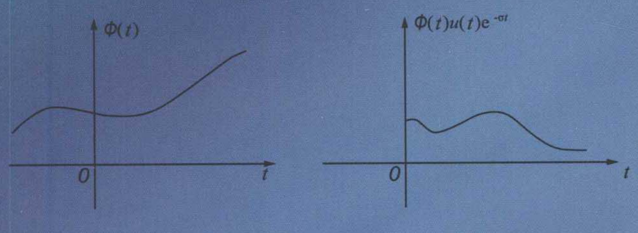
工科数学公共课教材

数学物理方法

上海交通大学数学系 编



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书作为“工程数学”系列课程教材，包含“复变函数”、“数学物理方程”、“积分变换”三篇. 全书分 12 章，内容包括：复数和复变函数；解析函数；复变函数的积分；解析函数的级数展开；留数及其应用；保角映射；数学物理方程的导出及定解问题；分离变量法；初值问题；傅里叶变换；拉普拉斯变换；积分变换的应用.

本书在编写上力求由浅入深，对重点知识注重理论导出和方法应用，特别加强了数学物理方法在实际中应用的实例.

本书可供各高等院校理工科专业作教材. 另配有 PPT 教案供教师使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法／上海交通大学数学系编. —上海：上海交通大学出版社，2011
ISBN 978-7-313-07614-4

Ⅰ.①数… Ⅱ.①上… Ⅲ.①数学物理方法 Ⅳ.①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 152278 号

数学物理方法
上海交通大学数学系 编
上海交通大学出版社出版发行
（上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030）
电话：64071208 出版人：韩建民
上海交大印务有限公司印刷 全国新华书店经销
开本：787 mm×960 mm 1/16 印张：22.25 字数：415 千字
2011 年 8 月第 1 版 2011 年 8 月第 1 次印刷
印数：1～3 030
ISBN 978-7-313-07614-4/O 定价：38.00 元

版权所有 侵权必究

告读者：如发现本书有质量问题请与印刷厂质量科联系
联系电话：021-54742979

前　言

"工程数学"系列课程涵盖《复变函数》、《数学物理方程》和《积分变换》，是大学本科数学教学中继《高等数学》、《线性代数》和《概率论与数理统计》等课程后，为各理工科专业开展后续教育而开设的课程."工程数学"强调理论与实际结合，它是数学与其他学科之间的一座桥梁.

近年来，大学基础课程的内容和教学有了很大的变化.根据课程改革的要求，原工程数学系列课程被整合为《数学物理方法》课程，教学大纲与教学要求有较大的改动，本书就是为适应此改革，在原工程数学系列丛书《复变函数》、《特殊函数与数学物理方程》和《积分变换》的基础上编写的.

本书力图在教学内容的组合及教学重点的选择方面有新的突破，并体现以下特色：

(1) 优化调整原教材的部分内容，编排体系上突破原有框架.如：将积分变换应用独立成章，详细介绍其在求解常微分方程的定解问题及数学物理方程定解问题中的应用.

(2) 课程内容按照由浅入深、由具体到抽象、由特殊到一般的原则来组织，对重点知识注重理论导出、方法的应用，强调其应用条件.

(3) 既保持了数学教材传统的严谨，又针对数学物理方法强调计算与应用的特点，将数学训练与生动的物理意义相结合，加强计算，强调应用.在保证数学知识严密性的基础上，减少部分繁琐的理论推导.

本书中加 * 的章节，可供教师在教学上选用。

本书由上海交通大学数学系组织编写，第 1 篇由贺才兴和王健编写；第 2 篇由王纪林编写；第 3 篇由王健编写.本书配有 PPT 教案，可供教师参考.

编　者

2011 年 5 月

目　录

第1篇　复变函数

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 2 篇 数学物理方程

第3篇 积分变换

第 1 篇　复变函数

第 1 章　复数和复变函数

16 世纪中叶，G. Cardano(1501—1576)在研究一元二次方程时引进了复数的概念. 复变函数是以研究复变量之间的相互依赖关系为主要任务的一门数学课程. 它与高等数学中的许多概念、理论和方法有相似之处，但又有其固有的特性. 本章主要介绍复数的概念、性质及运算，然后引入平面点集、复变函数以及复球面等概念.

1.1　复数及其表示

1.1.1　复数的定义

定义 1.1　形如

$$z = x + \mathrm{i}y,\quad x,\ y \in \mathbf{R} \tag{1-1}$$

的数称为复数，其中 $\mathbf{R}$ 表示实数集合 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ 称为虚数单位. 称实数 x、y 分别为复数 z 的实部和虚部，常记为

$$x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z. \tag{1-2}$$

当实部 $x = 0$ 时，称 $z = \mathrm{i}y\ (y \neq 0)$ 为纯虚数；当虚部 $y = 0$ 时，$z = x$ 就是实数. 因此，全体实数是复数的一部分，复数是实数的推广. 特别，$0 + \mathrm{i}0 = 0$.

两个复数之间不能比较大小，但可以定义相等. 两个复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 及 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 相等，是指它们的实部与实部相等，虚部与虚部相等，即 $x_1 + \mathrm{i}y_1 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 当且仅当 $x_1 = x_2$，$y_1 = y_2$.

1.1.2　复数的表示

1.1.2.1　代数表示

由式(1-1)所给出的即为复数的代数表示.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

1.1.2.2 几何表示

由复数的定义可知，复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 与有序数对 (x, y) 建立了一一对应关系. 在平面上建立直角坐标系 xOy，用 xOy 平面上的点 $P(x, y)$ 表示复数 z，这样复数与平面上的点一一对应，称这样的平面为复平面. 若用向量 $\overrightarrow{OP}$ 表示复数 z，如图 1-1 所示. 该向量在 x 轴上的投影为 $x = \mathrm{Re}\,z$，在 y 轴上的投影为 $y = \mathrm{Im}\,z$，这样复数与平面上的向量也一一对应.

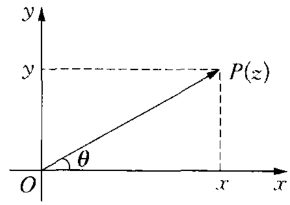


图 1-1　复数的几何表示

向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度称为复数的模，记为 $|z|$，从而有

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1-3}$$

显然

$$|x| \leqslant |z|,\ |y| \leqslant |z|,\ |z| \leqslant |x| + |y|. \tag{1-4}$$

向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 x 轴正向的夹角 θ 称为复数 z 的辐角，记为 $\theta = \mathrm{Arg}\,z$. 由图 1-1 知：

$$\begin{cases} x = |z|\cos\theta,\ y = |z|\sin\theta, \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}. \end{cases} \tag{1-5}$$

若 θ 为 z 的辐角，则 $\theta + 2n\pi$ 也是其辐角，其中 $n \in \mathbf{Z}$，$\mathbf{Z}$ 为整数集. 因此，任何一个复数均有无穷多个辐角. 若限制 $-\pi < \theta \leqslant \pi$，所得的单值分支称为 $\mathrm{Arg}\,z$ 的主值，记为 $\arg z$.

当 $z = 0$ 时，辐角没有定义；当 $z \neq 0$ 时，其辐角主值 $\arg z$ 可由下式求得：

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & x > 0,\ y \geqslant 0 \text{ 或 } y \leqslant 0, \\ \pi + \arctan\dfrac{y}{x}, & x < 0,\ y \geqslant 0, \\ -\pi + \arctan\dfrac{y}{x}, & x < 0,\ y < 0. \end{cases} \tag{1-6}$$

1.1.2.3 复数的三角表示与指数表示

利用直角坐标与极坐标之间的关系：$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，可将式(1-1)改写为

$$z = r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta), \tag{1-7}$$

其中，$r=|z|$，$\theta=\mathrm{Arg}\,z$. 称式(1-7)为复数 z 的三角表示.

利用欧拉公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta, \tag{1-8}$$

式(1-7)又可写为

$$z=re^{i\theta}. \tag{1-9}$$

上式称为复数 z 的指数表示.

例 1.1 已知平面上流体在某点 P 处的速度为 $v=2-2i$，求其大小和方向.

解 $|v|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$；$\arg v=\arctan\dfrac{-2}{2}=-\dfrac{\pi}{4}$.

例 1.2 试分别将复数 $z_1=-1+\sqrt{3}i$ 和复数 $z_2=1+\cos\theta+i\sin\theta$ $(-\pi<\theta\leqslant\pi)$ 化为三角表示式和指数表示式.

解 由于

$$r=|z_1|=2,\ \arg z_1=\arctan(-\sqrt{3})=\frac{2}{3}\pi,$$

从而

$$z_1=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right),\ z_1=2e^{\frac{2}{3}\pi}.$$

类似地

$$r=|z_2|=\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}=2\cos\frac{\theta}{2},$$

$$\arg z_2=\arctan\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\arctan\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\theta}{2},$$

$$z_2=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right),\ z_2=2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

1.2 复数的运算及其几何意义

由于实数是复数的特例，因此复数运算的一个基本要求是：复数运算的法则施行于实数时，能够和实数运算的结果相符合，同时也要求复数运算能够满足实数运算的一般定律.

1.2.1 复数的四则运算

定义 1.2 设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$，$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，复数的加、减、乘、除四则运算定义如下：

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2), \tag{1-10}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1), \tag{1-11}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2},\ z_2 \neq 0. \tag{1-12}$$

由定义 1.2 知，复数的四则运算可理解为利用 $\mathrm{i}^2 = -1$ 和实数的四则运算所得.

利用定义 1.2 容易验证，复数的加法满足交换律与结合律，且减法是加法的逆运算；复数的乘法满足交换律与结合律，且满足乘法对于加法的分配律.

全体复数并引进上述运算后就称为复数域. 在复数域内，我们熟知的一切代数恒等式，例如：

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b),$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2),$$

等等仍然成立. 实数域和复数域都是代数学中所研究的"域"的实例.

注 由于一个复数与平面上的一个向量所对应，因此，复数的加法运算与平面上向量加法运算一致. 从而以下两个不等式成立.

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|,\ |z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||.$$

下面我们利用复数的三角表示式来讨论复数的乘法与除法，并导出复数积与商的模和辐角公式.

设 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$，利用等式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = (\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1 + \theta_2)}$. 可得

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1 + \theta_2)}. \tag{1-13}$$

于是有如下等式：

$$\begin{cases} |z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \\ \mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2). \end{cases} \tag{1-14}$$

式(1-14)表明：两个复数乘积的模等于它们模的乘积，两个复数乘积的辐角等于

它们辐角的和. 值得注意的是，由于辐角的多值性，式(1-14)的第二式应理解为对于左端 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)$ 的任一值，必有由右端 $\mathrm{Arg}\,z_1$ 与 $\arg z_2$ 的各一值相加得出的和与之对应；反之亦然.

由式(1-14)可得复数乘法的几何意义，即：z_1z_2 所对应的向量是把 z_1 所对应的向量伸缩 $r_2=|z_2|$ 倍，然后再旋转一个角度 $\theta_2=\arg z_2$ 所得(见图 1-2).

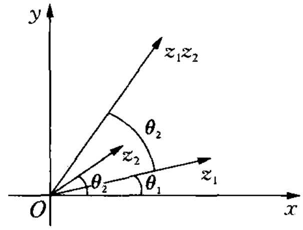


图 1-2　复数乘法几何意义

类似地，可导出两复数的商的模与辐角公式. 设 $z_2\neq0$，则有

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)},$$

于是

$$\begin{cases}\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|},\\ \mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}(z_1)-\mathrm{Arg}(z_2),\ z_2\neq0.\end{cases}\tag{1-15}$$

式(1-15)表明：两个复数商的模等于它们模的商；两个复数商的辐角等于分子与分母的辐角的差. 而 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 的几何意义是：将 z_1 的辐角按顺时针方向旋转一个角度 $\arg z_2$，再将 z_1 的模伸缩 $\dfrac{1}{|z_2|}$ 倍.

注　当将辐角换成其主值时，则以下公式不一定成立.

$$\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2,$$

$$\arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2.$$

1.2.2　复数的乘方和方根

设 $z_k=r_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}$，$k=1,2,\cdots,n$，利用数学归纳法可得 n 个复数相乘的公式：

$$z_1z_2\cdots z_n=r_1r_2\cdots r_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}.\tag{1-16}$$

当 $z_1=z_2=\cdots=z_n=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 时，得到复数的乘方公式

$$z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta). \tag{1-17}$$

特别的，当 $r = 1$ 时，则得到著名的棣莫佛(De Moivre)公式：

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta. \tag{1-18}$$

例 1.3 计算 $(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})^6$.

解 因为

$$-1+\sqrt{3}\mathrm{i} = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi = \mathrm{i}\sin\frac{2}{3}\pi\right),$$

所以

$$\begin{aligned}(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})^6 &= \left[2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{2}{3}\pi\right)\right]^6 \\ &= 2^6(\cos 4\pi + \mathrm{i}\sin 4\pi) = 64.\end{aligned}$$

设 n 为正整数，若复数 z 和 w 满足 $w^n = z$，则称复数 w 为复数 z 的 n 次方根，记为

$$w = \sqrt[n]{z}.$$

为了得到 $\sqrt[n]{z}$ 的具体表达式，令 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $w = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，则由复数的乘方公式可得

$$\rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

从而得两个方程

$$\rho^n = r,\ n\varphi = \theta + 2k\pi,$$

解得

$$\rho = \sqrt[n]{r},\ \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

从形式上看，k 可以取 $0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$，但由于 $\cos\varphi$ 和 $\sin\varphi$ 均以 2π 为周期，所以当 $k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ 时，可以得到 w 的 n 个不同的值，而当 k 取其他整数时，这些值又重复出现. 因此，z 的 n 次方根为

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}},\ k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1. \tag{1-19}$$

由于复数 $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个不同值都具有相同的模 $\sqrt[n]{|z|}$，且对应相邻两个 k 值的方根

的辐角均相差$\frac{2\pi}{n}$,所以就几何意义而言,对应$\sqrt[n]{z}$的n个点即为以原点为心,$\sqrt[n]{|z|}$为半径的内接正n边形的n个顶点.

特别的,当$z=1$时,若记$\omega=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$,则1的$n$次方根为$1,\ \omega,\ \omega^2,\ \cdots,\ \omega^{n-1}$.

例 1.4 计算$\sqrt[4]{1-\mathrm{i}}$.

解 因为

$$1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}},$$

所以

$$\sqrt[4]{1-\mathrm{i}}=\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}},\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

即

$$z_0=\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{16}},\ z_1=\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{16}},$$

$$z_2=\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{15\pi}{16}},\ z_3=\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{23\pi}{16}}.$$

1.2.3 共轭复数及其性质

称复数$x-\mathrm{i}y$为复数$x+\mathrm{i}y$的共轭复数.复数z的共轭复数常记为$\overline{z}$.显然

$$|z|=|\overline{z}|,\ \mathrm{Arg}\,\overline{z}=-\mathrm{Arg}\,z.$$

上式表明在复平面上,z和$\overline{z}$关于实轴对称,如图1-3所示.

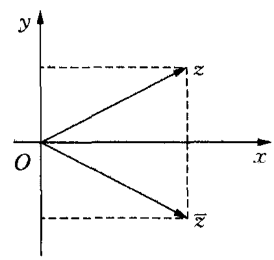


图1-3 复数及其共轭

复数及其共轭有如下性质:

(1) $\overline{(\overline{z})}=z,\ \overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$.

(2) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2},\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ z_2\neq 0$.

(3) $|z|^2=z\overline{z},\ \mathrm{Re}\,z=\frac{z+\overline{z}}{2},\ \mathrm{Im}\,z=\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$.

例 1.5 设z_1和z_2为两个复数,证明:

$$\left.\begin{aligned}|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}),\\ |z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}).\end{aligned}\right\}\qquad(1-20)$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com