高等教育自学考试 计算机类

学习指导与题典

离散数学

周 倜 马爱国 编著

科学出版社
www.sciencep.com

高等教育自学考试 计算机类

学习指导与题典

离散数学

周 倜 马爱国 编著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书是根据全国高等教育自学考试委员会指定教材《离散数学》（独立本科段）编写的同步辅导教材。本书围绕教材，紧扣自考大纲，每一章分为大纲要求、重点难点提要、经典例题及解题技巧、教材练习题同步辅导和自测题5个部分，另外最后还附录了若干模拟题和全国的自考真题，供学生进行最后的自我测试使用。

本书主要面向参加自学考试的学生进行辅助学习使用，也可以作为高等学校本科、专科学生进行参考之用。

图书在版编目（CIP）数据

学习指导与题典：离散数学/周倜，马爱国编著. —北京：科学出版社，2004

（高等教育自学考试 计算机类）

ISBN 7-03-012486-3

Ⅰ.学… Ⅱ.①周…②马… Ⅲ.离散数学－高等教育－自学考试－自学参考资料 Ⅳ.TP303

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第092251号

策划编辑：李 娜/责任编辑：丁 波

责任印制：吕春珉/封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年1月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2004年1月第一次印刷 印张：12

印数：1－5 000 字数：268 000

定价：17.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉）

高等教育自学考试　计算机类

《学习指导与题典》丛书

（第二批）

编委会

主　编

乔川龙

副主编

马爱国

编委会委员

（以姓氏笔画为序）

王　兵　王　鹏　王睿伯

马爱国　李　霞　乔川龙

周　倜　薛倡新　潘　莉

前　言

高等教育自学考试在我国方兴未艾，据不完全统计，全国每年参加自学考试的考生以百万计，尤其是计算机专业的考生更是占相当的部分。相对于全日制高等学校的学生来说，自考学生的学习受到多方面因素的制约，有如下三个特点：第一，他们一般不会像全日制学生那样系统地参加学习，大多是通过自学的形式完成学业；第二，在参加自考的学生中有相当一部分是已经参加工作的在职人员，因此，在学习时间上，他们又不可能像全日制学生那样有充分的保证；第三，不在学校里学习，少了一种氛围，有问题往往不能及时得到解答，因此，学习效果也是大打折扣。

基于对自学考试学生在学习中存在上述困难的深刻认识，我们认为帮助他们就是一件十分重要的事情，一本好的辅导书对他们来说就显得很重要了，这也是我们写这本书的出发点。

分重要的事情，一本好的辅导书对他们来说就显得很重要了，这也是我们写这本书的出发点。

经过多年的自学考试辅导的教学经验和对考生心理的把握，我们自信能写出一套真正适合他们，帮助他们在学习上达到事半功倍效果的辅导书，本套书的特点如下：

1．围绕大纲、内容详略得当。针对大纲中对内容掌握要求的4个不同的层次，以及对近几年考试试题重点的分析，我们在内容提要中对那些大纲要求高、考试出题频繁的内容做了重点提示，而对那些大纲要求不高，考试中出题又很少涉及的地方，我们都是一带而过，甚至不提及。这样，考生在复习中，参照我们的辅导书，有针对性地学习，不需要面面俱到就可以达到效果。

2．规划合理、层次泾渭分明。每一章基本按照大纲要求、重点难点提要、经典例题及解题技巧、教材练习题同步辅导和自测题5个部分进行安排，这样，考生可以先知道本章的考试要求，然后带着要求看内容，掌握了内容以后就可以看例题，最后做习题，可以说各个环节都紧密相扣，最后的模拟题更是对考生考前实战冲刺大有裨益。

3．注重全局、不搞题海战术。可以说本书中到底要编写多少习题，是最令编者头疼的事，如果编写很多的题给考生，我们认为至少存在以下两个方面的问题：一是题海战术往往使考生对教材上的内容还没有深刻理解的时候便急于做题，这样的话势必是吃夹生饭，有些问题当时看了答案，好像理解了，但是当再出现类似的题时，还是不会；二是大量的习题会占用考生大量的时间，对自学的学生来说，他们不同于全日制学生有大量的学习时间，所以题量过大，势必影响他们的工作。基于以上方面的考虑，我们对每一章习题都是尽量做到精简，尽量选择那些有代表性，能够起到举一反三作用的题让考生进行自测，这样就会达到非常理想的效果。

4．成系统、注意概念把握。《离散数学》的学习对全日制的学生来说都是难点，因为它非常抽象，且涉及的概念之多是其他课程所难以比拟的，对于靠业余时间自学的自考生而言，其学习难度可想而知，所以，我们在充分考虑自学考生的实际难处的基础上，对本辅导书进行了精密的构思，对各种概念都做了深入的分析，把彼此之间有关联的概念放在一起加以理解，这样给学生的感觉就不是非常零散的，而是形成一个整体概念，从而使它真正能够助考生一臂

之力。

对于考生的学习，我们的意见是在通读指定教材的基础上，再辅以辅导书；或者边阅读教材，边看辅导书，以巩固自己对所学知识的理解。切记要注重对基本知识的掌握，而不要好高骛远。通过对近几年全国的考试试题分析我们认为，试题 80%以上考的都是对基本知识的掌握，也符合大纲对考题比例分配的要求，即“识记”为 20%，“领会”为 30%，“简单应用”为 30%，“综合应用”为 20%，4 个层次的难易程度分别为：易、较易、较难、难。按照以上要求，我们在模拟题中也是严格按照这个比例来精心选题，所以考生在做这些题时，更像是进行了一次实战演练，定会对考生大有裨益。因此，可以说如果考生能够合理安排自己的学习的话，一定会在实际考试中取得好成绩。

参加本书编写的作者都是长年参加自考教学、经验丰富的老师，他们和自考学生打交道，可以说考生需要什么样的辅导书他们是最清楚的，因此写书的时候会充分考虑考生的需求，写出真正符合考生需要的自学辅导书。

本书由乔川龙负责组稿，周倜，马爱国编写，国防科技大学计算机学院的一些老师对本书的编写也提出了很好的意见，在此一并致谢。由于编者水平有限，不妥之处在所难免，恳请各位考生以及同仁不吝赐教，以便再版时进行修正。

编　者

于国防科技大学计算机学院

2003 年 9 月

目　　录

第 1 章　命题逻辑

1.1　大纲要求

课程内容

- 命题概念。
- 基本联结词与复合命题。
- 合式公式与联结词优先次序。
- 命题公式的等价变换、命题符号化。
- 构造真值表证明等价式。
- 不构造真值表证明蕴含式。
- 范式与主范式，$\sum$与$\prod$互化。
- 应用 P、T 规则的推理证明。
- CP 规则与间接推理证明。

自学要求

数理逻辑的任务是采用数学方法研究抽象的思维规律，研究的中心问题是推理，而推理基本要素是命题，故学习本章首先要深刻理解命题的概念。理解原子命题与复合命题的关系，在了解复合命题的基础上，理解联结词的定义。命题演算中两个重要内容是命题公式的范式表示与命题的推理理论，前者主要是命题公式化简与主范式表示，后者则需熟悉直接推理与间接推理两种方法。

本章重点是命题概念及其表示、命题公式化简、主范式及其互化、P 规则、T 规则以及 CP 规则。难点是推理理论及应用。

考核重点和难点

- 命题概念，要求达到“领会”层次。
  命题与真值的概念。
  复合命题与联结词的关系。
  命题公式与联结词的简化。
- 命题公式化简要求达到“简单应用”层次。
  命题等价式与蕴含式的定义。
  构造真值表证明等价式。
  不构造真值表证明蕴含式与等价式。

- 命题公式的形式化描述要求达到“简单应用”层次。
  命题符号化与翻译。
  命题翻译中歧义性消除。
- 范式与主范式要求达到“简单应用”层次。
  合取范式与析取范式概念。
  主合取范式与主析取范式的求法。
  ∏和∑的命题公式互化。
- 推理理论要求达到“简单应用”层次。
  P 规则、T 规则的推理证明。
  应用 CP 规则等间接推理证明。

1.2 重点难点提要

1.2.1 命题概念

学习本章首先要深刻理解命题的概念。理解原子命题与复合命题的关系，在了解复合命题的基础上，理解联结词的定义。

真值：就是语句为真或假的性质。真值只有真和假两种，分别记为 T 和 F。注意，真值并不是说该语句的值必为真。

命题：具有惟一真值的陈述句称为命题，又简称语句。注意，命题必须有的两个条件：它是一个陈述句；它具有惟一的一个真值。

任一命题必有其真值，也称这个命题的值。注意，当一个陈述句能够分辨其值的真假时（也就是说，总可以肯定是其中的某一个），它就是命题，与是否知道它是真还是假无关。

在数理逻辑中，一般用 P、Q 等符号来表示命题。表示命题的符号称为命题标识符。

一个命题标识符如表示确定命题，就称为命题常量。如果一个命题标识符只标志为命题的位置，就称为命题变元。注意，由于命题变元可以表示任意命题，所以它不能确定真值，此时的命题变元不是命题。当命题变元 P 用一个特定命题去代替，此时 P 可以确定真值，称作对 P 的指派。

1.2.2 复合命题与联结词

不包含任何联结词的命题叫做原子命题，至少包含一个联结词的命题称为复合命题。常用的联结词有：否定、合取、析取、条件、双条件。

定义 1.2.1 设 P 为一命题，P 的否定是一个新的命题，记作 $\neg P$。若 P 为 T，则 $\neg P$ 为 F；若 P 为 F，则 $\neg P$ 为 T。注意：也可用 ~ 来表示 $\neg$。

定义 1.2.2 两个命题 P 和 Q 的合取是一个复合命题，记作 $P\wedge Q$。当且仅当 P，Q 同时为 T 时，$P\wedge Q$ 为 T。在其他情况下，$P\wedge Q$ 的真值为 F。

定义 1.2.3 两个命题 P 和 Q 的析取是一个复合命题，记作 $P\vee Q$。当且仅当 P，Q 同时为 F 时，$P\vee Q$ 为 F。在其他情况下，$P\vee Q$ 的真值为 T。

定义 1.2.4 给定两个命题 P 和 Q，其条件命题是一个复合命题，记作 $P\rightarrow Q$。当且仅当 P 的真值为 T，Q 的真值为 F 时，$P\rightarrow Q$ 的真值为 F。在其他情况下，$P\rightarrow Q$ 的真值为 T。

定义 1.2.5 给定两个命题 P 和 Q，其复合命题 $P \leftrightarrows Q$，称作双条件命题。当 P，Q 真值相同时，$P \leftrightarrows Q$ 为 T。在其他情况下，$P \leftrightarrows Q$ 的真值为 F。注意，也可用 iff 和↔表示双条件⇆。

学习本节时有以下几个方面要注意的：

（1）复合命题与联结词是密切相关的，不包含联结词的命题就是原子命题，至少包含一个联结词的命题才是复合命题。

（2）复合命题的真值只取决于构成它们的各原子命题的真值，而与它们的内容含义无关。对联结词所联结的两原子命题之间有无关系无关。

（3）∧、∨、⇆具有对称性，¬、→无对称性。对称性是指真值表中复合命题的真值与原子命题的真值之间的关系。

1.2.3 命题公式与真值表

定义 1.2.6 命题演算的合式公式（wff）规定为：

（1）单个命题变元本身是一个合式公式。

（2）如果 A 是合式公式，那么 $\neg A$ 是合式公式。

（3）如果 A 和 B 是合式公式，那么（$A \wedge B$）、（$A \vee B$）、（$A \rightarrow B$）和（$A \leftrightarrows B$）都是合式公式。

（4）当且仅当有限次地应用（1）（2）（3）所得到的包含命题变元、联结词和圆括号的符号串是合式公式。

今后将合式公式（即命题公式）简称公式。为了简化公式，可按以下由高到低的优先级别进行简化："( )"，"¬"，"∧"，"∨"，"→"，"⇆"。

定义 1.2.7 设 A_i 是公式 A 的一部分，且 A_i 是一个合式公式，称 A_i 是 A 的子公式。

定义 1.2.8 设 P 为一命题公式，P_1，P_2，…，P_n 为出现在 P 中的所有命题变元，对 P_1，P_2，…，P_n 指定一组真值称为对 P 的一种指派。若指定的一种指派使 P 的值为真，则称这组值为成真指派；若指定的一种指派，使 P 的值为假，则称这组值为成假指派。

一个命题的真值表应该列出其所有指派的取值情况。一般来说，由 n 个命题变元组成的命题公式共有 $2n$ 种真值情况。命题公式 P 在所有指派下的取值情况列成的表，称为 P 的真值表。

定义 1.2.9 给定两个命题公式 A 和 B，设 P_1，P_2，…，P_n 为所有出现于 A 和 B 中的原子变元，若给 P_1，P_2，…，P_n 任一组真值指派，A 和 B 的真值都相同，称 A 和 B 是等价的，记作 $A \Leftrightarrow B$。

定义 1.2.10 设 A 为一命题公式，若 A 在它的各种指派情况下，其取值均为真，则称公式 A 为重言式或永真式。

定义 1.2.11 设 A 为一命题公式，若 A 在它的各种指派情况下，其取值均为假，则称公式 A 为矛盾式或永假式。

定义 1.2.12 设 A 为一命题公式，若 A 在各种真值指派下至少存在一组成真指派，则称 A 是可满足式。

通常，把永真式记为 T，把永假式记为 F。

表 1-1 列出了常用的命题定律，都可以用真值表加以验证。

表 1-1

序 号	公 式	注 解
E1	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$	对合律
E2	$P \vee P \Leftrightarrow P,\ P \wedge P \Leftrightarrow P$	幂等律
E3	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$, $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	结合律
E4	$P \wedge Q \Leftrightarrow P \wedge Q,\ P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	交换律
E5	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$, $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	分配律
E6	$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P,\ P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$	吸收律
E7	$\neg (P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$，$\neg (P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	德摩根律
E8	$P \vee \mathrm{F} \Leftrightarrow P$，$P \wedge \mathrm{T} \Leftrightarrow P$	同一律
E9	$P \vee \mathrm{T} \Leftrightarrow \mathrm{T}$，$P \wedge \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F}$	零律
E10	$P \vee \neg P \Leftrightarrow \mathrm{T}$，$P \wedge \neg P \Leftrightarrow \mathrm{T}$	否定律

1.2.4 等价变换与蕴含式

定理 1.2.1 设 X 是合式公式 A 的子公式，若有 Y 也是一个合式公式，且 $X \Leftrightarrow Y$，如果将 A 中的 X 用 Y 置换，得到公式 B，则 $A \Leftrightarrow B$。

定理 1.2.2 设 A、B 为两个命题公式，$A \Leftrightarrow B$，当且仅当 $A \leftrightarrow B$ 为一重言式（永真式）。

定义 1.2.13 当且仅当 $P \rightarrow Q$ 是一个重言式时，称“P 蕴含 Q”，并记作 $P \Rightarrow Q$。蕴含式又称永真条件式。

蕴含式有 4 个性质：

（1）对任意公式 A，有 $A \Rightarrow A$；

（2）对任意公式 A，B 和 C，若 $A \Rightarrow B$、$B \Rightarrow C$ 则 $A \Rightarrow C$；

（3）对任意公式 A，B 和 C，若 $A \Rightarrow B$、$A \Rightarrow C$ 则 $A \Rightarrow (B \wedge C)$；

（4）对任意公式 A，B 和 C，若 $A \Rightarrow C$、$B \Rightarrow C$ 则 $(A \vee B) \Rightarrow C$。

常用蕴含式如表 1-2 所示。

定理 1.2.3 设 P、Q 为任意两个命题公式，$P \Leftrightarrow Q$ 的充分必要条件是 $P \Rightarrow Q$，$Q \Rightarrow P$。

表 1-2

序 号	公 式	备 注
I1	$P \wedge Q \Rightarrow P$	化简式
I2	$P \wedge Q \Rightarrow Q$	化简式
I3	$P \Rightarrow P \vee Q$	附加式
I4	$\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$	变形附加式
I5	$Q \Rightarrow P \rightarrow Q$	变形附加式
I6	$\neg (P \rightarrow Q) \Rightarrow P$	变形简化式
I7	$\neg (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$	变形简化式
I8	$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$	假言推理

续表

序 号	公 式	备 注
I9	$\neg Q\wedge(P\rightarrow Q)\Rightarrow\neg P$	拒取式
I10	$\neg P\wedge(P\vee Q)\Rightarrow Q$	析取三段论
I11	$(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R)\Rightarrow P\rightarrow R$	条件三段论
I12	$(P\vee Q)\wedge(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)\Rightarrow R$	
I13	$(P\leftrightarrows Q)\wedge(Q\leftrightarrows R)\Rightarrow P\leftrightarrows R$	双条件三段论
I14	$(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(P\wedge R)\Rightarrow Q\rightarrow S$	合取构造二难
I15	$(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(P\vee R)\Rightarrow Q\vee S$	析取构造二难
I16	$P\rightarrow Q\Rightarrow(P\vee R)\rightarrow(Q\vee R)$	前后件附加
I17	$P\rightarrow Q\Rightarrow(P\wedge R)\rightarrow(Q\wedge R)$	前后件附加

1.2.5 最小联结词组与范式

通过等价变换，我们可以把带→、⇆的公式全部化成只带 {¬，∧}或只带{¬，∨}的命题公式，这种只带此两种联结词的公式就是标准形式，即范式。

定义 1.2.14 一个命题公式称为合取范式，当且仅当它具有形式 $A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_n\ (n\geqslant 1)$，其中 A_1，A_2，…，A_n 都是有命题变元及其否定所组成的析取式。

定义 1.2.15 一个命题公式称为析取范式，当且仅当它具有形式 $A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_n\ (n\geqslant 1)$，其中 A_1，A_2，…，A_n 都是有命题变元及其否定所组成的合取式。

定义 1.2.16 n 个命题变元（不是命题公式）组成的合取式，称为布尔合取或小项。其中每个变元与它的否定不能同时存在，但两者必须出现（其中之一）且仅出现一次。

小项的三个性质为：

（1）每个小项具有一个相应编码，当该编码与其真实指派相同时，该小项真值为 T。其余各种指派情况下均为 F。

（2）任意两个不同小项的合取式永假。

（3）全体小项的析取式为永真。

定义 1.2.17 对于给定的命题公式，如果有一个等价公式，它仅由小项的析取所组成，则该等价式称作原式的主析取范式。

定理 1.2.4 在真值表中，一个公式的真值为 T 的指派所对应的小项的析取，即为此公式的主析取范式。

由定理 1.2.4 知，永假式没有主析取范式。

定理 1.2.5 任意含 n 个命题变元的非永假命题公式，其主析取范式是惟一的。

定义 1.2.18 n 个命题变元的析取式称作布尔析取式或大项。其中每个变元与它的否定不能同时存在，但两者必须出现（其中之一）且仅出现一次。

大项的三个性质为：

（1）每个大项具有一个相应编码，当该编码与其真实指派相同时，该大项真值为 F。其余各种指派情况下均为 T。

（2）任意两个不同大项的析取式永真。

（3）全体大项的合取式为永假。

定理 1.2.6 在真值表中，一个公式的真值为 F 的指派所对应的大项的合取，即为此公式的主合取范式。

由定理 1.2.6 知，永真式没有主合取范式。

定理 1.2.7 任意含 n 个命题变元的非永真命题公式，其主合取范式是惟一的。

求一个公式 G 所对应的主析取、主合取范式可采用真值表法、公式的等值演算法、公式的主析取与主合取范式转换法。其中，最方便、最不易出错的方法是真值表法。

1.2.6 推理理论

对于推理理论，主要要掌握判别有效结论的过程（也即论证过程）。

判断推理是否正确的方法有：真值表法、主范式方法、等值演算法和构造论证法。其中构造论证法是本节的重点。

定义 1.2.19 设 H_1，H_2，…，H_n，C 是命题公式，当且仅当 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$，称 C 是一组前提 H_1，H_2，…，H_n 的有效结论。

常用推理规则：

（1）P 规则：前提引入规则，就是在证明的任何步骤上都可以引入前提。

（2）T 规则：结论引入规则，就是在证明的任何步骤上证明的结论都可以为后续证明的前提。

（3）置换规则：也是 T 规则，就是可以在证明的任何步骤上进行命题公式的等值替换。

还有一个定理就是 CP 规则：

若 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge R \Rightarrow C$，则 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow R \rightarrow C$。

定理 1.2.8 推理 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \vdash C$ 是有效推理的充分必要条件是 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \rightarrow C$ 为永真式。

定义 1.2.20 设 H_1，H_2，…，H_n 是可满足式，则称 H_1，H_2，…，H_n 是相容的，若 H_1，H_2，…，H_n 是永假式，则称 H_1，H_2，…，H_n 是不相容的。

定理 1.2.9 若 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C$ 为永假式，则 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \vdash C$ 成立。

定理 1.2.10 CP 规则：若 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge R \Rightarrow C$，则 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow R \rightarrow C$。

1.3 经典例题及解题技巧

1. 判断下列语句是否为命题，并讨论命题的真值。

（1）$2x-3=0$。

（2）$\sqrt{2}$ 小于 $\dfrac{\pi}{3}$。

（3）如果 $2\times2=5$，则雪是白的。

（4）如果太阳从西方升起，你就可以长生不老。

（5）如果太阳从东方升起，你就可以长生不老。

（6）请勿吸烟。

（7）你喜欢鲁迅的作品吗？

（8）我正在说谎。

（9）对面的小店关门了。

（10）你明年就会死去。

分析与解答：命题是具有确定真假意义的陈述句。因此可得出以下解答：

题号	是否为命题	命题的真值
（1）	不是	（没有确定的真假）
（2）	是	F
（3）	是	T
（4）	是	T
（5）	是	F
（6）	不是	（祈使句）
（7）	不是	（疑问句）

后面的三题要特别说明：（8）虽然是陈述句，但它语义自相矛盾，称为说谎者悖论；尽管语句（9）中的“关门”有歧义，语句（10）的真假意义目前暂无法确定，但它们都是命题。

2. 证明用$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrows$不能表示$\neg$。

证明：要证明用$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrows$不能表示$\neg$，只需证明仅用$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrows$不能表达出含$\neg$的某些公式即可。

因为$P\wedge P \Leftrightarrow P$；$P\vee P \Leftrightarrow P$；$P\rightarrow P \Leftrightarrow T$；$P\leftrightarrows P \Leftrightarrow T$。增加$T$之后，$T\wedge P\Leftrightarrow P\wedge T\Leftrightarrow P$；$P\vee T \Leftrightarrow T\vee P\Leftrightarrow T$；$T\rightarrow P\Leftrightarrow P$；$P\rightarrow T\Leftrightarrow T$；$T\leftrightarrows P \Leftrightarrow P\leftrightarrows T \Leftrightarrow P$。这也就是说，由$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrows$只能得出$P$或$T$，不能得出$\neg P$。

3. 符号化下列命题：

（1）辱骂和恐吓决不是战斗。

（2）他在办公室或家里。

分析与解答：给定一个命题进行符号化，就是要把这个命题表达成符合规定的命题表达式，因此在具体表达式里，首先要列出原子命题，然后根据给定命题的含义，把所设的原子命题用适当的联结词连接起来，在这个过程中，确定原子命题和选用联结词，主要应根据命题的实际含义，而不拘泥于原句形式。如在本题（1）中：实际含义是辱骂不是战斗，恐吓也不是战斗，辱骂和恐吓在一起也不是战斗。在（2）中：“他”不可能同时在办公室和家里，所以此处的“或”实际上是不相容的“或”。因此可得出以下解答：

（1）设P：辱骂不是战斗；Q：恐吓不是战斗。符号化为：$P\vee Q$。

（2）设P：他在办公室；Q：他在家里。符号化为：$(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$。

4. 构造真值表证明下列等价式：

（1）$P\wedge\neg Q\rightarrow\neg P\vee\neg Q$；

（2）$P\rightarrow(Q\rightarrow P) \Leftrightarrow\neg P\rightarrow (P\rightarrow Q)$。

分析与解答：用构造真值表法证明时，可以由合式公式的最小组成成分的真值确定通过联结词关联后的子合式公式的真值，在有较小的子和公式时的真值确定通过联结词关联后的较大的子合式公式的真值，直到最后形成所需的合式公式的真值为止。

真值表构造如下（合式公式的真值标在相应的联结词上），见表 1-3：

表 1-3

P	Q	P	$\wedge$	$\neg$	Q	$\rightarrow$	$\neg$	P	$\vee$	$\neg$	Q
F	F	F	F	T	F	T	T	F	T	T	F
F	T	F	F	F	T	T	T	F	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T	F	T	T	T	F
T	T	T	F	F	T	T	F	T	F	F	T

在本题中需证明合式公式 $P\rightarrow(Q\rightarrow P)\leftrightarrows\neg P\rightarrow(P\rightarrow Q)$的真值恒为 T。

真值表构造如下（合式公式的真值标在相应的联结词上），见表 1-4：

表 1-4

P	Q	P	$\rightarrow$	$(Q$	$\rightarrow$	P	$\leftrightarrows$	$\neg$	P	$\rightarrow$	$(P$	$\rightarrow$	$Q)$
F	F	F	T	F	T	F	T	T	F	T	F	T	F
F	T	F	T	T	F	F	T	T	F	T	F	T	T
T	F	T	T	F	T	T	T	F	T	T	T	F	F
T	T	T	T	T	T	T	T	F	T	T	T	T	T

上述真值表说明 $P\rightarrow(Q\rightarrow P)\leftrightarrows\neg P\rightarrow(P\rightarrow Q)$为永真式。

所以，$P\rightarrow(Q\rightarrow P)\ \Leftrightarrow\ \neg P\rightarrow(P\rightarrow Q)$。

5. 使用基本等价式证明下述等价式。

（1）$\sim(\sim P\vee\sim Q)\vee\sim(\sim P\vee Q)\Leftrightarrow P$；

（2）$(P\vee\sim Q)\wedge(P\vee Q)\wedge(\sim P\vee\sim Q)\Leftrightarrow\sim(\sim P\vee Q)$。

分析与解答：本题要求用书中所列的等价式证明结论，这种等价推演方法在逻辑证明中经常用到，应熟练掌握。在下面推演过程中，当前要进行等价变换的子合式公式标上了下划线，以方便阅读。

$$
\begin{aligned}
&\underline{\neg(\neg P\vee\neg Q)}\vee\neg(\neg P\vee Q)\\
\Leftrightarrow\ &(\underline{\neg\neg P}\wedge\neg\neg Q)\vee\neg(\neg P\vee Q)\\
\Leftrightarrow\ &(P\wedge\underline{\neg\neg Q})\vee\neg(\neg P\vee Q)\\
\Leftrightarrow\ &(P\wedge Q)\vee\underline{\neg(\neg P\vee Q)}\\
\Leftrightarrow\ &(P\wedge Q)\vee(\underline{\neg\neg P}\wedge\neg Q)\\
\Leftrightarrow\ &\underline{(P\wedge Q)}\vee\underline{(P\wedge\neg Q)}\\
\Leftrightarrow\ &P\wedge\underline{(Q\vee\neg Q)}\\
\Leftrightarrow\ &P\wedge \mathrm{T}\\
\Leftrightarrow\ &P
\end{aligned}
$$

所以，$\neg(\neg P\vee\neg Q)\vee\neg(\neg P\vee Q)\Leftrightarrow P$。

$$
\begin{aligned}
&\underline{(P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q)}\wedge(\neg P\vee\neg Q)\\
\Leftrightarrow\ &(P\vee\underline{(\neg Q\wedge Q)})\wedge(\neg P\vee\neg Q)\\
\Leftrightarrow\ &\underline{(P\vee \mathrm{F})}\wedge(\neg P\vee\neg Q)\\
\Leftrightarrow\ &\underline{P\wedge(\neg P\vee\neg Q)}\\
\Leftrightarrow\ &\underline{(P\wedge\neg P)}\vee(P\wedge\neg Q)
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow\ \underline{F} \vee \underline{(P \wedge \neg Q)}$

$\Leftrightarrow\ (\underline{P} \wedge \neg Q)$

$\Leftrightarrow\ \underline{(\neg\neg P \wedge \neg Q)}$

$\Leftrightarrow\ \neg(\neg P \vee Q)$

所以，$(P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)\ \Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)$。

6. 证明下列蕴含式：

（1）$P\wedge Q \Rightarrow P\to Q$；

（2）$P\to Q \Rightarrow P\to P\wedge Q$；

（3）$(P\vee\neg P\to Q)\to(P\vee\neg P\to R)\Rightarrow Q\to R$。

分析与解答：与例题 4 类似，但在证明蕴含式时，可以运用等价变换和蕴含式来证明。详细解答如下：

（1）$P\wedge Q\Rightarrow Q\Rightarrow P\to Q$。

（2）$P\to Q\Rightarrow P\wedge P\to P\wedge Q\Rightarrow P\to P\wedge Q$。

（3）

$$
\begin{aligned}
&(P\vee\neg P\to Q)\to(P\vee\neg P\to R)\\
\Leftrightarrow\ &(T\to Q)\to(P\vee\neg P\to R)\\
\Leftrightarrow\ &(T\to Q)\to(T\to R)\\
\Leftrightarrow\ &(\neg F\vee Q)\to(T\to R)\\
\Leftrightarrow\ &(\neg F\vee Q)\to(\neg F\vee R)\\
\Leftrightarrow\ &(T\vee Q)\to(\neg F\vee R)\\
\Leftrightarrow\ &(T\vee Q)\to(T\vee R)\\
\Leftrightarrow\ &(Q\vee T)\to(R\vee T)\\
\Leftrightarrow\ &Q\to R
\end{aligned}
$$

上述均为等价变换，所以蕴含式也成立。

7. 求下列合式公式的主范式：

（a）$\neg P\vee\neg Q\to(P\leftrightarrows\neg Q)$；（b）$(P\to Q\wedge R)\wedge(\neg P\to\neg Q\wedge\neg R)$。

分析与解答：求给定命题公式的主析取范式与主合取范式，通常有两种方法，即列表法和公式推导法。

（1）列表法。列出给定公式的真值表，其真值为 T 的指派所对应的小项析取，即为此公式的主析取范式。同理，其真值为 F 的指派所对应的大项的合取，即为此公式的主合取范式。

（2）公式推导法。在应用公式推导法时，首先要将公式中的条件和双条件联结词化去，使整个公式化归为析取范式，然后删去其中所有的永假析取项，再将析取式中重复出现的合取项和相同的变元合并，最后对合取项添加没有出现的命题变元，就是合取（$P\vee\neg P$），经过化简整理，即可得到主析取范式。

求主合取范式的方法基本与上述方法相同。只是在开始时，将公式化为合取范式，在添加项时，要析取永假式$(P\wedge\neg P)$。

在做这类题目时，也可利用主范式的编码方法，在求出主合取范式的编码后，可立即写出主析取范式的编码。对于给定 n 个变元的命题公式，这两种编码共有 $2n$ 项。在应用编码表达时，需特别注意的是大项编码对应的指派与小项编码对应的指派情况相反。

在本例题中，采用公式推导法求取主范式。