应变可以写成

$$\epsilon_x^{*p} = \frac{A'B' - AB}{AB} \quad (1-44)$$

$$\begin{aligned}
 A'B' &= \sqrt{1 + \left[\frac{\partial}{\partial x} (w + w^*) \right]^2} dx \\
 &\approx dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w^*}{\partial x} \right)^2 dx
 \end{aligned} \quad (1-45)$$

$$AB = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} dx \approx dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (1-46)$$

将式(1-45)和式(1-46)代入式(1-44),并略去高阶微量,可得

$$\epsilon_x^{*p} \approx \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w^*}{\partial x} \quad (1-47)$$

同理可得

$$\epsilon_y^{*p} \approx \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w^*}{\partial y} \quad (1-48)$$

对于薄膜剪切虚应变 γ_{xy}^{*p} ,它是挠度 $w + w^*$ 以及挠度 w 所引起的剪切应变之差。由挠度 w 产生的薄膜剪切应变 $\gamma_{xy}^p(w)$,根据定义和图 1-3,有

$$\gamma_{xy}^p \approx \cos \beta = \frac{\mathbf{AB} \cdot \mathbf{AC}}{|\mathbf{AB}| |\mathbf{AC}|} \quad (1-49)$$

$$\mathbf{AB} = \left(\mathbf{i} + \frac{\partial w}{\partial x} \mathbf{k} \right) dx \quad (1-50)$$

$$\mathbf{AC} = \left(\mathbf{j} + \frac{\partial w}{\partial y} \mathbf{k} \right) dy \quad (1-51)$$

式(1-50)和式(1-51)中, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 分别为 x, y, z 方向的单位矢量。将式(1-50)、式(1-51)代入式(1-49),并略去高阶微量,得到

$$\gamma_{xy}^p(w) \approx \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1-52)$$

同理可得,由挠度 $w + w^*$ 产生的薄膜剪切应变为

$$\gamma_{xy}^p(w + w^*) = \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w^*}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial y} \right) \quad (1-53)$$

将式(1-53)减去式(1-52),便得到板的薄膜剪切虚应变

$$\gamma_{xy}^{*p} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w^*}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w^*}{\partial x} \quad (1-54)$$

因此,由于平板虚挠度 w^* 引起的总虚应变是

$$\{\epsilon^*\} = \{\epsilon^{*p}\} + \{\epsilon^{*b}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w^*}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w^*}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w^*}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w^*}{\partial x} \end{Bmatrix} z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (1-55)$$

记 W^* 为作用在板上的载荷所做的虚功,根据虚位移原理有

$$W^* = \int_V \{\epsilon^*\}^T \{\sigma\} dV \quad (1-56)$$

将式(1-40)和式(1-55)代入式(1-56),并注意到

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} z dz &= 0, \quad \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{h^3}{12} \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x^p dz &= N_x, \quad \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y^p dz = N_y \\ \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}^p dz &= N_{xy} \end{aligned}$$

注意:这里 N_x 、 N_y 、 N_{xy} 是板中面单位长度上的薄膜法向力和薄膜剪切力。于是可得式(1-57)

$$W^* = \frac{h^3}{12} \iint \{\tilde{\epsilon}^*\}^T [D] \{\tilde{\epsilon}\} dx dy + \iint \begin{bmatrix} \frac{\partial w^*}{\partial x} & \frac{\partial w^*}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} dx dy \quad (1-57)$$

式(1-57)中的第一个积分是板弯曲时弯曲应力做的虚功,第二个积分的每一项表示由薄膜力引起的对应于转动自由度的广义力在虚角上做的功。

现在来完成有限单元公式的推导。单元中的挠度 w 用单元结点位移 $\{\delta\}^e$ 表示为

$$w = [N] \{\delta\}^e \quad (1-58)$$

式中, $[N]$ 为形函数矩阵。然后计算

$$\{\tilde{\epsilon}\} = [B] \{\delta\}^e \quad (1-59)$$

以及

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = [G] \{\delta\}^e \quad (1-60)$$

将式(1-59)和式(1-60)代入式(1-57),得到

$$\begin{aligned} W^* = & (\{\delta^*\}^e)^T \left(\frac{h^3}{12} \iint [B]^T [D] [B] dx dy \right. \\ & \left. + \iint [G]^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} [G] dx dy \right) \{\delta\}^e \end{aligned} \quad (1-61)$$

式(1-61)中的 W^* 是单元 e 上所有外力的等效结点力列阵因虚位移所做的功,如果用 $\{R\}^e$ 表示等效结点力矢量,那么 W^* 可以写成

$$W^* = (\{\delta^*\}^e)^T \{R\}^e \quad (1-62)$$

特别值得注意的是,等效结点力 $\{R\}^e$ 所对应的广义位移 $\{\delta\}^e$ 是板的弯曲位移,因此 $\{R\}^e$ 是只包含单元结点的横向广义力。把式(1-61)代入式(1-62),并考虑虚位移 $\{\delta^*\}^e$ 的任意性,便得到单元的平衡方程式

$$\left[\frac{h^3}{12} \iint [B]^T [D] [B] dx dy + \iint [G]^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} [G] dx dy \right] \{\delta\}^e = \{R\}^e \quad (1-63)$$

式(1-63)可以写成

$$(\mathbf{K}_0^b + \mathbf{K}_\sigma^b) \{\delta\}^e = \{R\}^e \quad (1-64)$$

式(1-64)中, $\mathbf{K}_0^b$ 就是熟知的板弯曲的单元刚度矩阵, $\mathbf{K}_\sigma^b$ 是板单元的几何刚度矩阵。可以写成

$$\mathbf{K}_0^b = \frac{h^3}{12} \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (1-65)$$

$$\mathbf{K}_\sigma^b = \int_V [G]^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} [G] dV \quad (1-66)$$