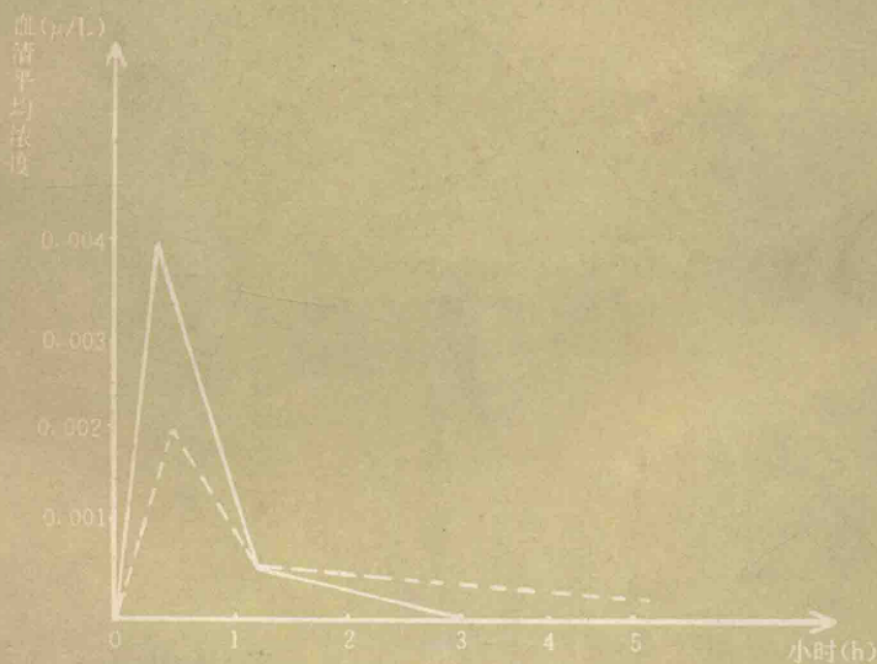


全国中等卫生学校教材

数学

吴忠安 张秀伟 主编



新华出版社

主编 吴忠安 张秀伟 号 011 字登德(京)
副主编 全国中等卫生学校教材

编委 高茂先 侯永清 郭世银 汉陆清
李文章 于敬文 万敏生 王淑美

数 学

吴忠安 侯永清 郭世银 王淑美
宋北雷 李文章 郭世银 王淑美

主编 吴忠安 张秀伟 宋北雷 李文章

副主编 李文章 郭世银 王淑美 宋北雷

1821

1 数

中国中

数出封疏出半通

(号 66 第大西口角直京北)

编印 1 编印 步听安泰凉山

编印 1 编印 步听安泰凉山

1987年12月第1版 1987年12月第1次印刷

1987年12月第1版 1987年12月第1次印刷

新华出版社

52.05.81 角宝

(京)新登字 110 号

图书在版编目(CIP)数据

数学/吴忠安主编. —北京:新华出版社, 1994. 12

中等专业学校教材

ISBN 7—5011—2742—5

I. 数… II. 吴… III. 数学—中等专业学校—教材 IV. 01

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 13492 号

中等卫生学校教材

数 学

*

吴忠安 张秀伟 主编

新华出版社出版

(北京宣武门西大街 57 号)

山东泰安师专印刷厂印刷

新华书店总店北京发行所经销

*

787×1092 毫米 16 开 14.75 印张 340 千字

1994 年 12 月第 1 版 1994 年 12 月第 1 次印刷

印数 1—3500 册

定价: 12.80 元

主 编

副主编

编 委

主 审

吴忠安

李秀珍

高庆义

于文章

汉陆清

吴忠安

宋业雷

赵国胜

张振福

郭世银

赵国胜

张秀伟

宋 非

张永清

于敬之

米宝友

李秀珍

岳卫红

张秀伟

姚来琴

滕永胜

张恩璞

郭世银

万桃先

孙士静

李 辉

杨 鹏

张恩璞

陶淑娟

岳卫红

汉陆清

王淑英

苏有刚

宋 非

赵学贵

张永清

高庆义

中等卫校数学教材

编委会

一九九五年三月

编写说明

本书是根据一九九四年卫生部颁发的《中等卫生学校各专业数学教学计划》的要求,结合学习医卫专业理论所必须的数学基础编写的。

该书供社区医学专业、护理专业、助产专业、卫生专业、放射专业、药剂专业、临床检验专业、检验专业、中药专业、妇幼专业、口腔专业、卫生检验专业、人口理论专业,共计十三个专业使用。

该书兼顾各专业的教学计划,本着内容覆盖大纲的原则,对教材的内容、习题、复习题,请各校在教学中根据专业教学计划的要求选择使用。

在编写过程中,得到山东省卫生厅科教处和泰安卫生学校的大力支持,又承蒙赵国胜先生在繁忙的工作中用大量的精力审阅全稿,并提出修改意见,在此一并表示真诚的谢意。

编写学校有:泰安卫生学校、淄博卫生学校、国家计生委泰安人口学校、烟台护士学校、单县卫生学校、胜利石油卫生学校、枣庄煤矿卫生学校、济宁卫生学校、威海卫生学校、益都卫生学校、青岛卫生学校等。

由于我们水平有限,加之编写时间比较短促,教材中存在的缺点和错误,请各校师生不吝赐教和指正。

中等卫校数学教材
编委会
一九九五年三月

第一章 集合的基本原理	1
第一节 集合	1
第二节 集合的运算	10
第三节 集合的包含关系	15
第四节 集合的交、并、补运算	20
第五章 概率初步	113
第一节 事件与概率	113
第二节 等可能事件的概率	116
第三节 互斥事件有一全概率公式	120
第四节 相互独立事件同时发生的概率	124

第一章 医用数学基础

目 录

第一章 医用数学基础.....	1
第一节 溶液浓度和比例在医药上的应用.....	1
第二节 对数.....	7
第二章 集合与函数	19
第一节 集合	19
第二节 对应	27
第三节 函数	29
第四节 幂函数、指数函数、对数函数	38
第五节 直线方程、直线型经验公式.....	48
第三章 三角函数	61
第一节 任意角的三角函数	61
第二节 正弦函数的图象和性质	77
第三节 两角和与差的正弦和余弦	86
第四章 排列、组合和二项式定理.....	96
第一节 两个基本原理	96
第二节 排列	99
第三节 组合.....	104
第四节 二项式定理.....	109
第五章 概率初步.....	113
第一节 事件与概率.....	113
第二节 等可能事件的概率.....	116
第三节 互斥事件有一个发生的概率.....	120
第四节 相互独立事件同时发生的概率.....	124

第五节 独立重复试验的概率.....	128
第六章 数列和数列的极限.....	133
第一节 数列.....	133
第二节 数列的极限.....	145
第七章 微积分初步.....	154
第一节 函数的极限.....	154
第二节 导数和微分.....	165
第三节 不定积分和定积分.....	185
第八章 空间直角坐标系简介及视图.....	201
第一节 空间直角坐标系简介.....	201
第二节 视图.....	204
附表.....	215
一、常用对数表.....	215
二、反对数表.....	218
三、三角函数表.....	221

第一章 医用数学基础

第一节 溶液浓度和比例在医药上的应用

无论在药剂配制、药物检验还是临床用药等方面,溶液均占有很大的比重.因此,了解溶液性质,正确掌握溶液中各种成分之间量的关系及计算,对保证药物溶液的质量和用药的安全有效是极为重要的.

(一)溶液浓度在医药上的应用

在医药卫生工作中,我们常采用质量浓度、质量分数、体积分数来表示溶液的浓度.

1. 质量浓度

物质 B 的质量浓度就是物质 B 的质量除以溶液的体积.质量浓度的表示符号为 ρ_B ,物质 B 的名称在符号中必须注明,如生理盐水的质量浓度记为 ρ_{NaCl} 或 $\rho(\text{NaCl})$.

计算公式:物质 B 的质量浓度 $\rho_B = \frac{m_B}{v}$.

质量浓度使用国际单位制(简称 SI).化学上多用它的分数单位 g/L(读做克每升),mg/L(毫克每升).在医药工作中溶质为固体时常用这种浓度.

例 1 输液用葡萄糖注射液 0.5L 中含葡萄糖($\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$)22.7g,试求它的质量浓度.

解: $\rho(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6) = \frac{m}{v} = \frac{22.7\text{g}}{0.5\text{L}} = 45.4\text{g/L}$.

答:该葡萄糖注射液的质量浓度为 45.4g/L.

例 2 某制剂室每月生产三批生理盐水(质量浓度为 9g/L 的氯化钠溶液),每批 1000 瓶,每瓶 0.5L,问月消耗氯化钠多少千克?

解: 月生产生理盐水的总体积 $v = 0.5\text{L} \times 1000 \times 3 = 1500\text{L}$.

由 $\rho_B = \frac{m_B}{v}$

得 $m(\text{NaCl}) = \rho(\text{NaCl}) \cdot v = 9\text{g/L} \times 1500\text{L} = 13500\text{g} = 13.5\text{kg}$.

答:该制剂室每月消耗氯化钠 13.5kg.

2. 质量分数

物质 B 的质量分数就是物质 B 的质量与溶液的质量之比.质量分数的表示符号为 ω_B ,物质 B 的名称要注明,如浓硫酸的质量分数记为 $\omega_{\text{H}_2\text{SO}_4}$.

计算公式:物质 B 的质量分数 $\omega_B = \frac{m_B}{m}$.

显然,质量分数是一个没有单位的纯小数.但要注意溶质和溶液的质量单位应相同.化学试剂中溶质为挥发性气体时一般常用此法表示.

例 3 用碳酸钠 15g 配制成 500g 的水溶液,求其质量分数.

$$\text{解: } \omega_{(\text{Na}_2\text{CO}_3)} = \frac{m_{\text{Na}_2\text{CO}_3}}{m} = \frac{15\text{g}}{500\text{g}} = 0.03.$$

答:该碳酸钠溶液的质量分数为 0.03.

例 4 现有碘片 8.5g,问能配制质量分数为 0.02 的碘甘油多少克? 制剂中以质量分数为 0.015 碘化钾为助溶剂,此时需碘化钾多少克? 甘油多少克?

$$\text{解: 能配制碘甘油的质量} = \frac{\text{碘片的质量}}{\text{碘甘油的质量分数}} = \frac{8.5\text{g}}{0.02} = 425\text{g}.$$

需用碘化钾的质量 = 碘甘油质量 $\times$ 碘化钾质量分数

$$= 425\text{g} \times 0.015 = 6.375\text{g}.$$

需用甘油的质量 = $425\text{g} - 6.375\text{g} - 8.5\text{g} = 410.125\text{g}.$

答: 能配制质量分数为 0.02 的碘甘油 425g,需碘化钾 6.375g,甘油 410.125g.

3. 体积分数

物质 B 的体积分数就是指物质 B 的体积与混和物(溶液)在相同温度和压力下的体积之比. 体积分数的表示符号为 φ_B , 同样, 物质 B 的名称要注明. 如消毒酒精的体积分数记为 φ (酒精)或 $\varphi_{\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}}$.

计算公式: 物质 B 的体积分数 $\varphi_B = \frac{v_B}{v}$.

显然体积分数也是一个没有单位的纯小数, 但要注意溶质与溶液的体积单位应相同, 它常用来表示液态溶质的浓度.

例 5 2000ml 颠茄酊溶液中含颠茄酊 200ml, 试求该溶液的体积分数. 已知颠茄酊内生物碱含量以莨菪碱计算, $\rho(\text{莨菪碱}) = 0.3\text{g/L}$, 问该溶液含莨菪碱多少克?

$$\text{解: } \varphi(\text{颠茄酊}) = \frac{v(\text{颠茄酊})}{v} = \frac{200\text{ml}}{2000\text{ml}} = 0.1,$$

$$\text{含莨菪碱量} = 0.2\text{L} \times 0.3\text{g/L} = 0.06\text{g}.$$

答: 该颠茄酊溶液的体积分数为 0.1, 含莨菪碱 0.06g.

例 6 药用酒精的体积分数为 0.75, 问 500ml 药用酒精中含纯酒精多少毫升? 多少克 (已知纯酒精密度 $\rho = 0.789\text{kg/L}$)?

$$\text{解: 由 } \varphi_B = \frac{v_B}{v}$$

$$\text{得 } v(\text{酒精}) = \varphi(\text{酒精}) \times v = 0.75 \times 0.5\text{L} = 0.375\text{L},$$

$$m(\text{酒精}) = \rho \cdot v(\text{酒精}) = 0.789\text{kg/L} \times 0.375\text{L}$$

$$\approx 0.296\text{kg} = 296\text{g}.$$

答: 500ml 药用酒精中含纯酒精 375ml, 为 296g.

要注意质量浓度 ρ_B 与密度符号 ($\rho = m/v$) 的区别. 如 $\rho(\text{NaOH}) = 52.7\text{g/L}$ 的溶液, 其密度则为 $\rho = 1.054\text{kg/L}$. 它们符号相同但含义不一样. 即密度中的 m 是溶液的质量, 不是溶质的质量. 在表示上质量浓度 ρ_B 必须指明溶质 B 的名称, 而密度则不用标明.

各种浓度之间可以相互换算, 有下面公式:

质量浓度 = 体积分数 $\times$ 溶质密度.

质量浓度 = 质量分数 $\times$ 溶液密度.

例 7 质量分数为 0.07 的甘油溶液, 其质量浓度和体积分数各为多少? 20℃ 时此溶液的密度为 1.0149kg/L , 纯甘油密度为 1.2609kg/L (精确到 0.001).

解: $\because 20^{\circ}\text{C}$ 时,甘油溶液密度为 1.0149kg/L ,

$$\therefore \rho(\text{甘油}) = 0.07 \times 1.0149\text{kg/L} \approx 0.071\text{kg/L}$$

$\therefore$ 纯甘油密度为 1.2609kg/L ,

$$\therefore \varphi(\text{甘油}) = \frac{0.071}{1.2609} \approx 0.056.$$

答:甘油溶液的质量浓度为 71g/L ,体积分数为 0.056 .

非许用浓度的换算:

国家以法令形式规定:允许使用的单位称为法定计量单位. 浓度单位中属法定计量单位的称为许用浓度,以上介绍的三种浓度都是许用浓度. 其它不属法定计量单位的浓度就称为非许用浓度,如百分浓度、当量浓度等,它们从 1991 年 1 月 1 日起停止使用. 由于历史的原因,以往大量医学书刊中都使用过非许用浓度. 因此,我们在参阅这些资料时,应把非许用浓度正确地转换成许用浓度.

现将百分浓度与许用浓度的相互转换关系列表如下:

非许用浓度				相应的许用浓度		
名 称	符 号	溶液的量	溶质的量	名 称	量符号及换算关系	单 位
质量比体积 百分浓度	$\%(\text{g/ml})$	100ml	Ag	质量浓度	$\rho_B = 10A$	g/L
质量比质量 百分浓度	$\%(\text{g/g})$	100g	Ag	质量分数	$\omega_B = 10^{-2}A$	—
体积比体积 百分浓度	$\%(\text{ml/ml})$	100ml	Aml	体积分数	$\varphi_B = 10^{-2}A$	—

如 $0.9\%(\text{g/ml})$ 的氯化钠溶液,其质量浓度 $\rho(\text{NaCl}) = 10 \times 0.9 = 9\text{g/L}$; $75\%(\text{ml/ml})$ 的消毒用酒精,其体积分数 $\varphi(\text{酒精}) = 10^{-2} \times 75 = 0.75$; $98\%(\text{g/g})$ 的试剂硫酸其质量分数 $\omega(\text{H}_2\text{SO}_4) = 10^{-2} \times 98 = 0.98$.

(二) 比例在医药上的应用

1. 比例的应用

许多有关浓度、溶质量和溶液量的问题也可用比例法来求解. 我们知道,在同一温度下,溶液的体积和它的质量成正比例;在浓度一定的条件下,溶质量与溶液量成正比例;溶液量一定时,溶质量与浓度成正比例;溶质量一定时,溶液量与它的浓度成反比例. 这些比例关系,常用于溶液配制中.

例 8 250ml 甘油重 312.5g,问 175ml 重多少克?

解: 设 175ml 甘油重 x 克.

$\therefore$ 甘油的体积与它的质量成正比例,

$$\therefore 250 : 175 = 312.5 : x$$

$$x = \frac{175 \times 312.5}{250} = 218.75(\text{g}).$$

答:175ml 甘油重 218.75g.

例 9 欲配制体积分数为 0.03 的过氧化氢溶液 100ml,问需取 0.3 的过氧化氢多少毫升?

解: 设需 φ (过氧化氢)=0.3 的溶液 x 毫升.

$\therefore$ 溶质量一定时, 溶液的量与它的浓度成反比例.

$$\therefore 100 : x = 0.3 : 0.03$$

$$x = \frac{100 \times 0.03}{0.3} = 10(\text{ml}).$$

答: 需取 0.3 的过氧化氢溶液 10ml.

例 10 儿童用药剂量与成人不同, 有一患儿体重为 10kg, 需注射庆大霉素, 医嘱为每次 2mg/kg, 现有每支 2ml、80 万单位的庆大霉素针剂, 问每次应抽取多少毫升的庆大霉素注射液 (80 万单位相当于 130mg)?

解: 设需抽取该注射液 x 毫升,

$\therefore$ 患儿用药量为每次 2mg/kg, 该儿体重为 10kg, 故每次需药 20mg.

$$\therefore 2 : 130 = x : 20$$

$$x = \frac{2 \times 20}{130} \approx 0.3(\text{ml}).$$

答: 每次只需抽 0.3ml 注射就符合医嘱.

例 11 青霉素灭菌皮试液配制方法如下: 取青霉素钾 (或钠) 80 万单位, 用灭菌生理盐水 4ml 溶解, 抽取 0.5ml (10 万单位), 再加灭菌生理盐水至 500ml, 混匀, 用无菌操作法分装于灭菌的小瓶中密封, 在 2~10℃ 保存, 有效期 5~7 天, 规格为 2ml 或 5ml. 从上述药液中取 0.1ml 作皮试, 问内含青霉素多少单位?

解: 设 0.1ml 皮试液含青霉素 x 单位,

$$\text{则 } 10^5 : 500 = x : 0.1$$

$$x = \frac{10^5 \times 0.1}{500} = 20 \text{ 单位.}$$

答: 0.1ml 青霉素皮试液内含青霉素 20 单位.

临床上静脉输液点滴速度, 也可用比例法求得.

例 12 某病人需在 10 小时内输液 2000ml, 问每分钟需以多少滴速度点滴 (每毫升相当滴数为 15 滴)?

解: 设每分钟需滴 x 滴,

$$\therefore 10 \text{ 小时需输液 } 2000\text{ml}, \therefore \text{每小时需输液 } 200\text{ml}.$$

显然每分钟的输入量与每小时输入量成正比例.

$$\therefore 1 : 60 = x : 200 \times 15$$

$$x = \frac{200 \times 15}{60} = 50(\text{滴}).$$

答: 每分钟需滴 50 滴.

显然, 已知每小时输入毫升数, 要求每分钟滴数有下面公式:

$$\text{每分钟滴数} = \frac{\text{每小时输入毫升数} \times \text{每毫升相当滴数}}{60(\text{分})}$$

2. 溶液的稀释

一般浓溶液的稀释, 因为浓溶液稀释后体积虽有改变, 但溶质量保持不变, 所以有计算公式:

$$C_1 V_1 = C_2 V_2$$

式中 C_1 —— 稀释前溶液浓度; C_2 —— 稀释后溶液浓度;

V_1 ——稀释前溶液体积； V_2 ——稀释后溶液体积.

例 13 量取 $\varphi=0.95$ 的酒精 75ml, 加无菌蒸馏水到 95ml, 混匀. 上述配制 $\varphi=0.75$ 的消毒酒精的方法是否正确?

解: 设加水后的酒精溶液体积分数为 φ .

则 $0.95 \times 75 = \varphi \times 95$

$$\varphi = \frac{0.95 \times 75}{95} = 0.75.$$

答: 上述配制方法是正确的.

3. 混合比、配分比

将两种浓度不同的溶液混合成指定的浓度的溶液, 应按怎样的比来混合, 这类问题通常叫做混合比问题. 如果还规定了要混合成一定数量的溶液, 则除了求出混合比之外, 还要求出原来两种不同浓度的溶液所需的量, 这类问题通常叫做配分比问题. 如, 欲将体积分数为 0.13 和 0.08 的氨水配成体积分数为 0.1 的氨水, 要按怎样的比来混合? 我们来分析这混合比的求法.

设 $\varphi=0.13$ 的氨水取 x 份, $\varphi=0.08$ 的氨水取 y 份, 因为混合前后的溶质量相等,

所以 $0.13x + 0.08y = 0.1(x + y)$

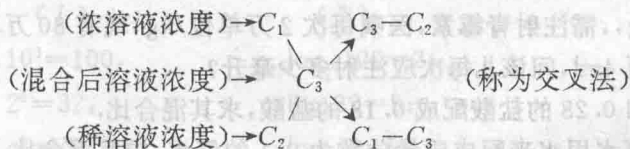
$$(0.13 - 0.1)x = (0.1 - 0.08)y$$

$$\frac{x}{y} = \frac{0.1 - 0.08}{0.13 - 0.1} = \frac{2}{3}.$$

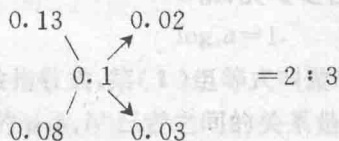
即体积分数为 0.13 和 0.08 的氨水应按 2 : 3 的比来混合就能得到体积分数为 0.1 的氨水.

由此可知, 浓溶液的份数与稀溶液的份数之比等于稀、浓两种溶液的浓度和欲配制溶液的浓度之差的比.

可写成:



上例可简化为:



若需体积分数为 0.1 的氨水 5L, 那么体积分数为 0.13 与 0.08 的氨水各取多少升的问题就是配分比问题, 我们来分析配分比的求法.

因为已得出它们的混合比是 2 : 3, 就是说混合液 5 份中体积分数为 0.13 的氨水占 2 份, 0.08 的氨水占 3 份, 现要求配制 0.1 的混合液 5L,

所以 需体积分数为 0.13 的氨水 $5L \times \frac{2}{5} = 2L$;

需体积分数为 0.084 的氨水 $5L \times \frac{3}{5} = 3L$.

例 14 若将质量浓度为 380g/L 的盐酸配制成质量分数为 100g/L 的稀盐酸 760ml 作

助消化药,需质量浓度为 380g/L 的盐酸多少毫升?

解法一: 由 $C_1V_1=C_2V_2$

$$\text{得 } V_1 = \frac{C_2V_2}{C_1} = \frac{100 \times 0.76}{380} = 0.2(\text{L}) = 200(\text{ml}).$$

解法二: 将水看作质量分数为 0 的盐酸,用交叉法计算:

$$\begin{array}{ccc} 380 & & 100 \\ & \searrow \nearrow & \\ & 100 & \\ & \nearrow \searrow & \\ 0 & & 280 \end{array} \quad = 5 : 14$$

所以 $760\text{ml} \times \frac{5}{19} = 200\text{ml}.$

答:需质量分数 380g/L 的盐酸 200ml.

习题一(1)

1. 复方氯化钠溶液用于补充体内脱水后的无机盐缺乏,它是由氯化钠 17g、氯化钾 0.6g、氯化钙 0.66g 加蒸馏水至 2000ml 配制而成的,试求各成分的质量浓度.
2. 氧化锌软膏由氧化锌 150g 与凡士林 850g 混匀,配制而成,求氧化锌的质量分数.若要配制 50g 氧化锌软膏需氧化锌与凡士林各多少克?
3. 以碳酸钠 15g 配成总重量 500g 的水溶液,在 20℃ 时,溶液密度为 1.0295kg/L,求其质量浓度.
4. 体积分数为 0.75 的消毒用酒精,密度为 0.874kg/L,纯酒精密度为 0.789kg/L,求消毒用酒精的质量浓度和质量分数.
5. 一患者由于心功能不全,要求在输入 $\rho(\text{葡萄糖}) = 100\text{g/L}$ 的葡萄糖注射液时,以每分钟 40 滴的速度滴注,求每小时的输入量(每毫升滴数相当 15 滴).
6. 有一患儿体重为 15kg,,需注射青霉素,医嘱每次 2 万单位/kg,现有 80 万单位青霉素一瓶,加注射用水溶解至 4ml,问该儿每次应注射多少毫升?
7. 将体积分数为 0.16 和 0.28 的盐酸配成 0.18 的盐酸,求其混合比.
8. 将质量分数 0.28 的氨水用水来配成质量分数为 0.1 的氨水,求其混合比.若要配得 0.1 的氨水 560g,需取 0.28 的氨水与水各多少克?

第二节 对数

在初中我们已经学过了指数,现在来学习与指数有紧密联系的对数.

(一)对数的定义和性质

我们知道,2 的 3 次幂等于 8,可以记作

$$2^3=8,$$

这里 2 是底数,3 是指数,8 是 2 的 3 次幂.

在计算中,我们还会遇到相反的问题:2 的多少次幂等于 8? 要表示 8 是 2 的多少次幂,我们可以记作:

$$\log_2 8=3$$

这里 2 仍然叫底数,8 叫做真数,3 叫做以 2 为底的真数 8 的对数. 这个式子读作“以 2 为底的 8 的对数等于 3”. 一般来说有如下定义:

定义 如果 $a(a>0, \text{且 } a \neq 1)$ 的 b 次幂等于 N , 即 $a^b=N$, 数 b 就叫做以 a 为底的 N 的对数, 记作 $\log_a N=b$, 其中 a 叫做底数(简称底), N 叫做真数.

在实数范围内,正数的任何次幂都是正数,在 $a^b=N$ 中,因为 a 是不等于 1 的正数,所以对于任意一个实数 b , $a^b=N$ 总是一个正数,于是我们得到对数的第一个性质.

性质① 负数和零没有对数.

在本节对数式中的字母,如不加特殊说明,都应使对数式有意义,即底数都是不等于 1 的正数,真数都是正数.

根据对数的定义,可由下面第(I)组等式得出第(II)组等式.

(I)

$$10^2=100,$$

$$2^5=32,$$

$$a^b=N,$$

$$a^0=1,$$

$$a^1=a,$$

(II)

$$\log_{10} 100=2;$$

$$\log_2 32=5;$$

$$\log_a N=b;$$

$$\log_a 1=0;$$

$$\log_a a=1.$$

第(I)组等式叫做指数式,第(II)组等式叫做对数式. 指数式 $a^b=N$ 和对数式 $\log_a N=b$ 的形式不同,但反映的 a, b, N 三者之间的关系是一致的,它们之间可以互相转化. a, b, N 之间的关系如下表所示:

	a	b	N
指数式 $a^b=N$	底数	指数	幂
对数式 $\log_a N=b$	底数	对数	真数

由第(II)组的最后二式不难得出对数的另外两个性质:

性质② 1 的对数等于零.

性质③ 底的对数等于 1.

如将定义中的对数式 $b=\log_a N$ 代入指数式 $a^b=N$, 则可得对数恒等式

$$a^{\log_a N} = N$$

例如 $3^{\log_3 7} = 7$.

例1 把下列指数式写成对数式:

(1) $5^3 = 125$; (2) $2^{-2} = \frac{1}{4}$

解: (1) $\log_5 125 = 3$; (2) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$.

例2 把下列对数式写成指数式:

(1) $\log_2 16 = 4$; (2) $\log_{10} 1000 = 3$.

解: (1) $2^4 = 16$; (2) $10^3 = 1000$.

例3 求 $\log_2 \sqrt[3]{4}$ 的值

解: 设 $\log_2 \sqrt[3]{4} = x$, 则 $2^x = \sqrt[3]{4}$

$$\therefore 2^x = 2^{\frac{2}{3}},$$

$$\therefore x = \frac{2}{3}.$$

即

$$\log_2 \sqrt[3]{4} = \frac{2}{3}$$

例4 以什么数为底, $\frac{27}{8}$ 的对数等于 -3 ?

解: 设所求的底数为 a , 则 $\log_a \frac{27}{8} = -3$.

$$\therefore a^{-3} = \frac{27}{8}, a^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3},$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}.$$

即以 $\frac{2}{3}$ 为底, $\frac{27}{8}$ 的对数等于 -3 .

例5 以 $\frac{1}{2}$ 为底, 什么数的对数等于 -5 ?

解: 设所求的真数为 N , 则 $\log_{\frac{1}{2}} N = -5$

$$\therefore N = \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = (2^{-1})^{-5} = 2^5 = 32.$$

(二) 积、商、幂、方根的对数

我们学过了指数的定义和幂的运算法则. 根据幂的运算法则和对数的定义, 我们可以得到对数的运算法则.

1. 两个正数的积的对数, 等于同一底数的这两个正数的对数的和, 即

$$\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N.$$

证明: 设 $\log_a M = p, \log_a N = q$,

由对数的定义, 得

$$M = a^p, N = a^q,$$

$$\therefore M \cdot N = a^p \cdot a^q = a^{p+q},$$

$$\therefore \log_a (M \cdot N) = p + q = \log_a M + \log_a N.$$

当正因数多于两个时,法则 1 仍然成立,即有:

$$\log_a(N_1 \cdot N_2 \cdots N_n) = \log_a N_1 + \log_a N_2 + \cdots + \log_a N_n \text{ 成立.}$$

用同样的方法可以证明下列三个法则,其证明留给读者练习.

2. 两个正数的商的的对数,等于同一底数的被除数的对数减去除数的对数的差,即

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N.$$

3. 一个正数的幂的对数,等于幂的底数的对数乘以幂指数,即

$$\log_a M^p = p \cdot \log_a M.$$

4. 一个正数的算术根的对数,等于被开方数的对数除以根指数,即

$$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M. (n \in N, \text{ 且 } n > 1.)$$

例 6 用 $\log_a x, \log_a y, \log_a z$ 表示下列各式:

$$(1) \log_a \frac{xy}{z}; \quad (2) \log_a x^3 \cdot y^5; \quad (3) \log_a \frac{x^2 \sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}.$$

$$\text{解: } (1) \log_a \frac{xy}{z} = \log_a (xy) - \log_a z$$

$$= \log_a x + \log_a y - \log_a z;$$

$$(2) \log_a x^3 y^5 = \log_a x^3 + \log_a y^5$$

$$= 3 \log_a x + 5 \log_a y;$$

$$(3) \log_a \frac{x^2 \sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}} = \log_a (x^2 \cdot \sqrt{y}) - \log_a \sqrt[3]{z}$$

$$= \log_a x^2 + \log_a \sqrt{y} - \log_a \sqrt[3]{z}$$

$$= 2 \log_a x + \frac{1}{2} \log_a y - \frac{1}{3} \log_a z.$$

例 7 计算: $\log_{10} \sqrt[5]{1000}, \log_2 (4^5 \cdot 2^7).$

$$\text{解: } \log_{10} \sqrt[5]{1000} = \frac{1}{5} \log_{10} 1000 = \frac{1}{5} \log_{10} 10^3$$

$$= \frac{3}{5};$$

$$\log_2 (4^5 \cdot 2^7) = \log_2 4^5 + \log_2 2^7$$

$$= 5 \log_2 4 + 7 \log_2 2$$

$$= 5 \times 2 + 7 \times 1 = 17.$$

例 8 已知 $\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$,

求 $\log_{10} 15, \log_{10} 1.2, \log_{10} \sqrt{6}$ 的值

$$\text{解 } \log_{10} 15 = \log_{10} \frac{3 \times 10}{2}$$

$$= \log_{10} 3 + \log_{10} 10 - \log_{10} 2$$

$$= 0.4771 + 1 - 0.3010 = 1.1761;$$

$$\log_{10} 1.2 = \log_{10} \frac{12}{10} = \log_{10} \frac{2^2 \times 3}{10}$$

$$= 2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3 - \log_{10} 10$$

$$= 2 \times 0.3010 + 0.4771 - 1$$

$$=0.0791;$$

$$\log_{10}\sqrt{6} = \frac{1}{2}\log_{10}6 = \frac{1}{2}\log_{10}(2 \times 3)$$

$$= \frac{1}{2}(\log_{10}2 + \log_{10}3)$$

$$= \frac{1}{2}(0.3010 + 0.4771)$$

$$=0.3891.$$

(三)常用对数

1. 定义

由于我们通常用的是十进制记数法,所以我们通常用的对数是以 10 为底的对数,这种对数叫做**常用对数**,在表示常用对数的时候,通常把底数 10 略去,把“log”简写“lg”,也就是 N 的常用对数 $\log_{10}N$ 可以简写成 $\lg N$. 例如 $\log_{10}5$ 写成 $\lg 5$. 如不作特殊说明,一般所说的对数都是常用对数.

2. 常用对数的性质

常用对数除了具有一般对数的性质外,还具有一些重要性质.

根据幂的对数的运算法则和对数的性质,我们知道:

.....

$$\lg 1000 = \lg 10^3 = 3\lg 10 = 3,$$

$$\lg 100 = \lg 10^2 = 2\lg 10 = 2,$$

$$\lg 10 = 1,$$

$$\lg 1 = 0,$$

$$\lg 0.1 = \lg 10^{-1} = -1,$$

$$\lg 0.01 = \lg 10^{-2} = -2,$$

$$\lg 0.001 = \lg 10^{-3} = -3;$$

.....

由以上式子可以看出:

(1) 10 的整数次幂的对数是一个整数,它等于这个幂的指数.并且真数较大的时候,它的对数也较大.

我们知道, $1 < 3.408 < 10$, 所以 $0 < \lg 3.408 < 1$, 就是说, $\lg 3.408$ 是一个正的纯小数.

如果知道了 $\lg 3.408 = 0.5325$, 我们可以求 0.03408, 340.8, 34080 的对数, 首先用科学记数法表示上面各数, 再求出对数:

$$\lg 0.03408 = \lg(3.408 \times 10^{-2}) = \lg 10^{-2} + \lg 3.408$$

$$= -2 + 0.5325;$$

$$\lg 340.8 = \lg(3.408 \times 10^2) = \lg 10^2 + \lg 3.408$$

$$= 2 + 0.5325;$$

$$\lg 34080 = \lg(3.408 \times 10^4) = \lg 10^4 + \lg 3.408$$

$$= 4 + 0.5325.$$

一般地,可以得到: