数学奥林匹克辅导丛书

构造法解题

余红兵 严镇军 编著

OLYMPIAD

中国科学技术大学出版社

《数学奥林匹克辅导丛书》之五

构造法解题

余红兵　严镇军　　编著

中国科学技术大学出版社

2001・合肥

图书在版编目(CIP)数据

构造法解题/余红兵,严镇军编著. —2版. —合肥:中国科学技术大学出版社,2001

(数学奥林匹克辅导丛书)

ISBN-7- 312-00876-3

Ⅰ.构… Ⅱ.①余… ②严… Ⅲ.数学—竞赛—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 20619 号

《数学奥林匹克辅导丛书》之五

构 造 法 解 题

余红兵 严镇军 编著

*

中国科学技术大学出版社出版发行

(安徽省合肥市金寨路 96 号,230026)

中国科学技术大学印刷厂印刷

全国新华书店经销

*

开本 787×1092/32 印张:4.25 字数 94 千

2001 年 7 月第二版 2001 年 7 月第二次印刷

印数:8001-13000 册

ISBN7-312-00876-3/G·150 定价:5.50 元

序

目前，有关中学生复习资料、课外辅导读物已经出版得很多了，甚至使一些中学生感到不堪负担，所以再要出版这类读物一定要注重质量，否则“天下文章一大抄”，又无创新之见，未免有误人子弟之嫌.写这类读物如何才能确保质量呢？我想华罗庚老师的两句名言：“居高才能临下，深入才能浅出”，应该成为写这类读物的指导思想，他本人生前所写的一系列科普读物，包括为中学生写的一些书，也堪称是这方面的范本.

中国科学技术大学数学系的老师们，在从事繁重的教学与科研工作的同时，一向对中学数学的活动十分关注，无论对数学竞赛，还是为中学生及中学教师开设讲座，出版中学读物都十分热心，这也许是受华罗庚老师的亲炙，耳濡目染的缘故，所以至今这仍然是中国科学技术大学数学系的一个传统和特色.

我看了几本他们编写的“数学奥林匹克辅导丛书”原稿，感到他们是按照华罗庚老师的教诲认真写作的，所以乐之为序.

龚　昇

前　言

这本小册子，通过初等数学，特别是数学竞赛中的问题，介绍解题中的一些构造性思想和方法.

构造法解题，归结起来，大致可以分为两个方面.一方面，它是一种辅助手段，通过构造适当的辅助量(如图形、模型、函数等)转换命题，以帮助解题.在前三节中，我们撷取一些读者较为熟悉的内容来体现构造法的这种特点.另一方面，构造性方法提供了证明存在性命题的一种有效手段，本书的第4节至第7节侧重介绍这种解题思想及常用技巧，第8节则是这些内容的补充.

书中有些问题的解法属于单墫先生，对他允许我们引用这些内容深致谢意.

余红兵

目　　次

1 初等几何中的例子

论证几何命题的过程，可以说是反复运用“构造”——这一辅助手段的过程．当我们试图证明一个几何命题：若 A（已知条件），则 B（结论）．即

$$A \Rightarrow B$$

时，首先就应当作一个与问题有关的图，并将图中的点、线等标以适当的字母（记号），这便构造了一个所证命题的辅助模型，然后再对这个模型进行思索和论证．

由于许多几何问题的已知条件与结论之间的关系非常隐蔽，仅从上述模型不容易找到证题的思路．一般来说，用综合法证明 $A \Rightarrow B$ 时，要经过许多中间的步骤，也就是说，要经过如下的程序：

$$A \Rightarrow \text{中间结论 } C \Rightarrow \text{中间结论 } D \Rightarrow \cdots \Rightarrow B$$

为了得到这些中间结论，我们经常动用辅助手段，即添加辅助线，构造出能揭示已知条件和结论之间关系的辅助图形，从而找到论证的途径．

我们来看勾股定理的下述证法，这是古希腊几何大师欧几里德作出的，请读者注意论证中所构造的辅助图形．

例 1 （勾股定理） 证明：任意直角三角形的斜边（弦）长的平方等于两直角边（勾、股）长的平方和．

证明 首先，我们作出一个（辅助模型）直角三角形 ABC

(图 1),这样,需要证明的便是:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \tag{1}$$

再分别以 AB、BC、AC 为一边向外侧构作(辅助图形)正方形 $ABHI$, $BCFG$, $ACED$ (图 2),显然,(1)式等价于(转换命题!):

$$(ABHI) = (ACED) + (BCFG) \tag{2}$$

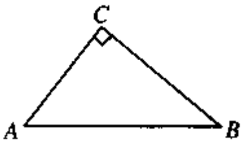

图 1

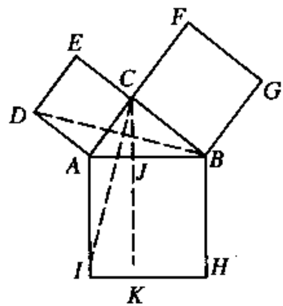

图 2

这里($ABHI$)表示正方形 $ABHI$ 的面积,其余类似.

为了证明(2),我们作 $CJ \perp AB$,并延长交 HI 于 K,连结 BD, CI. 由这样构作的辅助图形,结论几乎唾手可得. 显然

$$\triangle ABD \cong \triangle AIC$$

所以 $(ACED) = 2(\triangle ABD) = 2(\triangle AIC) = (AIKJ)$

同理 $(BCFG) = (BJKH)$

又有 $(AIKJ) + (BJKH) = (ABHI)$

故(2)式成立.

勾股定理有许多基于构造的证法,图 3 及图 4 提供了两个这方面的例子,请读者自己完成论证.

三角形和圆是欧氏几何中最基本的图形,它们以及它们的组合图形具有十分丰富的性质,在论证中,构造适当的三角

形或圆则可期望利用这些性质，因此是一种常能奏效的辅助手段.

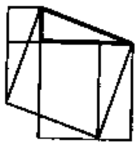

图 3

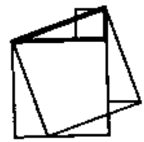

图 4

例 2 设 P 是三角形 ABC 中任意一点，证明：

$$AB + AC > PB + PC$$

证明 如图 5 所示，延长 BP 交 AC 边于 D 点，我们构造出了对论证有帮助的三角形 ABD 及 CDP，由此易得(中间结论)：

$$AB + AD > BD = BP + PD \tag{1}$$

及

$$PD+DC>PC \tag{2}$$

将(1)与(2)相加，得出(注意 $AD+DC=AC$)：

$$AB+AC>BP+PC$$

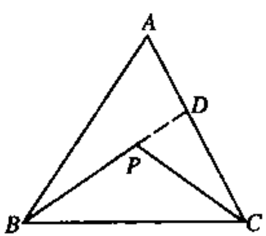

图 5

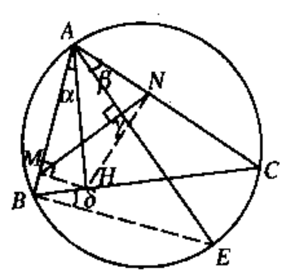

图 6

例 3 如图 6，设 AH 是锐角三角形 ABC 的高，以 AH

为直径的圆分别交 AB,AC 于 M,N(M,N 与 A 不同),过 A 作直线 $L_A \perp MN$;类似地作直线 L_B,L_C,证明:L_A,L_B,L_C 三线共点.

证明 作三角形 ABC 的外接圆,设 L_A 与此圆相交于 E 点,连结 BE,则

$$\beta=\delta$$

连结 HM,HN,因 A,M,H,N 四点共圆,故 $\alpha=\gamma$. 又显然 $\beta=\gamma$,所以

$$\alpha=\beta$$

从而 $$\alpha=\delta$$

故 $$\angle ABE=\delta+\angle ABC=\alpha+\angle ABC=90^\circ$$

由此可见,AE 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径,即 L_A 通过圆心.

同理可证,L_B,L_C 都过圆心,所以 L_A,L_B,L_C 三线共点.

下面的例子是著名的欧拉定理,请注意论证中辅助圆及辅助三角形的作用.

例 4 (欧拉定理) 设三角形 ABC 的外心为 O,内心为 I(图 7),R 及 r 分别是外接圆和内切圆半径,设 $OI=d$.

证明:$d^2=R^2-2Rr$

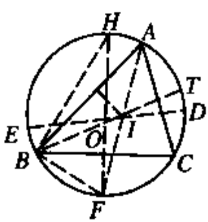

图 7

证明 求证的结论等价于

$$(R+d)(R-d)=2Rr$$

我们先在图中构造出长为 $R+d$ 及 $R-d$ 的线段.

画出三角形 ABC 的外接圆,把 OI 两端延长交外接圆于 D,E,则

$$EI=R+d, \qquad DI=R-d$$

于是，问题转化成证明

$$EI \cdot ID = 2Rr \tag{1}$$

连结 AI 并延长交外接圆于 F，由相交弦定理，(1)式等价于

$$AI \cdot IF = 2Rr \tag{2}$$

作 $IG \perp AB$（G 为垂足），则 $IG=r$，且

$$AI=\frac{r}{\sin \frac{A}{2}}$$

由(2)式可见，为完成定理的证明，现在就转化为证明

$$IF = 2R\sin \frac{A}{2} \tag{3}$$

作直径 FH，连 BF，BH，便构造了一个直角三角形 FBH，且 $\angle H=\angle BAF=\frac{\angle A}{2}$，故

$$BF = HF\sin \frac{A}{2} = 2R\sin \frac{A}{2} \tag{4}$$

比较(3)、(4)可见，剩下的事情是证明

$$BF = IF$$

而这几乎是显然的，请读者自己考虑.

从上面的例子可以看出，实现几何命题论证的关键在于动用辅助手段，即逐步添加辅助线，以构造出揭示已知与未知关系的图形，限于本书的目的，我们不打算去讨论构作辅助线的各种办法，下面只简要介绍一下引用“参数”来探求辅助线的作法，这种“待定尝试”的想法在第 5 节中还将提到. 例如，为了证明关于线段的等式

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{e}{f} \tag{1}$$

这 a,b,c,d,e,f 都是已知图形中的线段长，可以引入待定线段 x，使得

$$\frac{a}{b}=\frac{e}{x} \tag{2}$$

这较(1)要简单. 我们设法找出这样的线段 x(例如,利用或制造相似关系),并证明

$$\frac{c}{d}=\frac{x}{f} \tag{3}$$

最后将(2)、(3)相乘即得求证等式(1).

例 5 已知圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于 M. 证明

$$\frac{AB\cdot AD}{BC\cdot CD}=\frac{AM}{CM}$$

证 如图 8,令

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AM}{x}$$

利用相似形不难找到未知线段 x. 这只要作 ME 交 AB 于 E,使$\angle AME=\angle ABC$. 则$\triangle ABC\sim\triangle AME$,从而

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AM}{ME} \tag{1}$$

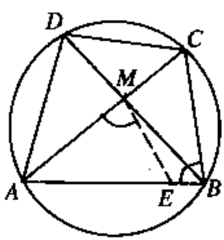

图 8

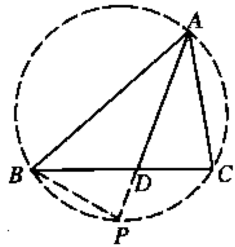

图 9

即 ME 就是要找的未知线段 x. 连结 CE,由$\angle AME=\angle ABC$,知 B,C,M,E 四点共圆,从而

$$\angle ACE=\angle ABD=\angle ACD$$

又 $\angle ADC=180°-\angle ABC=180°-\angle AME=\angle CME$

所以$\triangle ADC\backsim\triangle EMC$,于是

$$\frac{AD}{CD}=\frac{EM}{CM} \tag{2}$$

(1)、(2)两式相乘即得欲证等式.

例 6 如图 9,设 AD 是$\triangle ABC$ 的角平分线,证明

$$AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot CD$$

证 引进待定线段 x,y,满足

$$\begin{cases} AB\cdot AC=AD\cdot x & (1)\\ BD\cdot CD=AD\cdot y & (2)\\ x-y=AD & (3)\end{cases}$$

显然,从这三个式子消去 x,y,即得欲证等式.

由(3)式,可将 AD 延长至(待定)点 P,令 $AP=x,PD=y$,则 $x-y=AD$. 这时(2)式成为

$$BD\cdot CD=AD\cdot PD$$

即 P,A,B,C 四点共圆,由此得到证明本题的辅助线的作法:延长 AD 使与$\triangle ABC$ 的外接圆相交于点 P,连结 BP. 由$\triangle ABP\backsim\triangle ADC$,即证得(1)式. 请读者用综合法来表述我们的论证.

完善图形是几何论证中非常有用的辅助手段,特别是常把半个图形完善成整个图形(例如将等腰直角三角形完善成正方形;把半圆完善为圆;等等),便于利用对称性,以找到证题的途径.

例 7 如图 10,在三角形 ABC 中,D 是 AB 的中点,点 E,F 分别在 AC,BC 上,证明

$$(\triangle DEF) \leqslant (\triangle ADE) + (\triangle BDF)$$

证 我们先将三角形 ABC 完善成平行四边形. 作 $AC_1 /\!/ BC$，使 $AC_1 = BC$，得到平行四边形 AC_1BC.

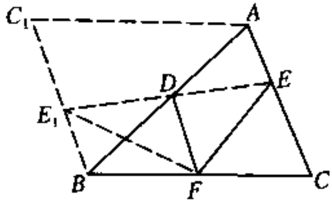

图 10

在 BC_1 上取 E_1 点，使 $BE_1 = AE$，易于证明

$$\triangle ADE \cong \triangle BDE_1$$

故 $\angle ADE = \angle BDE_1$. 从而 E, D, E_1 三点共线，所以

$$\begin{aligned}(\triangle DEF) &= (\triangle DE_1F) \leqslant (BFDE_1) \\ &= (\triangle BDE_1) + (\triangle BDF) \\ &= (\triangle ADE) + (\triangle BDF)\end{aligned}$$

例 8 如图 11，设 $ABCD$ 为半圆，AC 与 BD 相交于 E，$EF \perp AD$（F 为垂足），证明

$$AC \cdot BD + AB \cdot CD = AD(BF + FC)$$

证 将半圆完善成整个圆，作 $CC_1 \perp AD$ 交圆于另一点 C_1；连结 AC_1, FC_1, DC_1，则

$$CF = C_1F, AC = AC_1, CD = C_1D$$

由 B, E, F, A 四点共圆及 C, E, F, D 四点共圆，有

$$\begin{aligned}\angle BFA &= \angle BEA = \angle CED \\ &= \angle CFD = \angle C_1FD\end{aligned}$$

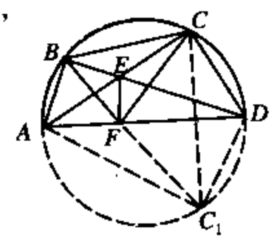

图 11

故 B, F, C 三点共线. 且

$$BF + FC = BC_1$$

由托莱密定理，得

$$AB \cdot C_1D + AC_1 \cdot BD = AD \cdot BC_1$$

即 $$AB \cdot CD + AC \cdot BD = AD(BF + FC)$$

完善图形这种构造性思想，也可用来帮助解决某些立体几何问题，我们特别提一下把四面体完善成平行六面体的两种方法，参看图 12 及图 13（图中 $A\text{-}BCD$ 是给定的四面体）.

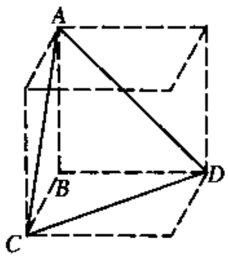

图 12

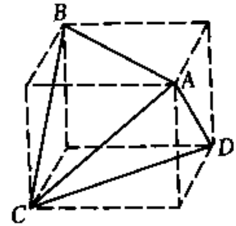

图 13

例 9　如图 14，已知四面体 $A_1\text{-}ABD$ 中，棱 AA_1、AB 及 AD 互相垂直，且它们的长度分别为 a,b,c.

1)求证：顶点 A，$\triangle A_1BD$ 的重心 M 及此四面体的外接球的球心 O 共线.

2)求外接球的半径.

证　1)　如图，将四面体 $A_1\text{-}ABD$ 完善为直平行六面体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$. 于是，四面体的外接球，也是直平行六面体的外接球，且外接球球心 O 位于直平行六面体的对角线 AC_1 上.

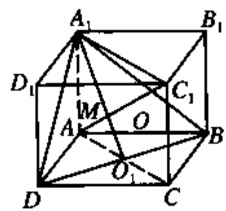

图 14

设 AC，BD 相交于 O_1，则 AO_1 是 $\triangle ABD$ 的边 BD 上的中线。设 AO_1 与 AC_1 相交于 M（AO_1，AC_1 都在矩形 ACC_1A_1 所在平面上）. 易知

$$\triangle A_1C_1M \sim \triangle AO_1M$$

故

$$\frac{A_1M}{MO_1}=\frac{AC_1}{AO_1}=2$$

所以，M 即是 $\triangle ABD$ 的重心，这就证得 A,M,O 三点共线.

2)由前面的讨论可知，外接球的直径等于直平行六面体的对角线 AC_1 之长，即等于 $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

2　辅助图形解代数题

本节简要地讨论用构造辅助图形来解决一些代数问题.

众所周知,数与形有着紧密的联系,在一定条件下它们可以互相转化,许多数量关系可以用几何图形来实现.例如,正实数 a,b 在几何上可实现为两条线段长;$a+b,a-b(a>b)$ 可以实现为两条线段长的和与差.我们举几个代数式与几何定理的对应关系(以下各字母均为正数):

$$a^2+b^2=c^2 \Leftrightarrow \text{勾股定理及逆定理}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\\ \text{或 } ad=bc\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{相似三角形对应边成比例}\\ \text{平行线截割定理}\\ \text{相交弦定理,圆幂定理}\end{array}\right.$$

$$x^2=ab\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{射影定理}\\ \text{圆幂定理}\end{array}\right.$$

用这些基本的对应关系为“元件”,可以将一些代数问题中的数量关系,组合构造出一个辅助图形,以利用几何知识来解决问题.这实质上是构造代数问题的一个几何模型来转化命题,而在这个模型上,问题易于处理.

例 1　设 a,b,x,y 均是实数,且满足条件:

$$a^2+b^2=1,\ x^2+y^2=1,\ ab+xy=0$$

证明:

$$a^2+x^2=1,\ b^2+y^2=1,\ ax+by=0$$