美妙数学花园

Meimiao Shuxue Huayuan

王昆扬 著

实数的十进表示

科学出版社

美妙数学花园

Meimiao Shuxue Huayuan

实数的十进表示

内 容 简 介

本书讨论用十进制的无限小数来表示实数的问题．十进制的无限小数，简称为十进数，初中学生就知道了．但他们只能把它作为符号，凭感觉进行直观的想象．这些符号的真意只有接受了“极限”概念之后才能理解．

本书严格讲述了有理数列的收敛的概念，并讲述了基本列、数列等价的概念等．然后引入标准列的概念，把一个十进数与一个标准列等同起来，叫做“对等”．在此基础上严格地证明：每个十进数都是它对等的标准列的极限；任何由实数(即十进数)组成的基本列一定收敛．

本书适合高中学生阅读．能够接受极限概念的初中学生也完全可以读懂．

图书在版编目（CIP）数据

实数的十进表示/王昆扬著．—北京：科学出版社，2011
(美妙数学花园)
ISBN 978-7-03-031556-4
Ⅰ．①实… Ⅱ．①王… Ⅲ．①十进制-普及读物 Ⅳ．①O156.1-49
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 113390 号

责任编辑：陈玉琢／责任校对：张怡君
责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011 年 6 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)
2011 年 6 月第一次印刷 印张：6
印数：1—5 000 字数：108 000

定价：22.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

《美妙数学花园》丛书序

今天, 人类社会已经从渔猎时代、农耕时代、工业时代, 发展到信息时代. 科学技术的巨大成就, 为人类带来了丰富的物质财富和越来越美好的生活. 而信息时代高度发达的科学技术的基础, 本质上是数学科学.

自从人类建立了现行的学校教育体制, 语文和数学就是中小学两门最主要的课程. 如果说文学因为民族的差异, 在各个国家之间有很大的不同, 那么数学在世界上所有的国家都是一致的, 仅有教学深浅、课本编排的不同.

我国自从在清末民初时期西学东渐, 逐步从私塾教育过渡到现代的学校教育, 一直十分重视数学教育. 我们从清朝与近代科技隔绝的情况下起步, 迅速学习了西方的民主与科学. 在 20 世纪前半叶短短的几十年间, 在我们自己的小学、中学、大学毕业, 然后留学欧美的学生当中, 不仅产生了一批社会科学方面的大师, 而且

产生了数学、物理学等自然科学领域对学科发展做出了重大贡献的享誉世界的科学家. 他们的成就表明, 有着五千年灿烂文化的中华民族是有能力在科学技术领域达到世界先进水平的.

在20世纪五六十年代, 为了选拔和培养拔尖的数学人才, 华罗庚与当时中国的许多知名数学家一道, 学习苏联的经验, 提倡和组织了数学竞赛. 数学家们为中学生举办了专题讲座, 并且在讲座的基础上出版了一套面向中学生的"数学小丛书". 当年爱好数学的中学生十分喜爱这套丛书. 在经历过那个时代的中国科学院院士和全国高等院校的数学教授当中, 几乎所有的人都读过这套丛书.

诚然, 我国目前的数学竞赛和数学教育由于体制的问题备遭诟病. 但是我们相信, 成长在信息时代的今天的中学生们, 会有更多的孩子热爱数学; 置身于社会转型时期的中学里, 会有更多的数学教师渴望培养出优秀的科技人才.

数学家能够为中学生和中学教师们做些什么呢? 数学本身是美好的, 就像一个美丽的花园. 这个花园很大,

我们并不能走遍她,完全地了解她. 但是我们仍然愿意将自己心目中美好的数学,将我们对数学的点滴领悟,写给喜爱数学的中学生和数学老师们.

张英伯

2011 年 5 月

目 录

第 1 章 ……

引　言

关于什么是"实数",引述几段教科书中的话.

曹之江和王刚在《微积分学简明教程》(上册)(高等教育出版社, 2004 年, 第 2 版) 第1页谈及自然数和有理数时说"数是人类在争取生存、进行生产和交换中所创造的一种特殊语言, 是量的描述及运算的手段". 接着在第 2 页, 在小标题"无理数和微积分的危机"下又说"在相当长的一段历史时期, 人们只能认识经验所及的自然数以及由它所衍生的有理数. 同时人们也自然想象, 那些像单位正方形的对角线那样的与单位长不可公度的几何量, 应当与那些可公度的长度一样, 有"数"来加以表示…… 这些数从哪里来? 它们将怎样表示和运算".

俄罗斯的卓里奇 (В.А.Зорич) 在《数学分析》(第一卷)(第 4 版) (高等教育出版社, 2006 年, 第 2 版) 第 29 页中说"数学中的数, 就像物理中的时间, 人人都知道, 唯

独专家们不这样理解它".

俄罗斯的阿黑波夫等 (Г.И.Архипов, В.А.Садовничий, В.Н.Чубариков) 在《数学分析讲义》(第 3 版)(高等教育出版社, 2006 年) 第 13 页中说"实数, 无论是有理数还是无理数, 它们是人类理智为了实际需要而作出的抽象发明". 又说"实数乃是带'正'号或'负'号的无限十进小数".

我想, 我们没有理由不承认卓里奇的话: "数学中的数, 就像物理中的时间, 人人都知道". 对于普通人 (包括我在内), 对于"数"这个概念, 大概只能接受到这个程度, 而且我认为这样理解也就够了. 实数是表示宇宙中"量"的符号. 任何一条现实中的绳子 (或抽象成线段) 都有长度, 表达长度的符号就是 (正的) 实数. 人的体温、地球的质量、银行中存款的多少、鸡蛋的价格等, 都必须用记号表达, 这记号就是实数. 这不是给实数下定义, 只是描述而已. 把实数理解成符号, 使用怎样的符号比较合适? 这就是实数的表示的含义. 例如, 阿拉伯字符 100(十进制), 英文"a hundred", 俄文"сто", 中文"一百"或"壹佰", 表达了同一个实数 (同在十进制下). 阿拉伯字符 12(十进制), 英文"a dozen", 中文"一打"表达了同一个实数 (以不同的进位制). 这是在整数范围内.

在分数范围内, 同用阿拉伯符号, 同用十进制, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{25}{100}$ 等, 与 0.25 表示的是同一个实数. 特殊的符号 $\sqrt{2}$ 表示的实数是边长为 1 的正方形的对角线的长度, 谁能说这条对角线没有长度呢? 类似地, $\sqrt{3}$ 表示的实数是 60° 角的正切, 即直角三角形中 60° 的锐角所对的直角边的长度与所邻的直角边的长度的比值, 谁能说这个比值不存在呢?

无论如何, 这些都不是实数的哲学定义.

曹之江和王刚提出的问题是重要的:"那些像单位正方形的对角线那样的与单位长不可公度的几何量, 应当与那些可公度的长度一样, 有'数'来加以表示. ······这些数从哪里来? 它们将怎样表示和运算".

我认为在数学科学中, 任何一个概念, 只有得到恰当的"数学表示"之后, 才能被严格地进行研究和应用. 实数这个概念太基本、太重要了, 它无处不在, 所以给实数以恰当的数学表示, 也就是说, 规定合适的符号来表示它们, 就是很有必要的.

阿黑波夫等所说的"实数乃是带'正'号或'负'号的无限十进小数"就是实数的一种表示方式. 把这种表示叫做实数的**十进表示**. 我认为十进表示是实数概念

最自然的、最容易被"接受"、最便于应用的表达形式.

其实, 人们从小就习惯于十进制. 如果不是在特殊的专业场合, 人们自然地用十进制的阿拉伯数字符号表示正整数. 即使美国银行用 two thousand three hundred fifty six 表达一个钱数 (单位可以是美元), 这个数字和中国银行说的贰仟叁佰伍拾陆 (同样单位) 是一样的, 都是十进制的 2356. 在 2356 前面添一个负号就成为 -2356, 它是十进制的负整数.

分数就复杂了一些. 初中二年级的课本中说 "正的整数和分数、负的整数和分数以及零叫做有理数". 通常, 人们用形如 $\frac{m}{n}$ 的符号来代表分数, 其中 m 为整数, 可以是负的, 而 n 为正整数. 这里, 当 m 和 n 被赋予具体数值时, 最常用的也还是十进制整数. 当分母是 10^k, 即 1 后面带 k 个零, $1\overbrace{0\cdots0}^{k\text{个}}$, 这样特殊的十进制正整数时, 人们把分数写成十进小数的形式, 这种小数的小数点后面只有 k 位数字, 所以叫做**十进有限小数**, 简称为有限小数. 例如,

$$\frac{34}{10^3} = 0.034 = \frac{3}{100} + \frac{4}{1000},$$

$$\frac{2870}{10^3} = 2.870 = 2 + \frac{8}{10} + \frac{7}{100} = 2.87.$$

显然, 小数点后只有 k 位数字的有限小数, 可以改写成分母为 10^k 的分数; 整数也可以看成分母为 1 的分数. 分数也叫做**有理数**(rational number). 这是大家都熟悉的数.

下面把有理数的分数表示, 包括十进有限小数表示, 叫做有理数的**本原表示**.

所要做的是, 在对于上述有理数 (或分数) 已有了很好的了解的基础上, 对于实数的十进表示作一个严格的、完整的讨论.

第 2 章 ························

什么是十进数

2.1 测量线段之长

我们承认任何一条现实中的绳子 (或抽象成线段) 都有长度. 人们是怎样测量绳子的长度的呢?

首先规定一个尺子, 也就是说, 约定一个特定的线段的长度为一个单位, 如中国的 1**市尺**, 国际通用的 1 米. 1 米的长度等于 3 市尺的长度, 简称为 1 米等于 3 市尺. 下面使用国际通用的米. 设手中握有一条长度为 1 米的**尺子**, 如图 2.1 所示. 左端点有刻度 0, 右端点有刻度 1 (单位: 米). 这个尺子等分成 10 段, 中间对应有 0.1,0.2,$\cdots$,0.9

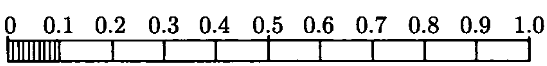

图 2.1

9 个刻度. 从左端刻度 0 到刻度 0.1 的一段又等分成 10 段, 划出了刻度, 但因位置太窄已不便标示数字.

给定一条线段. 用一米长的尺子作**第 1 次测量**. 把第一次测量的结果用代表一个非负整数的字母 p 表示. p 的值是这样确定的: 如果此线段不足 1 米, 那么 $p=0$; 如果此线段的长度超过 1 米, 则量 p 次之后, 可能恰好量尽, 也可能还剩一段, 所剩这段不够 1 米长. 如果恰好量尽了, 则说线段长 p 米. 此时测量终止.

如果还剩下不够 1 米长的一段, 则把剩下的这段叫做**第 1 次剩余**.

总之, 第 1 次测量的结果记作 p, 它是零或正整数. 当然, 已经知道怎样用十进制来表示非负整数 p.

如果第 1 次测量不终止, 则接着来作**第 2 次测量**, 就是用米尺上从刻度为 0 到刻度为 0.1 的一段为小尺子——权且叫做**第 1 小尺**, 来度量第 1 次剩余. 已经知道第 1 小尺的长度是 $\frac{1}{10}=10^{-1}$ 米, 即 1 分米. 把第 2 次测量的结果用形如 "$p.a_1$" 的符号来表示, 它代表有理数

$$p+\frac{a_1}{10},$$

其中 p 为第 1 次测量结果, 而 a_1 代表一个非负的、不超过 9 的整数, a_1 的值是这样确定的: 如果第 1 次剩余比第 1 小尺短, 即不足 $\frac{1}{10}$ 米, 则 $a_1=0$, 这时把第 1 次剩余

也叫做**第 2 次剩余**; 如果第 1 次剩余的长度不比第 1 小尺短, 即等于或大于 $\frac{1}{10}$ 米, 则用第 1 小尺量 a_1 次之后, 可能恰好量尽, 也可能还剩一段, 所剩这段不够 $\frac{1}{10}$ 米长. 如果恰好量尽了, 则说线段长 $p.a_1$ 米, 此时测量终止. 如果还剩下不够 $\frac{1}{10}$ 米长的一段, 则把剩下的这段叫做**第 2 次剩余**.

总之, 第 2 次测量的结果记作 $p.a_1$, 其中 p 为零或正整数, a_1 为不超过 9 的非负整数 (请思考: 为什么 $0 \leqslant a_1 \leqslant 9$).

如果第 2 次测量不终止, 则接着来作**第 3 次测量**, 就是用米尺上从刻度为 0 到刻度为 0.1 的一段的十等分中的一份为**第 2 小尺**来度量第 2 次剩余. 已经知道第 2 小尺的长度是 $\frac{1}{100}(=10^{-2})$ 米, 即 1 厘米. 把第 3 次测量的结果用形如 "$p.a_1a_2$" 的符号来表示, 它代表有理数

$$p+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{100}=p+a_1\cdot 10^{-1}+a_2\cdot 10^{-2},$$

其中 $p.a_1$ 为第 2 次测量结果, 而 a_2 代表一个非负的、不超过 9 的整数, a_2 的值是这样确定的: 如果第 2 次剩余比第 2 小尺短, 即不足 $\frac{1}{100}$ 米, 则 $a_2=0$, 这时把第 2 次剩

余也叫做**第 3 次剩余**; 如果第 2 次剩余不比第 2 小尺短, 即等于或大于 $\frac{1}{100}$ 米, 则用第 2 小尺量 a_2 次之后, 可能恰好量尽, 也可能还剩一段, 所剩这段不够 $\frac{1}{100}$ 米长. 如果恰好量尽了, 则说原线段长 $p.a_1a_2$ 米, 此时测量终止; 如果还剩一段不够 $\frac{1}{100}$ 米长, 则把剩下的这段叫做**第 3 次剩余**.

总之, 第 3 次测量的结果记作 $p.a_1a_2$, 其中 p 为零或正整数, a_1 和 a_2 都为不超过 9 的非负整数.

一般地, 或归纳地, 如果对于正整数 k, 第 $k+1$ 次测量的结果为 $p.a_1\cdots a_k$, 其中 p 为零或正整数, $a_j(j=1,\cdots,k)$ 为不超过 9 的非负整数, 而第 $k+1$ 次测量不终止, 也就是说, 还剩下长度小于 $\frac{1}{10^k}$ 米的第 $k+1$ 次剩余, 则接着进行**第 $\boldsymbol{k+2}$ 次测量**, 就是用米尺的 10^{k+1} 等分中的一份作为**第 $\boldsymbol{k+1}$ 小尺**来测量第 $k+1$ 剩余, 得到第 $k+2$ 次测量结果 $p.a_1\cdots a_{k+1}$, 它代表有理数

$$p+\frac{a_1}{10}+\cdots+\frac{a_k}{10^k}+\frac{a_{k+1}}{10^{k+1}},$$

其中 $p.a_1\cdots a_k$ 为第 $k+1$ 次测量结果, 而 a_{k+1} 代表一个非负的、不超过 9 的整数, a_{k+1} 的值是这样确定的: 如果

第 $k+1$ 次剩余比第 $k+1$ 小尺短, 即不足 $\frac{1}{10^{k+1}}(=10^{-k-1})$ 米长, 则 $a_{k+1}=0$, 这时把第 $k+1$ 次剩余也叫做**第 $k+2$ 次剩余**; 如果第 $k+1$ 次剩余不比第 $k+1$ 小尺短, 即等于或大于 $\frac{1}{10^{k+1}}$ 米长, 则用第 $k+1$ 小尺量 a_{k+1} 次之后, 可能恰好量尽, 也可能还剩一段, 所剩这段不够 $\frac{1}{10^{k+1}}$ 米长. 如果恰好量尽了, 则说原线段长 $p.a_1\cdots a_k a_{k+1}$ 米. 此时测量终止; 如果还剩一段不够 $\frac{1}{10^{k+1}}$ 米长, 则把剩下的这段叫做**第 $k+2$ 次剩余**.

总之, 第 $k+1$ 次测量的结果记作 $p.a_1\cdots a_k$, 其中 p 为零或正整数, 而对于一切 $j=1,\cdots,k$, a_j 都是不超过 9 的非负整数.

把这种测量方式叫做**十进**方式, 意思是第一小尺的长度是原来的尺子的 1/10, 第 $k+1$ 小尺的长度是第 k 小尺的 1/10.

在现实生活中, 往往经过最多 4 次测量就终止了, 因为已经无法用肉眼看到 "第 4 次剩余", 肉眼根本看不清长度为 $\frac{1}{10^4}$ 米的第 4 小尺, 人不可能直接用自己的肢体操作这么短的小尺, 所以一般说来, 只得到一个 "近似" 结果. 在现实生活中, 完全习惯并满足于这种近似. 然而,