华腾教育 HUA TENG EDUCATION

高等学校教材经典同步辅导丛书数学类(一)

配高教社《高等数学》第五版 同济大学应用数学系 主编

高等数学

第五版 上册

同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心
丛书主编 清华大学 范亮宇
本书主编 同济大学 王建福

- **紧贴教材**：精讲重点 点拨方法 联系考研
- **考试宝典**：教材精华 经典试卷 常考试题
- **学习卡**：资料下载 信息交流 互动论坛
- **课后习题**：三级突破 分析要点 总结难点

中国矿业大学出版社

高等学校教材经典同步

高等数学

第五版 上册

同步辅导及习题全解

丛书主编 清华大学 范亮宇
本书主编 同济大学 王建福

中国矿业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上册)同步辅导及习题全解/王建福主编.
徐州:中国矿业大学出版社,2006.8
(高等学校教材经典同步辅导丛书)
ISBN 7-81107-395-1

Ⅰ.高… Ⅱ.王… Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 086956 号

书　　名　高等数学(上册)同步辅导及习题全解
主　　编　王建福
责任编辑　罗　浩
出版发行　中国矿业大学出版社
网　　址　http://www.cumtp.com　E-mail　cumtpvip@cumtp.com
印　　刷　北京市昌平百善印刷厂
经　　销　新华书店
开　　本　850×1168　1/32　本册印张 9.25　本册字数 168 千字
版次印次　2006 年 8 月第 1 版　2006 年 8 月第 1 次印刷
总 定 价　125.00 元

高等学校教材
经典同步辅导丛书编委会

前言

PREFACE

《高等数学》是大学课程中一门重要的基础课，是理工科学生学习其他专业课程的基础，也是硕士入学考试的必考科目. 为了帮助读者更好地学好这门课程，掌握更多知识，我们根据多年的教学经验编写了这本《高等数学同步辅导及习题全解(上册).

本书作为一类辅助教材，旨在使读者掌握更多的知识扩展解题思路. 考虑到读者的不同情况，我们在内容上做了以下安排：

1. 学习要求：根据考试大纲的要求，总结的各章重要知识点.

2. 历年考研真题评析：精选历年考研真题进行深入分析.

3. 课后习题全解：本书给出了同济大学应用数学系编写的《高等数学》各章习题的答案. 我们不仅给出了详细的解题过程，而且还对解题思路和方法作了简要的说明.

编写本书时，依据大学本科现行教材及教学大纲的要求，参考了清华大学、北京大学、同济大学、浙江大学、人民大学、复旦大学等高等院校的教材，并结合教学大纲的要求进行编写.

我们衷心希望本书提供的内容能够对读者在掌握课程内容、提高解题能力上有所帮助. 同时，由于编者的水平有限，本书难免出现不妥之处，恳请广大读者批评指正.

华腾教育教学与研究中心

目录 CONTENTS

第一章

函数与极限

学习要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示方法.
2. 了解函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.
5. 会建立简单应用问题的函数关系式.
6. 理解极限的概念，理解函数左、右极限的概念，以及极限存在与左、右极限之间的关系.
7. 掌握极限的性质及四则运算法则.
8. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.
9. 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的比较方法，会用等价无穷小求极限.
10. 理解函数连续性的概念(含左、右连续)，会判别函数间断点的类型.
11. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，了解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理)，并会应用这些性质.

历年考研真题评析

Ⅰ. 选择题

1. (2002 年，数学二) $f(x)=|x\sin x|\cdot e^{\cos x}$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 是(　　).

A. 有界函数　　B. 单调函数　　C. 周期函数　　D. 偶函数

解　$|x\sin x|$,$e^{\cos x}$ 均为偶函数,所以其乘积仍为偶函数. 故应选 D.

2.(2004 年,数学三) 当 $x \to 1$ 时,函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限(　　).

A. 等于 2　　B. 等于 0　　C. 为 ∞　　D. 不存在但不为 ∞

解　$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}} = 2\cdot 0 = 0$,

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}} = \infty$,

当 $x \to 1$ 时函数没有极限,也不是 ∞. 故应选 D.

3.(2003 年,数学二) 设 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n = 0$,$\lim\limits_{n\to+\infty}b_n = 1$,$\lim\limits_{n\to+\infty}c_n = \infty$,则必有(　　).

A. $a_n < b_n$ 对任意 n 成立　　B. $b_n < c_n$ 对任意 n 成立

C. 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_nc_n$ 不存在　　D. 极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}b_nc_n$ 不存在

解　A,B 显然不对,因为由数列极限的不等式性质只能得出数列"当 n 充分大时"的情况,不可能得出"对任意 n 成立"的性质.

C 也明显不对,因为"无穷小 · 无穷大"是未定型,极限可能存在也可能不存在. 故应选 D

4.(2005 年,数学二) 设函数 $f(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$,则(　　).

A. $x = 0$,$x = 1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

B. $x = 0$,$x = 1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

C. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点,$x = 1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

D. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点,$x = 1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

解　要考查 $f(x)$ 在 $x = 0,1$ 处的极限或左、右极限.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}(e^{\frac{x}{x-1}}-1) = 0$,所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x) = \infty$.

$\Rightarrow x = 0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

又 $\lim\limits_{x\to 1^+}e^{\frac{x}{x-1}} = +\infty$,$\lim\limits_{x\to 1^-}e^{\frac{x}{x-1}} = 0$,

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}f(x) = 0$,$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x) = -1$.

$\Rightarrow x = 1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点. 故应选 D.

5.(2003 年,数学一) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x + b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})} = 2$,其中 $a^2+c^2 \neq 0$,则必有(　　).

A. $b = 4d$　　B. $b = -4d$　　C. $a = 4c$　　D. $a = -4c$

解 由于 $a\tan x+b(1-\cos x)\sim ax,(a\neq 0)$

$c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})\sim -2cx,(c\neq 0)$

(因为 $1-\cos x\sim \frac{1}{2}x^2=o(x),1-e^{-x^2}\sim x^2=o(x)$)

因此,原式左边 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax}{-2cx}=\frac{a}{-2c}=2=$ 原式右边,$\Rightarrow a=-4c$.

当 $a=0,c\neq 0$ 时,极限为0,当 $a\neq 0,c=0$ 时,极限为 ∞,均与题设矛盾.故应选 D.

Ⅱ.填空题

1.(2000 年,数学三)设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$ ______.

解 当 $|x|\leqslant 1$ 时,有 $f(x)=1$. 又 $f(1)=1$,于是当 $|x|\leqslant 1$ 时,复合函数 $f[f(x)]=1$.

当 $|x|>1$ 时,有 $f(x)=0$. 又 $f(0)=1$,即当 $|x|>1$ 时,也有 $f[f(x)]=1$. 因此,对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,有 $f[f(x)]=1$.

2.(2002 年,数学二)已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ ______.

解 由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}[1+(\cos x-1)]^{x^{-2}}=e^{-\frac{1}{2}}\left(因为\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}\right)$,

依题意有 $a=e^{-\frac{1}{2}}$.

3.(2005 年,数学二)当 $x\to 0$ 时,$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小,则 $k=$ ______.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{kx^2(\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x})}$$

$$=\frac{1}{2k}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\arcsin x}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{4k}=1.\Rightarrow k=\frac{3}{4}.$$

Ⅲ.解答题

1.(2000 年,数学一)求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{\cos\frac{\pi}{4n}}{n}+\frac{\cos\frac{3\pi}{4n}}{n}+\cdots+\frac{\cos\frac{(2n-1)\pi}{4n}}{n}\right]$

解 原式 $=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\cos\frac{\pi}{4n}+\cos\frac{3\pi}{4n}+\cdots+\cos\frac{(2n-1)\pi}{4n}\right]$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4n}} \left[2\sin\frac{\pi}{4n} \cdot \cos\frac{\pi}{4n} + \cdots + 2\sin\frac{\pi}{4n} \cdot \cos\frac{(2n-1)\pi}{4n} \right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4n}} \left[\sin\frac{2\pi}{4n} - 0 + \cdots + \sin\frac{2n\pi}{4n} - \sin\frac{(2n-2)\pi}{4n} \right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{4n}} \cdot \left[\sin\frac{\pi}{2} - 0 \right] = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} \frac{\frac{\pi}{4n}}{\frac{\pi}{4n}\sin\frac{\pi}{4n}} = \frac{2}{\pi}$$

2.(2004 年,数学二)求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2+\cos x}{3} \right)^x - 1 \right]$.

解 这是求 $\frac{0}{0}$ 型的极限,利用等价无穷小因子替换:$\ln(1+t) \sim t(t\to 0)$,有

$\left(\frac{2+\cos x}{3} \right)^x - 1 \sim \ln\left(\frac{2+\cos x}{3} \right)^x (x\to 0)$.

又 $\ln\left(\frac{2+\cos x}{3} \right) = \ln\left(1 + \frac{\cos x - 1}{3} \right) \sim \frac{\cos x - 1}{3} (x\to 0)$,

于是 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3} \right)^x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3} \right)}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x - 1}{3}}{x^2} = -\frac{1}{6}.$$

其中 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

课后习题全解

习题 1—1

○1. **解** $A\cup B = (-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$,$A\cap B = [-10, -5)$,

$A\backslash B = (-\infty, -10) \cup (5, +\infty)$,$A\backslash(A\backslash B) = [-10, -5)$.

○2. **证明** $\forall x \in (A\cap B)^C \Rightarrow x \notin A\cap B \Rightarrow x \in A^C$ 或 $x \in B^C \Rightarrow x \in A^C \cup B^C$,

所以 $(A\cap B)^C \subset (A^C \cup B^C)$; ①

反之 $\forall x \in A^C \cup B^C \Rightarrow x \in A^C$ 或 $x \in B^C \Rightarrow x \notin A$ 或 $x \notin B \Rightarrow x \notin (A \cap B) \Rightarrow x \in (A\cap B)^C$,

所以 $A^C \cup B^C \subset (A\cap B)^C$. ②

则由 ① 和 ② 得 $(A\cap B)^C = A^C \cup B^C$.

◎3. **分析** 利用集合的并的定义证明,即 $A\cup B = \{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

证明　(1)$y=f(x_0)\in f(A\cup B)=\{f(x)\mid x\in A\cup B\}$

$\Leftrightarrow x_0\in A$ 或 $x_0\in B\Rightarrow f(x_0)\in f(A)$ 或 $f(x_0)\in f(B)\Leftrightarrow f(x_0)\in f(A)\cup f(B)$,

故 $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$;

(2)$f(A\cap B)=\{f(x)\mid x\in A\cap B\}$. $\forall y\in f(A\cap B)$,则 $\exists x_0\in A\cap B$,

有 $y=f(x_0)$,即 $f(x_0)\in f(A)$ 且 $f(x_0)\in f(B)$,

即 $y=f(x_0)\in f(A)\cap f(B)$.

故 $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

◎4. **分析**　本题可以用反证法来证 $g=f^{-1}$

证明　首先证明 f 是双射:

$\forall y\in Y,\exists x\in X$,使得 $x=g(y),f(x)=f\circ g(y)=y$

对于 X 中任意两个元素 x_1、x_2,$x_1\neq x_2$,要证明 $f(x_1)\neq f(x_2)$,用反证法. 如果 $f(x_1)=f(x_2)$,则 $g\circ f(x_1)=g\circ f(x_2)$,即 $x_1=x_2$,推出矛盾. 所以 f 是双射,根据定义 g 是 f 的逆映射.

○5. **证明**　(1) $\forall x\in A$,则 $y=f(x)\in f(A)$,$f^{-1}(y)=x\in\{f^{-1}(y)\mid y\in f(A)\}=f^{-1}(f(A))$

即 $A\subset f^{-1}(f(A))$;

(2) 如果 f 是单射,$\forall x\in f^{-1}(f(A))$,$\exists y\in f(A)$,有 $f^{-1}(y)=x$,即 $f(x)=y$

设 $x'\in A,f(x')=y$. 由于是单射,则 $x=x'\in A$

$\therefore f^{-1}(f(A))\subset A$. 又由(1)$\therefore f^{-1}(f(A))=A$.

○6. **解**　(1)$\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$;

(2)$(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$;

(3)$[-1,0)\cup(0,1]$;

(4)$(-2,2)$;

(5)$[0,+\infty)$;

(6)$\{x\mid x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}-1,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)\}$;

(7)$[2,4]$;　　(8)$(-\infty,0)\cup(0,3]$;

(9)$(-1,+\infty)$;　　(10)$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

○7. **解**　(1) 不同. 因为定义域不同

(2) 不同. 因为对应法则不同,$f(x)=x$,而 $g(x)=|x|$;

(3) 相同. 因为定义域、对应法则均相同;

(4) 不同．因为定义域不同；

○8. **解** $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2},\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$=\left|\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\varphi(-2)=0$

$y=\varphi(x)$ 的图形如图 1－1 所示．

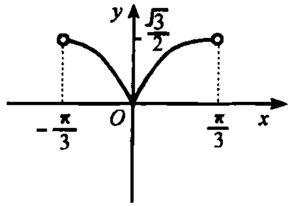

图 1－1

◎9. **分析** 函数单调性的判别可以通过如下方法:在区间 I 上任取两点 x_1、x_2，若当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则 $f(x)$ 单调增加

$x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则 $f(x)$ 单调减少

即观察 $f(x_1)-f(x_2)=g(x)$ 的正负.

解 (1) 设 $x_1,x_2\in(-\infty,1)$ 且 $x_1<x_2$

$$y(x_2)-y(x_1)=\frac{x_2}{1-x_2}-\frac{x_1}{1-x_1}$$

$$=\frac{x_2-x_1}{(1-x_2)(1-x_1)}>0$$

$\therefore y(x_2)-y(x_1)>0$ $\therefore y=\frac{x}{1-x}$ 在$(-\infty,1)$ 内单调增加.

(2) 设 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$

$$y(x_2)-y(x_1)=x_2+\ln x_2-(x_1+\ln x_1)$$

$$=(x_2-x_1)+\ln x_2-\ln x_1$$

$\because y=\ln x$ 为单增函数 $\therefore \ln x_2-\ln x_1>0$

$\therefore y(x_2)-y(x_1)>0$ $\therefore y=x+\ln x$ 在$(0,+\infty)$ 上单调增加．

◎10. **分析** 要证 $f(x)$ 单调增加，且 $f(x)$ 为奇函数.

由 $f(x_2)-f(x_1)=-f(-x_2)+f(-x_1)$(奇偶性)来证明 $f(x_2)-f(x_1)>0$.

证明 设 $x_1,x_2\in(-l,0)$ 且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=f[-(-x_2)]-f[-(-x_1)]\xlongequal{\text{奇函数}}-f(-x_2)+f(-x_1)$$

又 $-x_2,-x_1\in(0,l)$ 且 $-x_1>-x_2$，故由 $f(x)$ 在$(0,l)$ 内的单增性知：

$$f(x_2)-f(x_1)=f(-x_1)-f(-x_2)>0$$

从而 $f(x)$ 在$(-l,0)$ 内也是单调增加的．

○11. **证明** (1) 设 $f_1(x),f_2(x)$ 为两个任意的偶函数，令 $F(x)=f_1(x)+$

$f_2(x)$

则　$F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)$

$=f_1(x)+f_2(x)=F(x)$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x),g_2(x)$ 为两个任意的奇函数,令 $G(x)=g_1(x)+g_2(x)$

则　$G(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)$

$=-g_1(x)-g_2(x)=-G(x)$

故 $G(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $f_1(x),f_2(x)$ 为任意两个偶函数,令 $F(x)=f_1(x)f_2(x)$

则　$F(-x)=f_1(-x)f_2(-x)$

$=f_1(x)f_2(x)=F(x)$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x),g_2(x)$ 为任意两个奇函数,令 $G(x)=g_1(x)g_2(x)$

则　$G(-x)=g_1(-x)g_2(-x)=[-g_1(x)][-g_2(x)]$

$=g_1(x)g_2(x)=G(x)$

故 $G(x)$ 为偶函数.

设 $f(x)$ 为任一偶函数,而 $g(x)$ 为任一奇函数,令 $T(x)=f(x)g(x)$

则　$T(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)[-g(x)]$

$=-f(x)g(x)=-T(x)$

故 $T(x)$ 为奇函数.

○12. **解**　(1)$f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$,

所以 $y=x^2(1-x^2)$ 为偶函数;

(2) 因为 $f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3\neq f(x)$ 且 $\neq -f(x)$

所以 $f(x)$ 既非奇函数又非偶函数;

(3) 因为 $f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$,所以 $f(x)$ 为偶函数;

(4) 因为 $f(-x)=(-x)[(-x)-1][(-x)+1]=-x(x-1)(x+1)=-f(x)$,所以 $f(x)$ 为奇函数;

(5) 因为 $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1\neq f(x)$ 且 $\neq -f(x)$

所以 $f(x)$ 既非奇函数又非偶函数;

(6) 因为 $f(-x)=\dfrac{a^{(-x)}+a^{-(-x)}}{2}=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x)$,所以 $f(x)$ 是

偶函数.

○13. **解** (1) 是周期函数,周期 $T=2\pi$;

(2) 是周期函数,周期 $T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$;

(3) 是周期函数,周期 $T=\frac{2\pi}{\pi}=2$;

(4) 不是周期函数;

(5) 是周期函数.因为 $y=\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$,所以周期为 $T=\frac{2\pi}{2}$ $=\pi$.

○14. **解** (1) $\because y=\sqrt[3]{x+1}$, $\therefore x=y^3-1$,

$\therefore$ 反函数为 $y=x^3-1$;

(2) $\because y=\frac{1-x}{1+x}$, $\therefore x=\frac{1-y}{1+y}$, $\therefore y=\frac{1-x}{1+x}$ 的反函数为:$y=\frac{1-x}{1+x}$;

(3) $\because y=\frac{ax+b}{cx+d}$ $\quad\therefore x=\frac{-dy+b}{cy-a}$

$\therefore y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 的反函数为:$y=\frac{b-dx}{cx-a}$;

(4) $\because y=2\sin 3x$ $\therefore x=\frac{1}{3}\arcsin\frac{y}{2}$,

$\therefore y=2\sin 3x$ 的反函数为:$y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$;

(5) $\because y=1+\ln(x+2)$ $\therefore x=\frac{e^y}{e}-2$,所以所求反函数为 $y=e^{x-1}-2$;

(6) $\because y=\frac{2^x}{2^x+1}$ 得 $x=\log_2\frac{y}{1-y}$,所以所求反函数为 $y=\log_2$ $\frac{x}{1-x}$.

○15. **证明** (1) 必要性

设 $f(x)$ 在 X 上有界,即 $\exists M>0$ 使得 $|f(x)|\leqslant M$, $\quad x\in X$

因而 $\qquad -M\leqslant f(x)\leqslant M$, $\quad x\in X$

亦即 $f(x)$ 在 X 上既有上界(M),又有下界($-M$);

(2) 充分性

设 $f(x)$ 在 X 上有上界 M_1,下界 M_2,即 $M_2\leqslant f(x)\leqslant M_1$, $x\in X$,

令 $M=\max(|M_1|,|M_2|)$,则 $-M\leqslant M_2$, $M_1\leqslant M$,

因而 $\quad -M\leqslant f(x)\leqslant M$, $x\in X$,即 $|f(x)|\leqslant M$, $x\in X$,

故 $f(x)$ 在 X 上有界.

○16. **解**　(1)$y=\sin^2 x$，　$y(x_1)=\frac{1}{4}$，　$y(x_2)=\frac{3}{4}$；

(2)$y=\sin 2x$，　$y(x_1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，　$y(x_2)=1$；

(3)$y=\sqrt{1+x^2}$，　$y(x_1)=\sqrt{2}$，　$y(x_2)=\sqrt{5}$；

(4)$y=e^{x^2}$，　$y(x_1)=1$，　$y(x_2)=e$；

(5)$y=e^{2x}$，　$y(x_1)=e^2$，　$y(x_2)=e^{-2}$；

○17. **解**　(1)$f(x^2)$的定义域为$[-1,1]$；

(2)$f(\sin x)$的定义域为$[2n\pi,(2n+1)\pi]$，$(n=0,\pm1,\cdots)$；

(3)$f(x+a)$的定义域为$[-a,1-a]$；

(4)若$0<a\leqslant\frac{1}{2}$，定义域为$[a,1-a]$；若$a>\frac{1}{2}$，则函数无定义．

○18. **解**　$f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1, & |e^x|<1\\ 0, & |e^x|=1\\ -1, & |e^x|>1\end{cases}$

即 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0\\ -1, & x>0\end{cases}$　　(见图1－2)

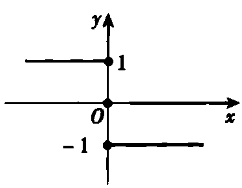

图1－2

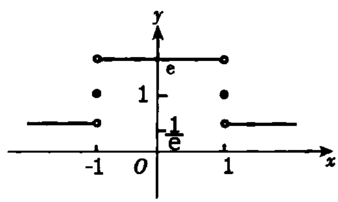

图1－3

$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e & |x|<1\\ 1, & |x|=1\\ e^{-1}, & |x|>1\end{cases}$　　(见图1－3)

◎19. **分析**　$S_0=\frac{1}{2}h[BC+(BC+2\cot40^\circ\cdot h)]$

$AB=CD=\frac{h}{\sin40^\circ}$，因此$L=AB+BC+CD$中$AB$、$BC$、$CD$都可以表示为$h$的函数.

解　$AB=DC=\frac{h}{\sin40^\circ}$

又由 $\frac{1}{2}h[BC+(BC+2\cot40^\circ\cdot h)]=S_0$

可得 $BC=\frac{S_0}{h}-\cot40^\circ\cdot h$，因此 $L=\frac{S_0}{h}+\frac{2-\cos40^\circ}{\sin40^\circ}h$

自变量 h 的取值范围应由不等式组 $\begin{cases}h>0\\ \frac{S_0}{h}-\cot40^\circ\cdot h>0\end{cases}$ 确定，

故定义域为 $(0,\sqrt{S_0\tan40^\circ})$.

○20. **解** (1) $p=\begin{cases}90 & 0\leqslant x\leqslant 100\\ 90-(x-100)\cdot 0.01 & 100<x<1600\\ 75 & x\geqslant 1600;\end{cases}$

(2) $P=(p-60)x=\begin{cases}30x & 0\leqslant x\leqslant 100\\ 31x-0.01x^2 & 100<x<1600\\ 15x & x\geqslant 1600;\end{cases}$

(3) 当定购 1000 台时，按(2) 的结论

厂方可获利 $P=31x-0.01x^2=[31\times1000-0.01\times(1000)^2]$

$=21000$(元).

习题 1－2

○1. **解** (1)0； (2)0； (3)2； (4)1； (5)没有极限.

○2. **解** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 其证明如下：

因为 $|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\right|\leqslant\frac{1}{n}$，所以对 $\forall\varepsilon>0$，要使 $|x_n-0|<\varepsilon$，

只要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，$|x_n-0|<\varepsilon$. 由定义知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

当 $\varepsilon=0.001$ 时，$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]=1000$，即若取 $\varepsilon=0.001$，只要 $n>1000$，

就有 $|x_n-0|<0.001$.

●3. **分析** 用极限定义求证极限时，都是作 $|x_n-a|$ (a 为极限)，再证其是否小于任意小正数 ε.

证明 (1) 对 $\forall\varepsilon>0$，要使 $|a_n-0|=\left|\frac{1}{n^2}-0\right|=\left|\frac{1}{n^2}\right|<\varepsilon$