高等教育教材

经济应用数学（上册）

Jingji Yingyong Shuxue

（第三版）

主　编　何良材

副主编　何中市

重庆大学出版社

高等教育教材

经济应用数学

上 册

(第三版)

主　编　何良材
副主编　何中市
编　者　何良材　何中市
冯海亮　毛　琪

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书是根据国家教育部1998年制定的《经济数学基础》教学大纲并结合当前教育实际及社会需要编写而成的.

全书分上、下两册，四大部分共计12章. 上册含微积分学，下册含矩阵方法及其应用、概率统计和数学实验.

本书着重介绍经济数学的基本知识，针对当前教育的实际与特点，特别注重阐明基本概念、基本方法的实质意义、来源背景、做法步骤及应用去向，同时也注重培养学生的抽象思维、观察综合、应用计算及分析、解决问题的素质和能力.

本书可供高等教育财经与管理类本、专科使用，加“*”号的内容可供经、管类有关专业本科选用，也可供工科少学时有关专业学生及经济管理实际工作者与兴趣爱好者选读.

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学. 上册/何良材主编. —3版. —重庆：重庆大学出版社，2003.7

ISBN 7-5624-2791-7

Ⅰ.经... Ⅱ.何... Ⅲ.经济数学—高等学校—教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第008102号

高等教育教材

经济应用数学

上 册

(第三版)

主 编 何良材

副主编 何中市

责任编辑：曾令维 版式设计：曾令维

责任校对：何建云 责任印制：秦 梅

*

重庆大学出版社出版发行

出版人：张鸽盛

社址：重庆市沙坪坝正街174号重庆大学(A区)内

邮编：400044

电话：(023) 65102378 65105781

传真：(023) 65103686 65105565

网址：http://www.cqup.com.cn

邮箱：fxk@cqup.com.cn (市场营销部)

全国新华书店经销

重庆铜梁正兴印务有限公司印刷

*

开本：850×1168 1/32 印张：13.75 字数：369千

1993年9月第1版 2003年7月第3版 2003年7月第7次印刷

印数：19 001—22 000

ISBN 7-5624-2791-7/F·319 定价：18.00元

编者的话

本书是根据国家教育部1998年制定的《经济数学基础》教学大纲并结合当前教育实际及社会需要编写而成的.

全书分上、下两册,四大部分共计12章.上册含微积分学,下册含矩阵方法及其应用、概率统计和数学实验.第一章,函数、极限与连续.第二章,微分学及其应用.第三章,积分学及其应用.第四章,无穷级数.第五章,向量代数与空间解析几何.第六章,矩阵方法.第七章,线性方程组.第八章,线性规划.第九章,投入产出法.第十章,概率论基础.第十一章,数理统计.第十二章,数学实验——Maple及其应用.

本书第一、二、三、四、十、十一6章由何良材教授编写,第六、七、八、九4章由何中市教授编写,第五章由冯海亮副教授编写,第十二章由毛琪副教授编写.

全书由何良材教授担任主编,何中市教授担任副主编.

本书经历从教案讲义→正式出版第一版→第二版3个阶段,连续使用20余年,印刷10次达3万册.首先,作者的教案讲义先后经重庆大学、原四川省干部函授管理学院重庆分院、原四川省函授大学重庆分校、陕西机械学院重庆函授中心、全国成人高教自考重庆教学班等有关专业使用长达数十遍,历时十余年,用量约1万册.于1993年由重庆大学出版社正式出版发行(第一版),又于1999年修订出版(第二版)至今.共6次印刷、印数逼近2万册,数十所院校使用.教材使用**量大、面广、历史长**,深受读者欢迎和教师好评,现已脱销售毕,决定修订再版(第三版)发行.经作者广泛征求意见,认真总结,再次锤炼基本内容,加强经济应用,增添必要章节(重积分、向量代数、方差分析和数学实验等),拓宽题目类型,以求更加完善.

全书具有以下特色:

1. 本着教材是科学论著与教学经验相结合的产物，在保证大纲内容科学性与系统性的前提下，不片面追求完整性和严密性. 针对当前教育实际与特点，突出“以应用为目的，必需够用为度”的指导思想，力图构筑以“掌握基本概念、理论、方法和使用技能，强化实际应用”为重点，努力适应教学的灵活性和适用性，把编写教材的立足点放在培养高级应用型人才的目标上.

2. 内容既简明扼要，又密切联系经济实际. 既体现内容选取与实际需要相结合，又注重基本理论与经济应用相联系.

3. 削枝强干，层次分明，重点突出，难点清晰. 对基本知识充分阐明其实质意义、来源背景、做法步骤及应用去向，在论述与处理上颇具新意.

4. 文字叙述上力求浅出深入，形、数结合，形象易懂. 注重培养学生的抽象思维、观察综合、应用计算以及分析、解决问题的素质与能力.

5. 书中配有大量自测试题和综合自测试题. 另外还编有与教材配套的《学习指导书》(含内容辅导与提要、范例分析、习题选解及概念思考题等部分).

本书可供高等教育财经与管理类本、专科使用，加“*”号的内容可供经、管类有关专业本科选用；也可供工科少学时有关专业学生及经济管理实际工作者与兴趣爱好者选读.

本书由知名数学家段虞荣教授、重庆大学刘松教授审阅，并提出许多中肯有益的修正意见. 本书自始至终得到重庆大学成人教育学院的热忱关心和大力支持；以及重庆大学应用技术学院、数理学院、贸易与行政管理学院、经济与工商管理学院等单位有关同志的支持与帮助，作者在此向他们谨致谢意.

由于作者水平有限，不妥与错误之处在所难免，恳求读者不吝赐教.

编著者

2002 年 12 月于重庆大学

目　录

引 言

数学是研究现实世界中的空间形式和数量关系的科学，初等数学是常量为主的数学，而高等数学则是变数为主的数学，其中核心部分是微积分．高等数学和其他科学一样，也是随着社会生产的不断发展而产生和发展起来的．它是人们认识世界、改造世界不可缺少的有力工具，为了帮助读者对高等数学有一粗略了解，先谈谈下面两个问题，或许多少有所帮助.

一、微积分的产生和发展

追溯历史，无论在我国还是西方，任何一门科学都是在社会生产的推动下产生和发展起来的．事实证明，微积分的产生和发展也是以生产劳动实践为基础，且与科学地继承和发展数学上长期积累的研究成果是分不开的.

在我国古代，已孕育着微积分思想的萌芽，如西汉刘歆在《西京杂记》中提到的“记里车”，东汉张衡制造的“浑天仪”，蜀汉诸葛亮使用并改进的“木牛流马”，都要设计制造圆形的物件，要求更精确的圆周率，从而产生了魏晋时刘徽提出的“割圆术”. 他从圆内接的正多边形做起，令边数成倍地增加，即从 6 而 12，而 24，而 48，……而 384，……而 3 072. 用这个正 3 072 边形面积“近似代替”圆面积，就得 π 的更精确值 3. 141 6，“割之弥细，所失弥少；割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”，这里就已包含着微积分中“无限细分，无限求和”的思想方法．又如，隋代建造的跨度达 37m 的大石拱桥——赵州桥，系用一条条长方形条石砌成，一段段直的条石却砌成了一整条弧形曲线的拱圈，这就是微积分“以直代曲”(或“以常代变”)这个基本思想的生动原型.

16 世纪的欧洲，处于资本主义萌芽时期，为适应资本积累的

需要，生产力得到很大的发展. 当时，生产和技术中的大量问题迫切要求力学、天文学等基础科学的发展，这些科学是离不开数学的，因而也就推动了数学的发展. 航海事业(如美洲的发现)需要确定船只在海洋中的位置，这就要求精确地测定地球的经纬度和制造精确的时钟，于是促进了对天体运行的深入研究．船舶形体的研制改进，需要探讨流体及物体在流体中运动的规律．战争中用枪炮发射弹丸，要求炮弹打得准确，导致对抛物体运动的研究. 机械、建筑、水利等方面也都向数学提出了种种新课题. 在实际需要的基础上，通过大量观察和系统实验，人们逐步用新的数学方法帮助总结事物的运动规律. 例如，克卜莱根据长期天文观察资料运用数学推导，总结出行星三大运动规律；伽利略系统地研究了落体速度变化的规律，并提出了惯性定律，把物理实验与数学方法结合起来，精确地用数学公式描述了物理学规律. 以机械运动中的基本问题之一的速度、路程和时间三者关系为例，若在等速运动的条件下，用初等数学方法立即可获得解决：速度＝路程÷时间；路程＝速度×时间. 但是，在变速运动中，也就是在速度随时间变化的条件下，只用初等数学的方法就难以解决了. 究其原因，是因为在变速运动的条件下，路程除以时间，只能得到在这段时间内的平均速度，而不能得出所要知道的每一瞬时的速度. 同样地，由于速度随时间在变化，简单地用速度乘以时间也不能准确地计算出路程来. 这就要求数学必须突破研究常数的范围，提供研究物体运动及变化过程的新工具——变数数学. 微积分作为变数数学的主要部分，正是适应当时客观现实的需要，在有了变数的基础上产生的. 正如恩格斯所指出的“数学的转折点是笛卡儿的变数．有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学．有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了. 而它们也就立刻产生，并且是由牛顿和莱布尼兹大体上完成的，但不是由他们发明的.”

二、微积分如何解决实际问题

这里来分析微积分中的两个典型问题，从中可以大致了解微

积分解决实际问题的基本思想和求解方法.

问题 1　自由落体的速度问题.

由物理学可知，自由落体的运动规律为

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

式中：s —— 路程；t —— 时间；$g=9.8\mathrm{m/s^2}$ 是重力加速度，从而上述问题成为：$s=4.9t^2$，求 $t=t_0$ 时的瞬时速度. 为方便直观起见，不妨设 $t_0=1\mathrm{s}$ 来进行讨论.

解　第一步　分析问题，提出矛盾

若物体做等速直线运动，显然，速度 = 路程 / 时间，记为

$$v=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}$$

但对于自由落体来说，情况就大不相同了，由于自由落体的速度是随时间的变化而改变的，用上述公式只能得到落体在一段时间间隔内的平均速度，而不是物体的瞬时速度. 因此，若要以计算等速运动速度的方法为基础，来解决变速运动的速度问题，这里就遇到速度的“变”与“不变”(即“变”与“常”) 的矛盾.

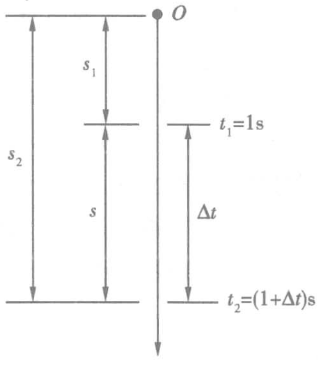


图 0.1

第二步　寻求做法，解决问题

从自由落体运动的整个过程来看，速度的变化是显著的，但若

在时刻 $t=1\mathrm{s}$ 邻近的很短的一段时间内，比如 $t=1\mathrm{s}$ 到 $t=1.1\mathrm{s}$ 这段时间内，其速度变化的差异不大，因此在这段很短的时间内，可以把变速运动近似地视为等速运动，从而可得出落体在 $t=1\mathrm{s}$ 到 $t=1.1\mathrm{s}$ 这段时间内的平均速度(图 0.1) 为

$$\bar{v}_1=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{4.9\times(1.1)^2\mathrm{m}-4.9\times(1)^2\mathrm{m}}{1.1\mathrm{s}-1\mathrm{s}}$$

$$=\frac{1.029\mathrm{m}}{0.1\mathrm{s}}=10.29\mathrm{m/s}$$

若再将时间间隔缩短一些，落体速度的变化就更小，从而求得的平均速度就更接近于落体在时刻 $t=1\mathrm{s}$ 时的瞬时速度，比如时刻 $t=1\mathrm{s}$ 到 $t=1.01\mathrm{s}$ 这段时间落体的平均速度为

$$\bar{v}_2=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{4.9\times(1.01)^2\mathrm{m}-4.9\times(1)^2\mathrm{m}}{1.01\mathrm{s}-1\mathrm{s}}=9.849\ \mathrm{m/s}$$

$\bar{v}_2$ 就比 $\bar{v}_1$ 更接近于落体在时刻 $t=1\mathrm{s}$ 时的瞬时速度. 如此继续将时间间隔缩短下去，一般地，落在 $t=1\mathrm{s}$ 到 $t=(1+\Delta t)\mathrm{s}$ 这段时间内的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{4.9\times(1+\Delta t)^2\mathrm{m}-4.9\times(1)^2\mathrm{m}}{(1+\Delta t)\mathrm{s}-1\mathrm{s}}=9.8\ \mathrm{m/s}+4.9\times\Delta t\ \mathrm{m/s}$$

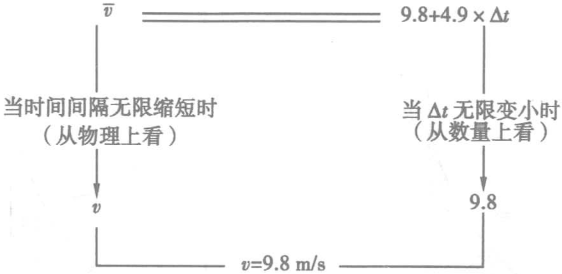
但无论这段时间的长度 Δt 多么短，总不是落体在时刻 $t=1\mathrm{s}$ 时的瞬时速度，而只是落体的平均速度，即 $\bar{v}\approx v$. 于是又产生了“近似”与“精确”的矛盾，但是已经看到这样一个事实：Δt 越小，平均速度就越接近于瞬时速度，当 Δt 无限变小时，平均速度就无限接近于瞬时速度. 这就是说，在时间间隔 Δt 无限变小的过程中，平均速度就向瞬时速度转化. 这里，转化的条件是 Δt“无限变小”，因此，可以从 Δt“无限变小”的过程中，考察平均速度 $\bar{v}$ 的“变化趋势”，来寻求瞬时速度 v.

从平均速度的数学表达式

$$\bar{v}=9.8+4.9\Delta t$$

可以看出，当 Δt 无限变小时，$\bar{v}$ 就“无限接近”于常数值 9.8，因此，自由落体在 $t=1\mathrm{s}$ 时的瞬时速度为 9.8 m/s，即 $v=9.8\ \mathrm{m/s}$.

上面由平均速度向瞬时速度转化的分析，可图示如下：



综合以上讨论，可得到求自由落体瞬时速度的方法如下：

第一步　以“不变代变“(或以常代变)，求出 $t=1\mathrm{s}$ 到 $t(1+\Delta t)\mathrm{s}$ 这段时间内的平均速度 $\bar{v}$.

第二步　在 Δt“无限变小”的过程中，考察平均速度 $\bar{v}$ 的变化趋势，从而得出其自由落体在 $t=1\mathrm{s}$ 时的瞬时速度.

问题 2　曲边三角形面积问题

在生产实际中，往往需要求由曲线所围成的平面图形的面积. 例如，为了控制流量，需要估算河道横断面面积；为了计算船舶的排水量，需要知道船体横截面面积等. 关于计算曲线围成图形面积的一般讨论，将在第三章中进行，这里先看一简单例子.

计算由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $x=1$，$y=0$ 所围成的曲边三角形的面积(图 0.2).

解　第一步　分析问题，提出矛盾

对于矩形来说，由于其底边上的各点处的高度始终保持不变，可由初等数学方法计算，即

$$\text{矩形面积} = \text{高} \times \text{底}$$

但对于曲边三角形来说，情况就不同. 它的底边上各点处的高度 $y=x^2$ 是变化的，故不能直接应用上面的公式来计算曲边三角形的面积. 现在要以矩形面积的计算公式来解决此曲边三角形面积的计算问题，就遇到高度“变”与“不变”的矛盾.

第二步　寻求做法，解决问题

若从整个底边上来看，曲边三角形 OAB 的高度变化的差异自然比较大，但从底边上很小的局部来看，高度的变化就较小，可以

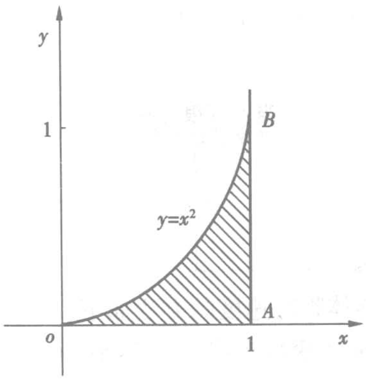


图 0.2

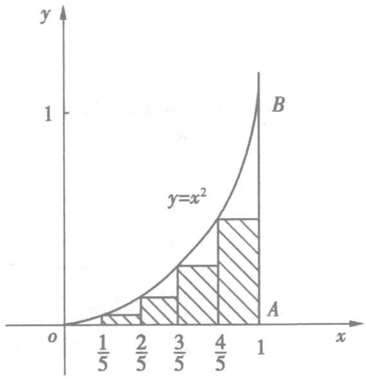


图 0.3

近似地看做不变，从而求出曲边三角形面积的近似值.

例如，把曲边三角形 OAB 底边分为五等分，过每个分点引平行于 y 轴的直线，曲边三角形就被分成五个窄条，由于每个窄条上的高度变化差异不大，就可以用"不变代变"的方法算出台阶形（图 0.3 阴影部分）的面积为

$$A_5=\left(\frac{0}{5}\right)^2\times\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^2\times\frac{1}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\frac{1}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{1}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2\times\frac{1}{5}$$

$$=\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2\right]\times\frac{1}{5}=0.24$$

把 $A_5=0.24$ 作为曲边三角形面积 A 的近似值，当分段的长度再短一些，高度的变化就更小，从而求得的台阶形面积更加接近于曲边三角形的面积. 例如，把曲边三角形底边十等分，相应台阶（图 0.4 的阴影部分）的面积为

$$A_{10}=\left[\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{2}{10}\right)^2+\cdots+\left(\frac{9}{10}\right)^2\right]\times\frac{1}{10}=0.285$$

这里的 $A_{10}=0.285$ 比 $A_5=0.24$ 更接近于曲边三角形面积 A. 如此继续下去，一般地，把曲边三角形底边 n 等分，相应的台阶形（图 0.5 的阴影部分）的面积为

$$A_n=\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]\times\frac{1}{n}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

但无论分段的长度多么小，所求得的台阶形面积都只是曲边三角形面积的近似值，而不是它的精确值. 这就要求进一步解决“近似”与“精确”的矛盾.

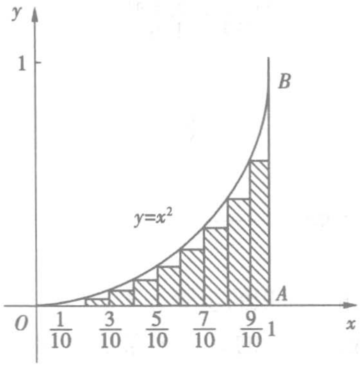


图 0.4

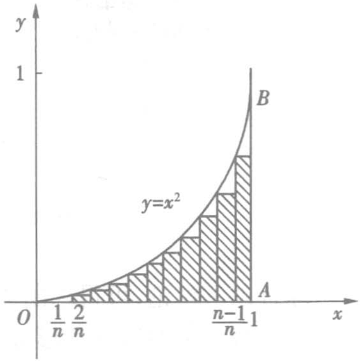


图 0.5

把图 0.3、图 0.4、图 0.5 相比较，可直观地看出“分段的个数 n 越多，台阶形的面积就越接近于曲边三角形的面积；在 n“无限增大”的过程中，台阶形的面积就“无限接近”曲边三角形面积. 这就是说，在 n“无限增大”（即分段长度“无限变小”）的过程中，台阶形面积就向曲边三角形面积转化. 因此，可以从 n 无限增大的过程中，考察台阶形面积 A_n 的变化趋势，来寻找曲边三角形的面积 A.

从 A_n 的数学表达式

$$A_n=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

可以看出，在 n 无限增大的过程中，A_n“无限趋近”于一个确定常数$\frac{1}{3}$. 因此，可以认为曲边三角形 OAB 面积是$\frac{1}{3}$，即

$$A=\frac{1}{3}\text{（平方单位）}$$

以上关于台阶形面积向曲边三角形面积转化的分析，可图示