中国矿业大学新世纪教材建设工程资助教材

数学物理方程

Shuxue Wuli Fangcheng

刘文斌 主编

中国矿业大学出版社
China University of Mining and Technology Press

数学物理方程

Shuxue Wuli Fangcheng

数学物理方程

主　编　刘文斌
副主编　陈太勇　胡志刚　张建军
　　　　张慧星　章美月

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

本书以三类典型方程为主线，分别介绍了波动方程、热传导方程、调和方程定解问题的求解方法、解的性质和解的适定性等内容；还选编了一些数理方程在实际问题中的应用和对一些实际模型进行数值模拟的例子，力求体现数学理论与实际问题相结合、理论分析与科学计算相结合的教学理念。

本书可作为数学各专业本科生和其他理工科相关专业本科生的学习教材，也可作为相关科研、工程技术人员的科研参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程/刘文斌主编．—徐州：中国矿业大学出版社，2011.4

ISBN 978-7-5646-0985-6

Ⅰ．①数… Ⅱ．①刘… Ⅲ．①数学物理方程—高等学校—教材 Ⅳ．①O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 047411 号

书　　名 数学物理方程
主　　编 刘文斌
责任编辑 仓小金
出版发行 中国矿业大学出版社有限责任公司
(江苏省徐州市解放南路　邮编 221008)
营销热线 (0516)83885307　83884995
出版服务 (0516)83885767　83884920
网　　址 http://www.cumtp.com　**E-mail**：cumtpvip@cumtp.com
印　　刷 徐州中矿大印发科技有限公司
开　　本 787×960　1/16　**印张** 10.25　**字数** 195 千字
版次印次 2011 年 4 月第 1 版　2011 年 4 月第 1 次印刷
定　　价 16.00 元

前　言

“数学物理方程”是以从实际问题中，如物理学、化学等自然科学和工程技术等提出的偏微分方程为主要研究对象，是数学理论应用于实际问题的重要数学模型之一，一直受到人们的关注和重视。“数学物理方程”作为数学、通信、电子、物理、物探、力学等专业的基础课和应用基础课，有其鲜明的特点，即数学理论的严密性和实际问题的应用性。

通过本课程的学习，可使数学专业的学生打下扎实的专业基础，也可使其他应用专业的学生掌握必要的数学工具，为以后的深入学习和实际问题的研究提供有力的支撑。

本教材是作者在多年使用的同名讲义的基础上，汲取相关教材的成功经验编写而成的。教材除了介绍三类典型方程定解问题的求解方法和一些基本理论外，力求体现下面几个特点：

一、注重数学建模能力的培养。用数学理论研究实际问题，首先要把实际问题转化为数学问题，也就是要建立适当的数学模型，所以数学建模能力的培养是本教材的重要组成部分。为了加强建模能力的培养，教材中试图对同一模型介绍不同的建模方法，在建模过程中，体现出数学与物理的联系，体现出数学建模的思想。

二、注重数学物理方程在实际问题中的应用。鉴于数学物理方程的特点，它和实际问题的研究有着必然的联系。本教材在每一章介绍完方程定解问题的解法和定性分析后，都给出一个应用实例，以强

化数学物理方程在实际问题中的作用，从而激发学生的学习积极性。

三、注重数学理论与科学计算相结合。随着数学理论的不断发展和科学技术水平的不断提高，对方程定解问题的求解方式也在不断增多、不断创新。为了把现代元素融入传统解法，我们在一些定解问题的求解实例中引入 Mathematica 等科学计算软件，一方面对问题研究得更充分，另一方面也提高了学生的动手能力和科研能力。

本教材的出版得到了中国矿业大学理学院和中国矿业大学出版社的大力支持，也得到了数学系许多老师的支持和帮助，借此机会，向他们表示真诚的谢意！

由于水平所限，书中难免有一些错误或不足，恳请读者提出宝贵意见，以期改正。

编　者

二〇一〇年十二月

目 录

第一章 绪 论

众所周知，常微分方程是用数学理论研究实际问题的重要工具，在许多领域都有应用。但随着应用范围的不断扩大和研究领域的不断加深，在实际问题中所研究的对象仅考虑单个因素的影响已不能反映出其真实状态。如温度场中的温度、速度场中的速度，都受到时间和位置的影响，这类例子还有很多。所以，有必要在常微分方程的基础上进一步学习新类型的方程——偏微分方程。

第一节 偏微分方程及基本概念

一、偏微分方程的基本概念

一般来说，**偏微分方程**是指含有多元未知函数及其偏导数的等式。如

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=f(x,y) \tag{1.1.1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=1 \tag{1.1.2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u\frac{\partial u}{\partial y}=2 \tag{1.1.3}$$

$$u^2\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+ue^u=0 \tag{1.1.4}$$

方程中关于未知函数的最高阶偏导数的阶数称为方程的**阶**。如方程(1.1.1)是一阶方程，方程(1.1.2)是二阶方程。

如果方程中关于未知函数及其偏导数都是一次的，则称其为**线性方程**，如方程(1.1.1)、(1.1.2)。若方程不是线性的，但其最高阶导数仍是一次的，则称该方程为**拟线性方程**，如方程(1.1.3)。除了线性、拟线性方程之外的方程，统称为**非线性方程**，如方程(1.1.4)。

线性偏微分方程是最简单的，也是最基本的偏微分方程。不仅可以描述很多重要的物理现象，同时对一些表征非线性现象的非线性方程的研究也能给出有益的帮助。本课程重点研究三类典型的线性偏微分方程，即波动方程、热传导方程和调和方程。

二、偏微分方程的解及定解问题

（一）偏微分方程的解

若自变量为 $x_1,x_2,\cdots,x_n(n\geqslant 2)$，未知函数为 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则关于 u 的 $k(k\in \mathbf{Z}_+)$阶偏微分方程的一般形式为

$$F\left(x_1,\cdots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2},\cdots,\frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right)=0 \qquad (1.1.5)$$

其中 F 是其变元的已知函数。通常在 $\mathbf{R}^n$ 的某个区域 Ω 上研究方程(1.1.5)解的存在性及其性质。

所谓偏微分方程(1.1.5)的解 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是指：$u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在 Ω 中有定义且 k 次连续可微，代入方程(1.1.5)能使其在 Ω 中恒成立。此时也称 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是方程(1.1.5)在 Ω 中的一个经典意义下的解——**经典解**或**古典解**。今后如无特殊说明，将经典解简称为**解**。

如何求偏微分方程的解是本课程的主要内容之一。大家知道，一个 n 阶常微分方程的通解是含有 n 个独立的任意常数的函数族。那么偏微分方程的通解的结构如何？

例 1-1-1　设未知函数 $u(x,y,z)$满足一阶线性偏微分方程

$$u_y=2$$

求出该函数。

解　固定 x,z，对方程两边关于 y 积分，可得方程的解为

$$u(x,y,z)=2y+f(x,z)$$

其中 $f(x,z)$是关于变量 x,z 的任意连续可微函数。

例 1-1-2　求二阶线性偏微分方程

$$u_{xy}=0\quad [(x,y)\in \mathbf{R}^2] \qquad (1.1.6)$$

的解。

解　固定 x，对方程两边关于 y 积分，得 $u_x=f(x)$，其中 $f(x)$是 x 的任意函数。再固定 y，对其两边关于 x 积分，于是得到方程(1.1.6)的解为

$$u(x,y)=g(x)+h(y)$$

其中 $g(x),h(y)$是任意的连续可微函数。

由上述两例可见，偏微分方程的解族很大，可以包含任意函数。与常微分方程类似，称 k 阶偏微分方程含有 k 个相互独立的任意函数的解为方程的**通解**。不含任意函数或常数的解为方程的一个**特解**。

对于一般的偏微分方程，求出通解是非常困难的。

（二）偏微分方程的定解问题

由于一个微分方程的建立，仅仅考虑了系统内部各部分之间的相互作用，以

及外界对系统内部的作用，而一个确定的物理过程还要受到周围环境对系统边界的影响和其他具体条件的限制。另一方面，同一个方程可以表征互不相同的物理背景，如方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,y,z) \quad [(x,y,z)\in\Omega\subset\mathbf{R}^3]$$

中的 $u(x,y,z)$ 既可以表示稳定的温度分布场的温度，又可以表示静电场的电位。所以，在实际问题中，要对微分方程所表征的物理量附加一些特定条件，这些条件称为**定解条件**。寻求方程满足定解条件的解的问题称为**定解问题**。定解条件是由具体的物理问题导出的，其形式多种多样，但常见的定解条件有以下两类。

1. 初始条件

初始条件是关于初始时间 t_0 的物理量限制条件。如果方程所表征的物理量与时间有关，那么在时间发展的变化过程中，某时刻的状态将影响该时刻以后的运动过程，该时刻的运动状态被称为初始条件。通常以 $t_0=0$ 为初始时刻。

2. 边界条件

边界条件是关于区域边界上的物理量限制条件。如弦振动方程的定解问题

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2u_{xx} \quad (t>0,0<x<l) & (1.1.7)\\ u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x) & (1.1.8)\\ u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0 & (1.1.9)\end{cases}$$

条件(1.1.8)为初始条件，表示初始时刻 $t=0$ 时弦的位移和速度。条件(1.1.9)为边界条件，表示弦在振动时两端是固定的。

如果一个定解问题中的定解条件既有初始条件，又有边界条件，则此定解问题称为**初边值问题**或**混合问题**，只含初始条件的定解问题称**初始问题**或**柯西(Cauchy)问题**，而只含边界条件的定解问题称为**边值问题**。

从数学角度，主要研究定解问题的三个性质：

① **解的存在性** 定解问题至少存在一个解；

② **解的唯一性** 定解问题至多有一个解；

③ **解的稳定性** 定解问题的解对定解条件或方程中的参数等的连续依赖性，即如果定解条件或参数作微小变化时，相应的解的变化也很小。

如果定解问题的解是存在的、唯一的和稳定的，则称此定解问题是**适定的**。定解问题的适定性概念是由阿达玛(Hardmard)首先提出的，对偏微分方程的研究起着重要的指导作用。这是因为，在几乎所有的情况下，微分方程都是物理问题的数学描述，而所考察的物理模型在一定条件下应该具有唯一确定的状态。另外，微分方程是物理模型的近似描述，而且在实际测量中，相关物理量存在误

差。从实际情况看，当各参数值误差很小时，其对应的解相差也应很小。在某种意义上，定解问题的适定性讨论可以帮助我们初步判定所考察问题的数学模型的合理性。当然，定解问题的不适定性也不是没有用处。例如，1917 年阿达玛给出的在地球物理探矿中所提出的定解问题

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \quad (0<x<\pi, y>0) \\ u(0,y)=u(\pi,y)=0 \\ u(x,0)=0, \quad u_y(x,0)=\dfrac{1}{n}\sin nx \quad (n\in \mathbf{Z}\setminus\{0\}) \end{cases}$$

有唯一解

$$u(x,y)=\frac{1}{n^2}\sin nx\cdot\sinh ny$$

显然，当 $n\to\infty$ 时，初始条件（$y=0$）一致趋于零，但当 $y\neq 0$ 时，$u(x,y)$ 无界。因而这个解是不稳定的，从而问题是不适定的。

三、数学物理方程及其研究内容

所谓数学物理方程（简称为**数理方程**），主要指从物理学以及其他自然科学、技术科学等中所提出的偏微分方程（有时也包括常微分方程、积分方程、积分微分方程等）。

从 18 世纪初，人们就开始结合物理、力学等问题来研究偏微分方程。随着物理学所研究的现象在广度和深度这两个方面的扩展，微分方程的新类型也随之增加，一些已有的方程类型也拓展到新的物理应用领域。如拉普拉斯（Laplace）方程可以表示稳定温度场的温度或表示静电场的电位；热传导方程由表征热流变化到表征化学反应和扩散过程，从而形成了反应扩散方程等。同时，在数学自身的一些其他分支（如整体微分几何、多复变函数论等）中不断归结出一些新的重要的偏微分方程（组），这就使得数理方程的研究领域不断扩大，从而也就愈来愈受到人们的重视。另一方面，由于数理方程的求解所面临的数学问题广泛而复杂，如复变函数、泛函分析、微分几何、计算方法等，所以数理方程的发展促进了其他数学分支的发展。反过来，其他数学分支的发展，也提供了许多新的数学方法来解决数理方程中的问题，从而推动了数理方程的发展。

因为数理方程以自然科学和技术科学等中的具体问题为研究对象，所以，对数理方程的研究一定是围绕着求解或研究解的性质展开。通过对这些问题的研究或讨论，可使我们对相应的自然现象有更深入的认识，甚至能预见新的自然现象，从而对工程技术问题的解决提出更好的方法。具体而言，数理方程的研究内容主要有：

① 建立数学模型:把实际问题归结为数学问题,也就是归结为数理方程的定解问题。

② 求解定解问题:提供定解问题的解法,给出解的表达式或解的数值形式。

③ 研究解的性质。

第二节 三类方程的推导和常用建模方法

长期以来,人们一直用偏微分方程来描述、解释或预测各种自然现象,并应用于一些学科和工程技术的研究中。偏微分方程应用于实际,首先要把物理问题(实际问题)转化为数学问题,即建立数学模型——微分方程。本节从几个具体的物理问题出发,导出三类典型的偏微分方程——波动方程、热传导方程和调和方程,并从中了解建立数学模型的基本方法和一般步骤。

需要说明的是,数学模型只能反映物理模型的主要的和本质的特征,不能反映其所有性质。为便于建立数学模型,我们对具体的物理模型去粗存精,只给出主要条件,即进行理想化假设。

一、弦振动方程和定解条件

设有一根长为 l 的细小的弹性弦,拉紧后两端固定,并在内部张力作用下处于平衡位置。在弦的某个部位给出微小扰动后,引起部分质点产生位移,内部张力又使周围的质点产生位移,从而形成波的运动。弦振动方程是在 18 世纪由达朗贝尔(d'Alembert)首先加以研究的。下面讨论弦振动问题的数学模型。

(一) 弦振动方程的导出

1. 基本假设

假设弦均匀细长,其横截面积与长度相比可以忽略不计,故可视弦为线,而线密度为常数;再设弦是柔软的、弹性的。考察其拉紧后并在两端固定的情况下所作的微小横振动的运动规律。所谓横振动是指弦的运动在同一平面内进行,在运动过程中,弦上各点的位移垂直于弦的平衡位置。微小是指其绝对位移和相对位移都很小。

为建立数学模型,选取如图 1-1 所示的坐标系:弦的平衡位置所在的直线为 x 轴,弦的左端点为原点,u 轴表示弦上各点的位移情况,函数 $u(x,t)$ 表示 t 时刻 x 处的位移。首先分析物理模型的条件。

① 弦是均匀、细小的。弦的线密度 ρ 为常数,其重力与张力相比可以忽略不计。

② 弦是柔软、弹性的。弦在运动过程中不抵抗弯曲,只抵抗拉压。弦产生

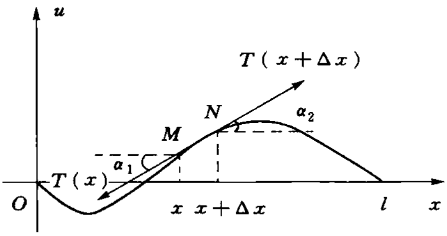

图 1-1

形变时，会产生抵抗形变的弹性力，弹力的变化与张力的变化有关，其大小满足胡克(Hooke)定律，弦上各点的张力总是沿弦的切线方向。

③ 弦作微小横振动。此时，弦的振幅很小，相对变化率也很小，即$\frac{\partial u}{\partial x}$很小，以至于$\frac{\partial u}{\partial x}$的二次项$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$可以忽略不计。

2. 弦振动方程的导出

为了求出 t 时刻 x 处的位移 $u(x,t)$ 所满足的微分方程，需要考察弦振动过程中各点所满足的动力学方程。根据力学理论，在振动过程中，弦上质点满足牛顿(Newton)第二力学定律 $F=ma$，其中 F 为弦上质点在运动方向(u 轴方向)上所受的合力，m 是质点质量，而 a 是运动质点的加速度。为此，采用“微元分析法”，即把弦分成任意小段，并把小段弦看做质点，分析其受力情况，从而导出所要求的微分方程。

设 t 时刻弦的振动状态如图 1-1 所示，在 x 点处任取一小弦段$\widehat{MN}$，其对应的横坐标为区间$[x,x+\Delta x]$，把弦段$\widehat{MN}$看做一质点。作用于$\widehat{MN}$上的力有内部张力和外力，为了方便起见，假设外力沿着 u 轴方向。下面考察弦段$\widehat{MN}$的受力情况。

(1) 张力

设 t 时刻 x 点处的张力为 $T(x,t)$。因为弦段$\widehat{MN}$的弧长

$$\Delta s=\int_x^{x+\Delta x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,\mathrm{d}x\approx\int_x^{x+\Delta x}\mathrm{d}x=\Delta x$$

所以，在所考虑的精度范围内，可以近似地认为弦段$\widehat{MN}$在 t 时刻的长度与零时刻相同，即与平衡时刻的长度相比并没有伸长。由胡克定律知道，弦上各点抵抗拉压的弹力没有变化，即弦在各点所受张力在运动过程中保持不变，也就是张力与时间 t 无关，从而可记 $T(x,t)=T(x)$。不仅如此，还可以证明 $T(x)$与位置 x 也无关。

在 M 点处的张力 $T(x)$ 在 x 轴方向的分量为 $-T(x)\cos\alpha_1$，这里 α_1 是张力 $T(x)$ 的方向与水平方向的夹角，负号表示力的方向与坐标轴的正方向相反。在 N 点处的张力 $T(x+\Delta x)$ 在 x 轴方向的分量为 $T(x+\Delta x)\cos\alpha_2$，$\alpha_2$ 是张力 $T(x+\Delta x)$ 的方向与水平方向的夹角。由于弦沿 u 轴方向运动，所以在 x 轴方向的合力为零，即

$$T(x+\Delta x)\cos\alpha_2 - T(x)\cos\alpha_1 = 0 \tag{1.2.1}$$

根据基本假设③以及三角恒等式，有

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1+(\tan^2\alpha_1)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]^2}} \approx 1$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1+(\tan^2\alpha_2)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}\right]^2}} \approx 1$$

于是，在所考虑的精度范围内，式(1.2.1)变为

$$T(x+\Delta x) - T(x) = 0$$

即张力 $T(x)$ 与位置 x 无关，从而可记 $T(x)=T$(常数)。

由以上分析，t 时刻弦段$\overset{\frown}{MN}$所受张力的合力在 u 轴方向的分量为

$$F_1 = T\sin\alpha_2 - T\sin\alpha_1$$

而

$$\sin\alpha_1 = \frac{\tan\alpha_1}{\sqrt{1+(\tan^2\alpha_1)}} \approx \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x, \quad \sin\alpha_2 = \frac{\tan\alpha_2}{\sqrt{1+(\tan^2\alpha_2)}} \approx \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$$

故

$$F_1 = T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]$$

(2) 外力

为了方便，设在 t 时刻 x 点处沿 u 轴方向上的外力密度(单位长度上的受力)为 $F(x,t)$，则弦段$\overset{\frown}{MN}$上沿 u 轴方向所受的外力为

$$F_2 = \int_x^{x+\Delta x} F(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi$$

(3) 弦段$\overset{\frown}{MN}$的动力学方程

对弦段$\overset{\frown}{MN}$应用牛顿第二力学定律 $F=ma$，有

$$T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] + \int_x^{x+\Delta x} F(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi = \int_x^{x+\Delta x} \rho\,\frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial t^2}\,\mathrm{d}\xi$$

整理上式，得

$$\int_x^{x+\Delta x}\left[T\frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial \xi^2} + F(\xi,t) - \rho\frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial t^2}\right]\mathrm{d}\xi = 0 \tag{1.2.2}$$

根据 x 和 Δx 的任意性以及被积函数的连续性[设 $u(x,t)$ 关于 x,t 有二阶连续偏导数]，由式(1.2.2)有

$$T\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+F(x,t)-\rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=0$$

由此得到位移函数 $u(x,t)$ 所满足的偏微分方程为

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t)\quad (t>0,0<x<l)\qquad(1.2.3)$$

其中 $a^2=\frac{T}{\rho}$ 是弦的固有频率，$f(x,t)=\frac{F(x,t)}{\rho}$ 表示弦在 x 点处 t 时刻沿 u 轴方向上单位质量所受的外力。

若弦在振动过程中不受外力扰动，即 $F\equiv 0$，则方程(1.2.3)变为

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\qquad(1.2.4)$$

通常称方程(1.2.3)和(1.2.4)为**弦振动方程**或**一维波动方程**。方程(1.2.4)称为**自由振动方程**或**一维齐次波动方程**，其表示的弦振动为不受外力扰动的自由振动，方程(1.2.3)称为**强迫振动方程**或**一维非齐次波动方程**，与其对应的振动是受到外力作用的强迫振动。

附注 1 弦振动方程是在一定的理想化假设下导出的，如果基本假设发生改变或者存在一些不能忽略的因素，则需建立新的方程。比如有阻尼的弦振动，由于耗散大小与速度有关，因此在导出的方程中需增加 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 项。

附注 2 弦振动方程的推导方法有多种，这主要与所选取的弦振动所满足的动力学方程有关。上述的"微元分析法"主要利用牛顿质点动力学原理，除此之外，还可以利用能量守恒原理或力学中的哈密顿(Hamilton)原理等。

(二) 弦振动方程的定解条件

方程(1.2.3)和(1.2.4)描述了弦作微小横振动时，位移函数 $u(x,t)$ 所满足的一般规律，它是介质本身所特有的物理规律的数学表达式。我们把表述一般规律的偏微分方程称为**泛定方程**。因为具体的振动与弦在某一时刻的状态和弦在端点处的状态有关，所以要确定具体的振动规律，振动方程还必须有初始条件和边界条件的约束。

1. 初始条件

在弦振动问题中，就时间变量 t 而言，影响弦的振动的前期条件有两个：

$$u\Big|_{t=0}=\varphi(x)\text{(初始位移)},\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)\text{(初始速度)}$$

其中 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 为已知函数。如果 $\varphi(x)=\psi(x)\equiv 0$，则称为**齐次初始条件**，否则

称为**非齐次初始条件**。

2. 边界条件

对于位置变量 x 而言，一般有三类典型边界条件。

(1) 第一类边界条件

已知端点的位移变化，即

$$u(0,t)=\mu_1(t),\quad u(l,t)=\mu_2(t)$$

其中 $\mu_1(t)$，$\mu_2(t)$是已知函数。当 $\mu_1(t)=\mu_2(t)\equiv 0$ 时，称为**第一类齐次边界条件**，表示两端固定；否则称为**第一类非齐次边界条件**。第一类边界条件也称为**狄利克雷(Dirichlet)**边界条件。

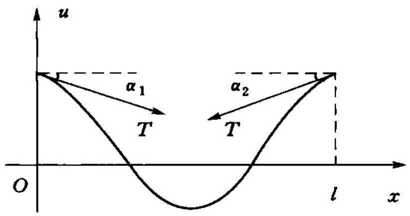

图 1 2

(2) 第二类边界条件

已知端点所受沿 u 轴方向上的外力作用。设 $g_1(t)$，$g_2(t)$分别是弦的左端点和右端点沿 u 轴方向上所受的外力，由图 1-2 和前面的讨论知道，u 在边界上满足

$$T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}+g_1(t)=0,\quad -T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}+g_2(t)=0$$

一般地

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\mu_1(t),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=\mu_2(t)$$

其中 $\mu_1(t)=-\dfrac{g_1(t)}{T}$，$\mu_2(t)=\dfrac{g_2(t)}{T}$是已知函数。当 $\mu_1(t)=\mu_2(t)\equiv 0$ 时，称为**第二类齐次边界条件**，其物理意义是弦在振动时端点不受外力影响，即端点自由；否则称为**第二类非齐次边界条件**。第二类边界条件也称为**黎曼(Riemann)边界条件**。

(3) 第三类边界条件

已知端点所受的沿 u 轴方向上的外力且具有弹性支承。设弦的两端固定于弹性支承(见图 1-3)，k_1，k_2 分别表示两端支承的弹性系数，$u=0$ 为支承的平衡位置。根据作用力与反作用力的关系，t 时刻端点在 u 轴方向上的张力与外力的合力等于支承伸长所产生的弹力，故由胡克定律知

$$T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}+g_1(t)=k_1u(0,t),\quad -T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}+g_2(t)=k_2u(l,t)$$

一般地