经济管理学术文库·金融类

非可加测度及其在金融中的应用

Non-linear Measurement and its Applications in Finance

王洪霞／著

经济管理出版社
ECONOMY & MANAGEMENT PUBLISHING HOUSE

经济管理学术文库·金融类

非可加测度及其在金融中的应用

Non-linear Measurement and its Applications in Finance

王洪霞／著

经济管理出版社
ECONOMY & MANAGEMENT PUBLISHING HOUSE

图书在版编目（CIP）数据

非可加测度及其在金融中的应用/王洪霞著. —北京：经济管理出版社，2016.5
ISBN 978-7-5096-4354-9

Ⅰ. ①非… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①测度论—应用—金融—研究 Ⅳ. ①F83

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 074946 号

组稿编辑：王格格
责任编辑：王格格
责任印制：黄章平
责任校对：王 淼

出版发行：经济管理出版社
（北京市海淀区北蜂窝 8 号中雅大厦 A 座 11 层 100038）
网 址：www. E-mp. com. cn
电 话：(010) 51915602
印 刷：北京九州迅驰传媒文化有限公司
经 销：新华书店
开 本：720mm×1000mm/16
印 张：11.5
字 数：212 千字
版 次：2016 年 7 月第 1 版 2016 年 7 月第 1 次印刷
书 号：ISBN 978-7-5096-4354-9
定 价：39.00 元

前言

众所周知，经典概率测度的理论体系已经趋于完善，它在经济、信息、工程控制等领域有着广泛的应用。基于经典的概率测度与数学期望建立起来的期望效用理论在20世纪五六十年代盛行的数理经济学理论中起着重要作用。然而在人的行为起主导作用的经济市场、金融市场、保险等领域，有许多非可加的现象用经典概率却无法解释。容度理论是处理这种非可加的现象的常用数学方法。一方面，容度和容度下的Choquet积分是概率测度和数学期望的自然推广，Choquet积分在金融、经济、多目标决策、保险等许多领域都有很广泛的应用。另一方面，信息的不可靠性、信息的不完备性、不同来源的信息矛盾以及信息的不精确性都有可能导致不确定。处理不确定的数学方法主要包括古典概率论、信任函数理论、模糊逻辑及可能性理论。我们知道信任函数理论是经典概率论的扩充，它的主要优点在于能够提供给我们在不完备的概率模型上处理不确定性的便利。

容度和信任函数皆为经典概率的扩充，经常用来处理期望效用理论框架下无法解释的一些现象。

本书第一部分研究了容度和Choquet积分理论，探讨了其在金融中的应用，这些结果是容度和Choquet积分理论的有意义的扩充。第二部分从有限空间上的信任函数出发，从证据理论的角度由有限空间上的基本概率分配导出信任函数理论，给出信任函数、似然函数的公理化定义；当空间无限时，基本概率分配的方法就不再适用，此时可利用无限空间上的集值随机变量导出信任函数理论及其公理化定义。

由于笔者水平所限，本书可能满足不了读者的需要，我们的愿望可能与实际相脱离，也可能会耽误读者宝贵的时间。如果是这样，我们深感内疚。究竟收效

如何，读者自有公论。书中不免会有这样那样的错误，恳请诸位同行专家学者及广大读者批评斧正。

王洪霞

2015年11月于河南财经政法大学

目 录

第 1 章　Choquet 积分理论及其在金融中的几个应用

1.1　容度和 Choquet 积分的基础知识

在这一部分中，我们将给出容度和 Choquet 积分的定义及其有关的性质。

1.1.1　容度

给定可测空间 $(\Omega, \mathcal{F})$，其上的所有概率测度的集合记为 $\mathcal{M}$。1953 年，Choquet [1] 引入了容度与 Choquet 积分。

定义 1.1.1　集函数 $\mu: \mathcal{F} \to [0, 1]$ 称为一容度（capacity），如果满足：

(1) $\mu(\emptyset) = 0$，$\mu(\Omega) = 1$；

(2) $\mu(A) \leqslant \mu(B)$，$\forall A, B \in \mathcal{F}$ 且 $A \subseteq B$。

此时，我们用三元组 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 表示一容度空间。

如果对任意集合 $B \subseteq \Omega$，存在集合 $A \in \mathcal{F}$，满足 $B \subseteq A$ 和 $\mu(A) = 0$，则称 B 是 μ-零集（μ-nullset）。依赖于 $\omega \in \Omega$ 的性质被称作关于 μ 几乎处处成立，如果存在一个 μ-零集 N 使得此性质在 N^c 上成立，简记为 a.e. $[\mu]$。

定义 1.1.2　容度 μ 的对偶容度（conjugate capacity）$\bar{\mu}$ 定义为：对任意 $A \in \mathcal{F}$，$\bar{\mu}(A) = 1 - \mu(A^c)$。

下面我们列举一些常用的容度。

定义 1.1.3　如果容度 μ 满足：对任意 $A, B \in \mathcal{F}$，$A \cap B = \emptyset$，有：

$$\mu(A \cup B) \leqslant \mu(A) + \mu(B) \tag{1-1}$$

则称 μ 是次可加的（subadditive）。

如果不等式（1-1）中的“≤”换成“≥”，则称 μ 是超可加的（superadditive）。如果 μ 既是超可加的又是次可加的，则称 μ 是可加的（additive）。

定义 1.1.4 称容度 μ 是凹的（concave）或者次模的（submodular），如果对任意 $A, B \in \mathcal{F}$，有：

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \leqslant \mu(A) + \mu(B) \tag{1-2}$$

如果不等式（1-2）中“≤”换成“≥”，则称 μ 是凸的（convex）或者超模的（supermodular）。

在有些文献中，凹容度也被称作 2-交替（2-alternating）容度，而凸容度也被称作 2-单调（2-monotone）容度。

定义 1.1.5 称容度 μ 在 A 处是从下连续的（从上连续的），如果当 $A_n \uparrow A$（$A_n \downarrow A$），有：

$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

如果 μ 在 A 处既是从下连续的又是从上连续的，则称 μ 在 A 处是连续的；如果 μ 在 $\mathcal{F}$ 中任何元素处均是连续的，则称容度 μ 是连续的。连续的容度称为 Choquet 容度。

例 1.1.1 假设（Ω，$\mathcal{F}$）为可测空间，$\mathbb{P}$ 为其上概率，函数 $g: [0, 1] \to [0, 1]$ 是非降的，且满足 $g(0) = 0$，$g(1) = 1$，则 $\mu = g \circ \mathbb{P}$ 为一个容度，此容度被称为扭曲概率，并且 g 被称为扭曲函数。

扭曲概率 $g \circ \mathbb{P}$ 的对偶为 $\bar{\mu} = \bar{g} \circ \mathbb{P}$，其中 $\bar{g}(x) = 1 - g(1 - x)$，$x \in [0, 1]$ 是对偶扭曲函数。

文献[2]得到结论：若 g 是凹（凸）函数，则 $g \circ \mathbb{P}$ 是凹（凸）的扭曲概率。

仅就凹函数的情形，证明如下：$\forall A, B \in \mathcal{F}$，假设 $a := \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B) =: b$。记 $c = \mathbb{P}(A \cap B)$，$d = \mathbb{P}(A \cup B)$，则有 $c \leqslant a \leqslant b \leqslant d$。因为 $\mathbb{P}$ 为概率，有 $c + d = a + b$。由于 g 是凹函数，则有 $g(c) + g(d) \leqslant g(a) + g(b)$，所以 $g \circ \mathbb{P}$ 是凹的。

性质 1.1.1 给定容度空间（Ω，$\mathcal{F}$，μ），则 μ 具有下列性质：

（1）$\bar{\bar{\mu}} = \mu$；

（2）μ 单调，当且仅当 $\bar{\mu}$ 单调；

（3）μ 是凹的，当且仅当 $\bar{\mu}$ 是凸的。

注：这表明 μ 和 $\bar{\mu}$ 具有某种对偶关系，但并不是每一性质都是具有对偶关系的，例如，“μ 超可加的 $\Leftrightarrow \bar{\mu}$ 次可加的”，并不一定成立，反例如下：

例 1.1.2　令 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$，$\mathcal{F}=2^{\Omega}$，取

$\mu(\emptyset)=0$，$\mu(\Omega)=1$

$\mu(\{\omega_i\})=\frac{1}{6}$，$\mu(\{\omega_i, \omega_j\})=\frac{2}{3}$，$i, j=1, 2, 3$

容易验证 μ、$\bar{\mu}$ 均为超可加的，这表明超可加性不具有对偶关系。

定义 1.1.6　容度 μ 的核被定义为：

$$C(\mu)=\{\mathbb{P}\in\mathcal{M}:\ \bar{\mu}(A)\leqslant\mathbb{P}(A)\leqslant\mu(A),\ \forall A\in\mathcal{F}\} \tag{1-3}$$

记作 $C(\mu)$。

注　此定义在对策论（game theory）中被称作“$\bar{\mu}$ 的核”，常常被表示为 $\{\mathbb{P}\in\mathcal{M}:\ \bar{\mu}\leqslant\mathbb{P}\}$。可以将 μ 和 $\bar{\mu}$ 分别表示为核的上、下包络（upper and lower envelope）[3], [4]。

定理 1.1.1　如果容度 μ 是凹的，则对任意 $A\in\mathcal{F}$，有：

$$\mu(A)=\max_{\mathbb{P}\in C(\mu)}\mathbb{P}(A)$$

$$\bar{\mu}(A)=\min_{\mathbb{P}\in C(\mu)}\mathbb{P}(A)$$

如果容度是凹的，则 $C(\mu)\neq\emptyset$。显然，如果 μ 是凸的，则 μ 的对偶的核可表示为：

$$C(\bar{\mu})=\{\mathbb{P}\in\mathcal{M}:\mu(A)\leqslant\mathbb{P}(A)\leqslant\bar{\mu}(A),\ \forall A\in\mathcal{F}\}$$

并且 $C(\bar{\mu})\neq\emptyset$。

1.1.2　Choquet 积分

随机变量 f 是（Borel）可测函数 $f:(\Omega, \mathcal{F})\to(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$，其中 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}$ 的 Borel σ–域，所有有界随机变量的全体记作 L^∞。有界随机变量关于容度的积分是由 Choquet（1953）[1] 给出的。

定义 1.1.7　假设 $f\in L^\infty$，f 在 $A\in\mathcal{F}$ 上关于容度 μ 的 Choquet 积分定义为：

$$(C)\int_A f d\mu=\int_0^{+\infty}\mu(A\cap\{f\geqslant t\})dt+\int_{-\infty}^{0}[\mu(A\cap\{f\geqslant t\})-1]dt \tag{1-4}$$

其中，右边的所有积分都是 Lebesgue 意义下的。

注 (1) 如果 μ 为一概率测度，则 Choquet 积分退化为经典的数学期望。

(2) f 在 Ω 上关于容度 μ 的 Choquet 积分简记为 $(C)\int f d\mu$。

(3) Choquet 积分是不对称的，因为一般地 $(C)\int f d\mu$ 不等于 $-(C)\int -f d\mu$，它们分别被称作上 Choquet 积分和下 Choquet 积分。

(4) 如果 $-\infty < (C)\int f d\mu < \infty$，则称 f 是 Choquet 可积的。

(5) 假定可测函数 f 为简单函数，即 $f = \sum_{i=1}^{n} x_i I_{A_i}$，其中 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$，$A_i \cap A_j = \emptyset$，$\forall i \neq j$，且 $\{x_i\}$ 按降序排列即 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$，则：

$$(C)\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_j)\mu(S_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i(\mu(S_i) - \mu(S_{i-1}))$$

其中 $S_i = A_1 \cup \cdots \cup A_i$，$i = 1, \cdots, n$，$S_0 = \emptyset$ 且 $x_{n+1} = 0$。

下面的两个定理描述了 Choquet 积分的基本性质 [3,4]。

定理 1.1.2 对容度 μ 和 f，$g \in L^\infty$，则：

(1) $(C)\int 1_A d\mu = \mu(A)$，$A \in \mathcal{F}$；

(2)（正时齐性）对所有 $\lambda \in \mathbb{R}^+$，有 $(C)\int \lambda f d\mu = \lambda \cdot (C)\int f d\mu$；

(3)（转移不变性）对所有 $c \in \mathbb{R}$，有 $(C)\int (f+c) d\mu = (C)\int f d\mu + c$；

(4)（非对称性）$(C)\int (-f) d\mu = -(C)\int f d\bar{\mu}$；

(5)（关于被积随机变量的单调）若 $f \leqslant g$，则 $(C)\int f d\mu \leqslant (C)\int g d\mu$；

（关于容度的单调）若 $\mu \leqslant \nu$，则 $(C)\int f d\mu \leqslant (C)\int f d\nu$；

(6)（次可加性）如果 μ 是凹的，则有 $(C)\int (f+g) d\mu \leqslant (C)\int f d\mu + (C)\int g d\mu$；

（超可加性）如果 μ 是凸的，则有 $(C)\int (f+g) d\mu \geqslant (C)\int f d\mu + (C)\int g d\mu$。

我们称两个随机变量 f，$g \in L^\infty$ 是共单调的，如果对任意一对 ω，$\omega' \in \Omega$，则有 $(f(\omega) - f(\omega'))(g(\omega) - g(\omega')) \geqslant 0$。

定理 1.1.3　(共单调可加性) 如果 f，$g \in L^\infty$ 是共单调的，则有：

$$(C)\int (f+g)d\mu = (C)\int fd\mu + (C)\int gd\mu$$

1.2　Choquet-Lebesgue 积分及其计算

1.2.1　引言

为了讨论方便，本书后面所说的容度皆为规范容度，即假设 $\mu(\Omega)=1$；本节中的容度为一般的容度，即在定义中去掉条件 $\mu(\Omega)=1$。

离散形式的 Choquet 积分是可以计算的，目前对 Choquet 积分的应用研究也多是局限于离散情形下的。

但当函数 f 连续时，其 Choquet 积分的计算是比较困难的，目前还没有文献涉及此方面的研究。本节试图探索一类容易计算出结果的连续 Choquet 积分。

我们知道，扭曲概率是介于经典测度和容度之间的一种特殊测度，其在保险领域中有重要的应用。Wang 等 [5] 基于扭曲测度，即 Wang 变换首次给出保费原理在风险意义下的公理化刻画。受此启发，本节拟给出一种扭曲测度——扭曲 Lebesgue 测度，并基于扭曲 Lebesgue 测度定义一种新的 Choquet 积分，将其称为 Choquet-Lebesgue 积分；然后，研究关于单调的连续可微函数的 Choquet-Lebesgue 积分的计算方法。

1.2.2　主要结果

首先给出扭曲 Lebesgue 测度及其 Choquet-Lebesgue 积分的定义。

设 λ 是 Lebesgue 测度，其满足：对 $[a, b]\subset[0, \infty)$，有 $\lambda([a, b])=b-a$。

定义 1.2.1　设 $g: \mathcal{R}^+\to\mathcal{R}^+$是扭曲函数，λ 是 Lebesgue 测度，则称 $g_\lambda(\cdot)=g(\lambda(\cdot))$ 为扭曲 Lebesgue 测度。

注　由定义易知：

(1) $g_\lambda([a, b])=g(\lambda([a, b]))=g(b-a)$。

（2）当且仅当 $g(t) \equiv t$ 时，g_λ 是可加的。

定义 1.2.2 非负有界可测函数 $f: \Omega \to \mathcal{R}^+$ 在集合 $A \in \mathcal{F}$ 上关于扭曲 Lebesgue 测度 g_λ 的 Choquet 积分为：

$$(c)\int_A f dg_\lambda = \int_0^{+\infty} g_\lambda(\{\omega | f(\omega) \geqslant t\} \cap A) dt \tag{1-5}$$

将其称为 f 的 Choquet-Lebesgue 积分。

下面，将研究定义在非负实数集上的非负函数 $f: \mathcal{R}^+ \to \mathcal{R}^+$ 的 Choquet-Lebesgue 积分的计算方法。

假设函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 都是连续可微的。

考虑闭区间 $[\tau, t]$ 上的扭曲 Lebesgue 测度 $g_\lambda([\tau, t])$：其关于 τ 单调递减，关于 t 单调递增。假设对任意 $t>0$，$g_\lambda([\tau, t])$ 在 $[0, t]$ 上关于 τ 是可微的，并且，对任意 $t>0$，假定 $g_\lambda([t])=0$。记 $g'_\lambda([\tau, t]) = (\partial/\partial\tau) g_\lambda([\tau, t])$。显然，对 $\tau \leqslant t$ 有 $g'_\lambda([\tau, t]) \leqslant 0$。于是有 $g'_\lambda([\tau, t]) = -g'(t-T)$，其中 $g'(t) = dg(t)/dt$。

在下面的定理中，如果没有特殊说明，函数 $f(t)$ 皆为非负的连续可微函数。

定理 1.2.1 设 $f(t)$ 是严格单调递增函数，则 f 在 $[0, t]$ 上关于扭曲 Lebesgue 测度 g_λ 的 Choquet-Lebesgue 积分为：

$$(c)\int_{[0,t]} f dg_\lambda = \int_0^t g'(t-\tau) f(\tau) d\tau \tag{1-6}$$

证明

$$\begin{aligned}
(c)\int_{[0,t]} f dg_\lambda &= \int_0^{+\infty} g_\lambda(\{\tau | f(\tau) \geqslant r\} \cap [0, t]) dr \\
&= \int_0^{+\infty} g_\lambda(\{\tau | \tau \geqslant f^{-1}(r)\} \cap [0, t]) dr \\
&= \int_0^{f(0)} g_\lambda([0, t]) dr + \int_{f(0)}^{f(t)} g_\lambda([f^{-1}(r), t]) dr \\
&= g_\lambda([0, t]) f(0) + \int_0^t g_\lambda([\tau, t]) f'(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

其中：

$$\begin{aligned}
\int_0^t g_\lambda([\tau, t]) f'(\tau) d\tau &= g_\lambda([\tau, t]) f(\tau) \Big|_0^t - \int_0^t g'_\lambda([\tau, t]) f(\tau) d\tau \\
&= g_\lambda([t]) f(t) - g_\lambda([0, t]) f(0) - \int_0^t g'_\lambda([\tau, t]) f(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

$$= -g_\lambda([0,\ t])f(0) + \int_0^t g'(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

所以得证。

注　特别地，如果 $f(t) \equiv C$，$\forall t > 0$，则有 $(C)\int_{[0,\ t]} fdg_\lambda = Cg(t)$。

对于一般的单调递增函数，我们可得下面的定理。

定理 1.2.2　设 $f(t)$ 是单调递增函数，则 f 在 $[0,\ t]$ 上关于扭曲 Lebesgue 测度 g_λ 的 Choquet-Lebesgue 积分为：

$$(C)\int_{[0,\ t]} fdg_\lambda = \int_0^t g'(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

证明　不失一般性，考虑下面的连续单调递增函数

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t),\ 0 \leqslant t < t_1 \\ f_2,\ t_1 \leqslant t < t_2 \\ f_3(t),\ t_2 \leqslant t < \infty \end{cases}$$

其中，$f_1(t)$ 和 $f_3(t)$ 是严格单调递增的，f_2 是常数函数，并且 $f_1(t_1) = f_2 = f_3(t_2)$。

令：

$$c(t) = (C)\int_{[0,\ t]} fdg_\lambda = \int_0^{+\infty} g_\lambda(\{\tau | f(\tau) \geqslant r\} \cap [0,\ t])dr$$

（1）对 $0 \leqslant t < t_1$，由定理 1.2.1 可得：

$$c(t) = \int_0^t g'(t-\tau)f_1(\tau)d\tau$$

（2）对 $t_1 \leqslant t < t_2$，为了简单起见，不妨设 $f_1(0) = 0$；当 $f_1(0) \neq 0$ 时，可由定理 1.2.1 的证明得到同样的结果。我们有：

$$c(t) = \int_0^{f_1(t_1)} g_\lambda([f_1^{-1}(r),\ t])dr$$

$$= \int_0^{t_1} g_\lambda([\tau,\ t])f_1'(\tau)d\tau$$

$$= g_\lambda([\tau,\ t])f_1(\tau)\Big|_0^{t_1} - \int_0^{t_1} g_\lambda'([\tau,\ t])f_1(\tau)d\tau$$

$$= g_\lambda([t_1,\ t])f_1(t_1) + \int_0^{t_1} g'(t-\tau)f_1(\tau)d\tau$$

$$= g_\lambda([t_1,\ t])f_2 + \int_0^{t_1} g'(t-\tau)f_1(\tau)d\tau$$

可记：

$$g_\lambda([t_1, t])f_2 = \int_{t_1}^{t} g'(t-\tau)f_2 d\tau$$

因此，有：

$$c(t) = \int_0^{t_1} g'(t-\tau)f_1(\tau)d\tau + \int_{t_1}^{t} g'(t-\tau)f_2 d\tau$$
$$= \int_0^{t} g'(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

（3）对 $t_2 \leqslant t < \infty$，同样假设 $f_1(0) = 0$，则有：

$$c(t) = \int_0^{f_3(t_2)} g_\lambda([f_1^{-1}(r), t])dr + \int_{f_3(t_2)}^{f_3(t)} g_\lambda([f_3^{-1}(r), t])dr$$

对于上式右边的第一项，注意到 $f_3(t_2) = f_1(t_1)$，则我们有：

$$\int_0^{f_3(t_2)} g_\lambda([f_1^{-1}(r), t])dr = \int_0^{t_1} g_\lambda([\tau, t])f_1'(\tau)d\tau$$
$$= g_\lambda([\tau, t])f_1(\tau)\Big|_0^{t_1} - \int_0^{t_1} g_\lambda'([\tau, t])f_1(\tau)d\tau$$
$$= g_\lambda([t_1, t])f_1(t_1) + \int_0^{t_1} g'(t-\tau)f_1(\tau)d\tau$$
$$= g_\lambda([t_1, t])f_2 + \int_0^{t_1} g'(t-\tau)f_1(\tau)d\tau$$

对于第二项，我们有：

$$\int_{f_3(t_2)}^{f_3(t)} g_\lambda([f_3^{-1}(r), t])dr = \int_{t_2}^{t} g_\lambda([\tau, t])f_3'(\tau)d\tau$$
$$= g_\lambda([\tau, t])f_3(\tau)\Big|_{t_2}^{t} - \int_{t_2}^{t} g_\lambda'([\tau, t])f_3(\tau)d\tau$$
$$= -g_\lambda([t_2, t])f_3(t_2) + \int_{t_2}^{t} g'(t-\tau)f_3(\tau)d\tau$$
$$= -g_\lambda([t_2, t])f_2 + \int_{t_2}^{t} g'(t-\tau)f_3(\tau)d\tau$$

于是，有：

$$c(t) = \int_0^{t_1} g'(t-\tau)f_1(\tau)d\tau + g_\lambda([t_1, t])f_2 - g_\lambda([t_2, t])f_2 + \int_{t_2}^{t} g'(t-\tau)f_3(\tau)d\tau$$

因为 $g_\lambda([t_1, t])f_2 - g_\lambda([t_2, t])f_2 = \int_{t_1}^{t_2} g'(t-\tau)f_2 d\tau$，所以有：

$$
\begin{aligned}
c(t) &= \int_0^{t_1} g'(t-\tau)f_1(\tau)d\tau + \int_{t_1}^{t_2} g'(t-\tau)f_2 d\tau + \int_{t_2}^{t} g'(t-\tau)f_3(\tau)d\tau \\
&= \int_0^{t} g'(t-\tau)f(\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

下面说明连续 Choquet-Lebesgue 积分和离散 Choquet-Lebesgue 积分在计算方法上的一致性。

令 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$，定义左闭右开区间 $E_i = [t_{i-1}, t_i)$，$1 \leqslant i \leqslant n$。考虑简单函数：

$$
f(t) = \sum_{i=1}^{n} r_i 1_{E_i}(t)
$$

其中，$0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 < \cdots \leqslant r_n$，$1_{E_i}$是集合 E_i 的示性函数。

定义：

$$
F_i = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \{t \mid f(t) \geqslant r_i\}
$$

并且令 $r_0 = 0$，则简单函数 $f(t)$ 也可表示为：

$$
f(t) = \sum_{i=1}^{n} (r_i - r_{i-1}) 1_{F_i}(t)
$$

则 f 在 $[0, t]$ 上关于扭曲 Lebesgue 测度 g_λ 的 Choquet-Lebesgue 积分为：

$$
\begin{aligned}
(C)\int_{[0,t]} f dg_\lambda &= \sum_{i=1}^{n} (r_i - r_{i-1}) g_\lambda(F_i \cap [0, t]) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (r_i - r_{i-1}) g_\lambda(\{t \mid f(t) \geqslant r_i\} \cap [0, t])
\end{aligned}
$$

于是可知连续情形的 Choquet-Lebesgue 积分的表达式为：

$$
(C)\int_{[0,t]} f dg_\lambda = \int_0^{+\infty} g_\lambda(\{t \mid f(t) \geqslant r\} \cap [0, t]) dr
$$

另一方面，设 $F_{n+1} = \emptyset$，$t_{n+1} = t_n + \varepsilon$，$r_{n+1} = r_n + \varepsilon$，$\varepsilon > 0$，则：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} (r_i - r_{i-1}) g_\lambda(F_i \cap [0, t]) \\
&= \sum_{i=1}^{n} r_i [g_\lambda(F_i \cap [0, t]) - g_\lambda(F_{i+1} \cap [0, t])]
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{i=1}^{n} r_i[g_\lambda(\{t|f(t) \geqslant r_i\} \cap [0,\ t]) - g_\lambda(\{t|f(t) \geqslant r_{i+1}\} \cap [0,\ t])]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} r_i[g_\lambda([t_i,\ t]) - g_\lambda([t_{i+1},\ t])]$$

从而可得定理 1.2.2 中的表达式：

$$(C)\int_{[0,\ t]} f dg_\lambda = -\int_0^t g'_\lambda[\tau,\ t]f(\tau)d\tau$$

下面，考虑运用卷积概念和拉普拉斯变换给出上述 Choquet-Lebesgue 积分的计算公式。注意到：

$$\int_0^t g'(t-\tau)f(\tau)d\tau = g' * f(t)$$

其中，$g' * f(t)$ 为 $g'(t)$ 和 $f(t)$ 的卷积，则有：

$$(C)\int_{[0,\ t]} f dg_\lambda = g' * f(t) \tag{1-7}$$

对函数 $h: \mathcal{R}^+ \to \mathcal{R}^+$，可以定义其拉普拉斯变换为 $H(s) = L[h(t)]$；称 $h(t)$ 为 $H(s)$ 的拉普拉斯逆变换，记作 $h(t) = L^{-1}[H(s)]$。

定理 1.2.3 假设 $f(t)$ 是单调递增函数。令 $c(t) = (C)\int_{[0,\ t]} f dg_\lambda$，则有：

$C(t) = sG(s)F(s)$，$c(t) = L^{-1}[sG(s)F(s)]$

证明 由拉普拉斯变换易证。

特别地，当 $g(t) \equiv t$，即 $g_\lambda = \lambda$ 时，有 $G(s) = 1/s^2$，$c(t) = L^{-1}[F(s)/s]$，所以 $c(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$。

例 1.2.1 下面举几个有关的例子：

（1）令 $g(t) = t^n$，$f(t) = t$，则 $G(s) = n!/s^{n+1}$，$F(s) = 1/s^2$。于是 $C(t) = n!/s^{n+2} = (n+1)^{-1}(n+1)!/s^{n+2}$，从而有 $c(t) = t^{n+1}/(n+1)$。

（2）令 $g(t) = e^{at} - 1(a>0)$，$f(t) = t$，则 $G(s) = 1/(s-a) - 1/s$，$F(s) = 1/s^2$。于是 $C(t) = [1/(s-a) - 1/s]/s = [1/(s-a) - 1/s]/a - 1/s^2$，从而有 $c(t) = (e^{at} - 1)/a - t$。

类似于定理 1.2.2，对于一般的单调递减函数，我们可得下面的定理。

定理 1.2.4 设 $f(t)$ 是单调递减函数，则 f 在 $[0,\ t]$ 上关于扭曲 Lebesgue 测度 g_λ 的 Choquet-Lebesgue 积分为：