氏中西算學全書三集

三集一

華氏中國叢學

全書詩集

行素軒
校本

代數術二十五卷余與西士傅蘭雅所譯也傅君本精於此學余亦粗明算法故傅君口述之余筆記之一日數千言不厭其艱苦凡兩月而脫稿繕寫付梓經年告成爰展閱一過而序之曰數之名始於一而終於九故至十則進其位而仍以自一至九之數名之至百則又進其位而仍以自一至九之數名之如是以至千萬億兆其例一也夫古人造數之時所以必以十紀之者誠以數之多可至無窮若每數各與一名則吾之名必有窮時且紛而無序將不可記憶不如極之於九而以十進其位則舉手而伸屈指而記雖愚魯者皆能之故可便於民生日用傳之數千百年至今不變也觀夫市廛貿易之區百貨羅列精粗美惡貴賤之不同則其數殊焉多寡長短大小之不同則其數又殊焉凡欲以其所有易其所無者必握算而計之其所斤斤計較者莫非數也設有人言吾可用他法以代其數夫誰能信之亘以其乘除加減不過舉手之勞頃刻而得無有奧邃難明之理在其間本無藉乎代也惟是數理幽深最耐探索疇人演算務闡精微於是乎設題愈雜布算愈繁甚至經旬累月不能畢一數且其所求之數往往雜糅隱匿於各數之內而其理亦紆遠而不易明若每事必設一題每題必立一術枝枝節節而爲之術之多將不可勝紀而仍不足以窮數理之變則不如任數理之萬變而我立一通法以馭之此中法之天元西法之代數所由作也代數之術其已知未知之數皆代之以字而乘除加減各有記號以爲區別可如題之曲折以相赴迨夫層累已明階級已見乃以所代之數入之而所求之數出焉故可以省算學之工而心亦較逸以其可不藉思索而得也雖然代數之術誠簡矣誠便矣試問工此術者遂能不病其繁乎則又不能也夫人之用心日進而不已苟不至昏眊迷亂必不肯中輟故始則因繁而求簡及其既簡也必更進焉而復遇其繁雖迭代數十次其能免哉由是知代數之意乃爲數學中鈎深索隱之用非爲淺近之算法而設也若米鹽零雜之事而概欲以代數施之未有不爲市儈所笑者也至於代數天元之異同優劣讀此書者自能知之無待余言也同治十二年十月二十日金匱華蘅芳

序

英國華里司輯
英國傅蘭雅口譯
金匱華蘅芳筆述

論代數之各種記號

第一款 西國之算學各數均以〇一二三四等十箇數目字為本無論何數均可以此記之 用此十箇數目字雖無論何數皆可算惟于數理之深者則演算甚繁用代數乃其簡法也

代數之法無論何數皆可任以何記號代之今西國所常用者每以二十六箇字母代各種幾何因題中之幾何有已知之數亦有未知之數其代之之例恒以起首之字母代已知之數以最後之字母代未知之數今譯之中國則以甲乙丙丁等元代已知數以天地人等元代未知數

第二款 凡丄號在某元之左則指其數與他數相加

如甲丄乙謂乙與甲相加也 如三丄五謂五與三相加其總數八也

第三款 凡丅號在某元之左則指其數與他數相減

如甲丅乙謂甲內減去乙也 如六丅二即指六內減去二則其數為四也

凡數之左邊有丄號者謂之正數有丅號者謂之負數

凡數有不與元相連而其左亦有丄與丅之記號者即算者心中以為可加減若干也因小于〇之數人心中每計想不到故畢用一負數人每不易明故以下說解之

譬如人之產業可算其是一箇正數則其本人所虧欠之錢可算一箇負數

又如自左向右引長作一線則心中可算此線為正數再自右向左退作一線則心中可算此線當為負數

凡數之左邊無正負之記號者亦為正數

凡幾箇代數式俱有丄號或俱有丅號者謂之同號數亦謂之同名數

凡幾箇代數式或有丄號或有丅號者謂之不同號之數亦謂之異名數

第四款 凡代數之式有只一項者謂之獨項式其有數項而每項或有丄號或有丅號者謂之多項式

如丄甲或丅丙俱為獨項式 如乙丄丙或甲丄乙丅丁俱為多項式

第五款 凡將數元相乘記其乘得之式其法或並書其

元或於其間作×號俱可

如甲乙謂甲與乙相乘之數也甲×乙亦然

如甲乙丙謂甲與乙與丙三者連乘也若作甲×乙×丙亦同

若以眞數一十百千萬等數也相乘者則記其相乘之式兩數之間必作×以間之

如二與三相乘必作二×三若不用×號而並書之為二三則與二十三無別矣不可不知

若所乘之式有多項者則其多項之上必作一橫線以牽連之

如甲以丙丄丁乘之再以戊丅己乘之則其丙丄丁及戊丅己之上必各作一線則其式為 $甲\times\overline{丙丄丁}\times\overline{戊丅己}$ 其意謂甲自為一數丙丄丁自為一數戊丅己亦自為一數而以此三數連乘也 近來算學家每不用一號而用括弧如()以包括之則上式應作 甲×(丙丄丁)×(戊丅己) 或不用×號而作 甲(丙丄丁)(戊丅己) 亦同

第六款 凡元之左邊有係之以眞數者此數名曰倍數 謂其所代之數為元之若干倍也

如三甲謂三倍其甲也

凡元之左邊不係之以眞數者其元之倍數為一

如甲卽一甲 如甲乙卽一甲乙

第七款 凡幾何以他幾何分之記其約得之數其法作一線以界其法實線之上為法線之下為實

如 $\frac{三}{十二}$ 謂十二以三約之也卽謂其約得之四也

如 $\frac{乙}{甲}$ 謂置甲以乙約之得乙分之甲也此種之式名之曰分數式

第八款 凡兩式之間有＝者意謂兩邊之數相等也

如 甲丄乙＝丙丅丁 謂甲與乙相并等于丙中減去丁也

第九款 凡幾箇獨項式或幾箇多項式其各元之字有無多少相同者謂之同類之式不相同者謂之不同類之式

如丄甲乙與丅五甲乙為同類之式 如丄甲乙與丄甲乙乙為不同類之式

代數中尚有別種記號于以下各卷中臨用之處再解之茲不具論惟學者欲讀以下各卷之書必于平常算理如加減乘除等類之法也本已明白者方可通因代數乃算學之更深者不必再包學算之理在其中也

興化劉彝程校算

代數術卷一

英國華里司輯
英國　傅蘭雅　口譯
金匱　華蘅芳　筆述

論代數起首之法

代數起首之法與數學起首之法同即加減乘除四法也有此四法則一切之代數式皆可由此生焉

代數加法

第十款　凡代數之加法可分爲三種同式同號者爲一種同式異號者爲一種式號俱異者爲一種

一例　加同式同號之代數法將各元之倍數相加而號及元不變

如 ⊥七甲 ⊥三甲 ⊥甲 ⊥二甲 諸式相加得 ⊥一三甲

如 丅二甲天 丅甲天 丅五甲天 丅二甲天 諸式相加得 丅一〇甲天

二例　加同式異號之代數法將其各元之倍數正負各自相併又以併得之正負數相減正數大則其號爲正若負數大則其號爲負而其元不變

如 ⊥二甲天天 丅甲天天 丅三甲天天 ⊥九甲天天 諸式相加則先以各正式併得 ⊥一一甲天天 又以各負式併得 丅四甲天天 再以所得之兩式相較得 ⊥七甲天天 因正數大於負數故其加得之式爲 ⊥七甲天天

如 ⊥六甲乙⊥七 丅四甲乙⊥九 ⊥甲乙丅五 ⊥七甲乙丅三 諸式相加則先以各正項相併得 ⊥一四甲乙⊥一六 又以各負項相併得 丅四甲乙丅八 乃以併得式相較得 ⊥一〇甲乙⊥八

如 ⊥甲甲⊥二甲天丅天天 丅二甲甲⊥三甲天丅四天天 ⊥六甲甲丅五甲天⊥一天天 諸式相加得 五甲甲⊥六天天

如 ⊥四甲甲乙 丅甲甲乙 丅三甲甲乙 諸式相加得 〇

三例　加式號俱異之代數法以諸式任意連書之其式號俱不變

如 二甲 三乙 丅四丙 相加得 二甲⊥三乙丅四丙

如 甲天⊥二甲地 乙乙丅三乙人 相加得 甲天⊥二甲地⊥乙乙丅三乙人

代數減法

第十一款　凡代數之減法有一公法其法曰反其減式之正負而加之即得

如 五甲丅一二乙 以 二甲丅五乙 減之得 三甲丅七乙

如 六天丅八地⊥三 以 二天⊥九地丅二 減之得 四天丅一七地⊥五

如 五天地丄二丅八天丅地 以 三天地丅八丅八天丄三地 減之得 二天地丄六丅一六天丄二地 如 甲甲丄甲天丅地地 以 乙乙丅乙地丄天天 減之得 甲甲丄甲天丅地地丅乙乙丄乙地丅天天

減法反號之理以說明之

設有 寅丅卯 欲於其中減去 二巳丅三午 假如先以 二巳 減之則其式為 寅丅卯丅二巳 然若既減去 二巳 再減去 三午 則所得之數必比僅減去 二巳 之數小而今所欲得之數應比僅減去 二巳 之數大其所大之數必等於 三午 可見其應得之數其式必為 寅丅卯丅二巳丄三午 則反號相加之理自易明矣

代數乘法

第十二款 定號之公法曰同號之數相乘其乘得之數為正異號之數相乘其乘得之數為負

凡代數之乘法可分為二種一獨項與獨項相乘一獨項與多項相乘或多項與多項相乘

一例 乘獨項式之法先以定號公法定其正負乃以兩式中之倍數相乘為所得之倍數記於正負號之右再以兩獨項式中所有之元並書於其右即得

如 丄甲 以 丄丙 乘之得 丄甲丙 如 丄五甲 以 丅六乙 乘之得 丅三〇甲乙

如 丅三甲天 以 丄七甲乙 乘之得 丅二一甲甲乙天 如 丅二甲乙 以 丅三丙人 乘之得 丄六甲乙丙人

二例 乘多項之式法以法之每項各與實之每項如獨項相乘之法一一徧乘之乘訖併之即得

如 四甲丅二乙丄丙 以 三甲 乘之得 一二甲甲丅六甲乙丄三甲丙 為所求之式

如 二天丄地 以 天丅二地 乘之則先以 天 乘 二天丄地 得 二天天丄天地 又以 丅二地 乘 二天丄地 得 丅四天地丅二地地 相併得 二天天丅三天地丅二地地 為所求之式

如 甲甲丅甲乙丄乙乙 以 甲丄乙 乘之則先以 甲 乘之得 甲甲甲丅甲甲乙丄甲乙乙 後以 乙 乘之另得 甲甲乙丅甲乙乙丄乙乙乙 併之得 甲甲甲丄乙乙乙 為所求之式

如甲丅乙丄丙以甲丄乙丅丙乘之則得甲甲丅甲乙丄甲丙及丄甲乙丅乙乙丄乙丙及丅甲丙丄乙丙丅丙丙乃以此三式相併

得甲甲丅乙乙丄二乙丙丅丙丙為所求之相乘式

多項相乘之理以說明之

設有甲丅乙欲以丙丅丁乘之因乘法之意恒為倍其數至若干次所以若用丙丅丁乘甲丅乙必倍其甲丅乙至丙丅丁之次數即為乘得之數然若以甲丅乙倍至丙次則所得之數必太多其所多之數必為甲丅乙倍至丁次之數惟準加法之理倍其甲丅乙至丙次則為丙甲丅丙乙若倍其甲丅乙至丁次則為丁甲丅丁乙所以必以丁甲丅丁乙與丙甲丅丙乙相較乃可得其相乘之數而準減法之理其較數之式必為丙甲丅丙乙丅丁甲丄丁乙所以甲丅乙與丙丅丁相乘之式亦必為丙甲丅丙乙丅丁甲丄丁乙則乘法定號之理自易明矣

凡將數幾何之式相乘則其乘得之式必含其各幾何之元數

如甲乙丙三式俱為甲乙丙式之乘數

如甲丄天及乙丅天俱為(甲丄天)(乙丅天)之乘數

若任以一式自相乘至任何次則其乘得之式為原式之若干乘方而其原式為方根

如甲甲 甲甲甲 甲甲甲甲 俱為甲元之乘方式

推有時因並寫多字殊覺不便故用省字之法但書其一而記其字數於本元之右角上此數謂之指數亦謂之方指數

如甲為方相則甲甲可作$甲^{二}$ 甲甲甲可作$甲^{三}$

甲甲甲甲可作$甲^{四}$ 甲甲甲甲甲可作$甲^{五}$ 其他依此類推

凡兩箇本式相乘之式謂之平方式三箇本式相乘之式謂之立方式任幾箇本式相乘之式謂之幾方式

如$甲^{二}$為甲之平方式亦謂之甲之二方式

如$甲^{三}$為甲之立方式亦謂之甲之三方式

推之$甲^{四}$為甲之四方式$甲^{五}$為甲之五方式$甲^{六}$為甲之

卯方式

準指數及乘法之理知凡以同根異方之式相乘只須以兩式之指數相倂卽得

如 甲三乂甲二 卽 甲五。 如 天四乂天三 卽 天七。 其公式爲 甲卯乂甲寅＝甲卯丄寅。

代數除法

第十三款　變號之公法曰同號之數相除其除得之數爲正異號之數相除其除得之數爲負。

欲明除法變號之理以乘法之定號互觀之其理易明蓋不過欲其所得之數與法相乘仍與原實之正負相同也。

凡記代數除約之式每書其法於實之上而法實之間作一橫線以界之（詳見二十五款）惟此不過渾言以此式約彼式耳若欲詳其約得之式則有三例以明之

一例　若法爲獨項式而實之每項均爲法所可約者則以法之倍數各約其實中每項之倍數又去其與法相同之元卽爲約得之式

如 一二甲乙丙 以 三甲丙 約之則依分數之公法當書之爲 $\dfrac{\text{三甲丙}}{\text{一二甲乙丙}}$ 惟此式可以法之倍數三約其實之倍數一二爲四而又可去其法實相同之元甲丙則式中僅有乙元故其約得之式爲四乙

如有多項式 一六甲天地丄二八甲天人丄四甲天 以 四甲天 約之則其約得之式爲 四甲地丅七天丄天。

若法與實爲同類之乘方式則以法之指數減實之指數卽得

如 甲 以 甲 約之得 甲 卽 甲。

二例　若法爲獨項式而與實之式不同類者則書其法於實之上而中作橫線以界之故法爲分母實爲分子。

如 三甲乙二 以 二寅乙丙 約之則其約得之式爲 $\dfrac{\text{二寅乙丙}}{\text{三甲乙二}}$ 有時遇此種式更可約之使爲簡式者詳見第二卷約分款中。

三例　若法爲多項之式者則其除法有三步（猶言有三番功夫也）

一、先將其法實之各項任以一箇元數爲主按其方指數之大小而挨次序列之。二、將法之首項約其實之首項爲商得之式并定其正負之號如公

法再將商得式乘其全法以減原實如適能減盡則其商得之式即爲約得之全式而第三步功夫可省如減實不能適盡則必以餘實再爲新實用第三步之法求之 三將法之首項約新實之首項爲二次商得式並定其正負亦如第二步法乃以此次商得之式記於前次商得式之右再將此次商得式乘其全法以減新實若仍有餘實則仍爲新實如法求之至減實適盡而止則所得之各商式即爲約得之全式若求至數次覺實數終不能減盡則可依下款之法書之

如有式 八甲²⊥二甲乙丅一五乙² 以 二甲⊥三乙 約之準本款第三例得 四甲丅五乙 爲約得式其布算之草如

法　　實　　得

二甲⊥三乙）八甲²⊥二甲乙丅一五乙²（四甲丅五乙

八甲²⊥一二甲乙

丅一〇甲乙丅一五乙²

丅一〇甲乙丅一五乙²

解曰前草中之法實各項均以甲之方數自大而小排列之先將法之首項 二甲 約實之首項 八甲² 得 四甲 爲商得之首項式乃以此式乘其法得 八甲²⊥一二甲乙 以減實得餘式 丅一〇甲乙丅一五乙² 爲新實再以法之首項 二甲 約新實之首項 丅一〇甲乙 得 丅五乙 爲商得之次項式乃以此式乘其原法得 丅一〇甲乙丅一五乙² 以減新實適盡故併一二兩次之商得式得 四甲丅五乙 爲約得式之全式茲更設四草於後以明多項式之除法

一式 設有 三甲³丅一三甲²乙⊥一〇甲乙²丅二乙³ 以 三甲丅乙 約之得 甲²丅四甲乙⊥二乙² 其算草如左

法　　實　　得

三甲丅乙）三甲³丅一三甲²乙⊥一〇甲乙²丅二乙³（甲²丅四甲乙⊥二乙²

三甲³丅甲²乙

丅一二甲²乙⊥一〇甲乙²丅二乙³

丅一二甲²乙⊥四甲乙²

⊥六甲乙²丅二乙³

⊥六甲乙²丅二乙³

二式　設有 $甲^{2}+乙^{2}$ 以 $甲+乙$ 約之，得 $甲-乙+\frac{二乙^{2}}{甲+乙}$ 其算草如左

法　實　得

$$
\begin{array}{l}
甲+乙)\ 甲^{2}+乙^{2}\ (\ 甲-乙+\frac{二乙^{2}}{甲+乙} \\
\quad 甲^{2}+甲乙 \\
\hline
\quad -甲乙+乙^{2} \\
\quad -甲乙-乙^{2} \\
\hline
\quad\quad +二乙^{2} \\
\end{array}
$$

三式　設有 $甲^{2}-乙^{2}$ 以 $甲-乙$ 約之，得 $甲+乙$ 其算草如左

法　實　得

$$
\begin{array}{l}
(甲-乙)\ 甲^{2}-乙^{2}\ (\ 甲+乙 \\
\quad 甲^{2}-甲乙 \\
\hline
\quad +甲乙-乙^{2} \\
\quad +甲乙-乙^{2} \\
\hline
\end{array}
$$

四式　設有 $一$ 以 $一-天$ 約之，得 $一+天+天^{2}\cdots$ 其算草如左

法　實　得

$$
\begin{array}{l}
一-天)\ 一\ (\ 一+天+天^{2}\cdots \\
\quad 一-天 \\
\hline
\quad +天 \\
\quad +天-天^{2} \\
\hline
\quad\quad +天^{2} \\
\quad\quad +天^{2}-天^{3} \\
\hline
\quad\quad\quad +天^{3} \\
\end{array}
$$

第十四款　有時以法除實任求至多項終不能盡則記其約得之式有二法

一法　可以無窮之級數式書之因觀其數項而其後之各項可類推而知之故也

如前款之第四式其約得之式書之為 $一+天+天^{2}\cdots$ 是以無窮之級數式記之也

二法　可以照算學之理命其不盡之式為分子而以原法為分母作約得式之末項

如前款之第四式其約得之式可作 $一+天+天^{2}+\frac{天^{3}}{一-天}$ 是也

除法之理不必細解可以數語明之

試以約得之式與法之各項一一相乘乃從原實之式中一一減去其乘得之各項必適盡無餘則所得之式必為法約實之式可以了無疑義矣

代數術卷二

英國華里司輯

英國 傅蘭雅 口譯
金匱 華蘅芳 筆述

論代數諸分之法

第十五款 代數之除法或有法大於實或有實式中之倍數及元非法所能約者則其除約之式必以分數之法書之其所代之數乃易推

如有分數式 $\frac{五}{七}$ 則此式之意如以單數一平分之為七分而取其五分又如以五乘一乃以乘得之數平分為七分而取其一分

第十六款 凡分數之式上為法下為實法即分母實即分子

如 $\frac{甲}{乙}$ 則乙為分母甲為分子

第十七款 凡分數之式其分子小於分母者謂之常分數其分子大於分母或等於分母者謂之混分數若有一整幾何與分數相連者謂之帶分數

如 $\frac{甲}{甲+大}$ 等類之式為常分數

如 $\frac{甲}{甲}$ 或 $\frac{甲+天}{甲}$ 等類之式皆為混分數

如 $乙+\frac{大}{甲}$ 等類之式為帶分數

第十八款 凡分數之式有兩式之母子可以互易者此即此式之分母可與彼式之分子交換而此式之分子可與彼式之分母交換也此種分數式謂之對代之分數

如 $\frac{乙}{甲}$ 與 $\frac{甲}{乙}$ 為對代之分數

第十九款 凡約分之法先以一理為本其理曰如將任何分數式之子母俱以任何數乘之或約之則其式雖變而其值不變值者本式所代之數也亦名相當數

如以分數式 $\frac{乙}{甲}$ 令等於丙丙既等於甲約乙之數則乙必等於 $丙甲$ 將此相等之式 $乙=丙甲$ 各以任何幾何卯乘之則得 $丙甲卯=乙卯$ 將此兩邊之項各以 $甲卯$ 約之則所得之式亦必相等即 $\frac{乙}{甲}=丙=\frac{乙卯}{甲卯}$ 此可為其理之證

由此可見任何分數式可以大變其式而其所代之數仍同 又可見任何整數之式皆可變為分數之式法以任何數乘其整數命之為分子而即以所乘之數為其分母即得 又可見任何繁重之分數有時可以他式約之使變為簡式法先求得一數可度其子母俱得

整數者以約其子母即得此種約分之數謂之公約數其數或為獨項式或為多項式如為獨項式者則易知若為多項式者則必依下款之法求之

代數求等 此為第一題

第二十款　凡求兩幾何式之最大公約數其法有二步猶言兩層也　一先將兩式中之諸項均以一箇元數為主依指數之大小挨次列之視兩式中有各項公共之元數則提出另寄之此即獨項之公約數也　若每式中自有各項公共之元數則去之　二乃視兩式之指數孰大孰小以小者為法大者為實如分數之法書之以法減實滿法者去之至不滿法則以減餘之式為法前法為實仍如前法去之若法實中各有公共之數則隨時汰之如是輾轉相去以至於盡則末次所用之法即為兩式之公約數再以前所另寄之獨項公共數乘之即得兩式之最大公約數　有時遇實式中首項之倍數非法之首項倍數所能度者必另以他數通之方能約盡此項

一式設有二代數式 甲^{2}天丅天^{3} 及 甲^{3}丅二甲^{2}天丄甲天^{2} 求其最大之公約數　于上式中去其各項公共之元天于下式中去其各項公共之元甲則得 甲^{2}丅天^{2} 及 甲^{2}丅二甲天丄天^{2} 因此兩式中甲之指數均為二故兩式無分大小無論以何式為法何式為實俱可茲以多項者為實演其術如下

甲^{2}丅天^{2}）甲^{2}丅二甲天丄天^{2}（一
甲^{2}丅天^{2}
———————
丅二甲天丄二天^{2}

如將此餘數 丅二甲天丄二天^{2} 以各項公數 丅二天 約之則得 甲丅天 乃以 甲丅天 為法 甲^{2}丅天^{2} 為實再約之其式如下

甲丅天）甲^{2}丅天^{2}（甲丄天
甲^{2}丅甲天
———————
丄甲天丅天^{2}
丄甲天丅天^{2}
———————

則 甲丅天 為末次之法亦即為原兩式之最大公約數

二式設有二代數式 八甲^{2}乙丅一〇甲乙^{2}丄二乙^{3} 及 九甲^{3}乙丅九甲^{2}乙^{2}丄三甲^{2}乙丅三甲乙^{2} 求其最大之公約數

觀此兩式中各項均有乙元則知乙必為兩式之公約數且知乙必為最大公約數之乘法故以乙約兩

式而寄乙于左又去各項公共之數得 $四甲^{二}\top五甲乙\perp乙^{二}$ (一)及 $三甲^{三}\top三甲^{二}乙\perp甲乙^{二}\top乙^{三}$ (二)欲以(一)式約(二)式則(二)式之首項其倍數三小于(一)式首項之倍數四故必取一整數通其(二)式使其首項之倍數變大而又須適爲四所度盡方能受除假如以四通之得 $一二甲^{三}\top一二甲^{二}乙\perp四甲乙^{二}\top四乙^{三}$ 爲實以 $四甲^{二}\top五甲乙\perp乙^{二}$ 爲法約之其式如下

$$
\begin{array}{r}
四甲^{二}\top五甲乙\perp乙^{二})\,一二甲^{三}\top一二甲^{二}乙\perp四甲乙^{二}\top四乙^{三}\,(三甲 \\
\underline{一二甲^{三}\top一五甲^{二}乙\perp三甲乙^{二}\qquad\quad} \\
\perp三甲^{二}乙\perp甲乙^{二}\top四乙^{三}
\end{array}
$$

此餘數 $三甲^{二}乙\perp甲乙^{二}\top四乙^{三}$ 之式中有各項公共之元乙以乙約之則爲 $三甲^{二}\perp甲乙\top四乙^{二}$ 應以此式爲法而以前次之法 $四甲^{二}\top五甲乙\perp乙^{二}$ 爲實惟因法之首項倍數三不能度盡實之首項倍數四故必以三通之得 $一二甲^{二}\top一五甲乙\perp三乙^{二}$ 爲實則約式如下

$$
\begin{array}{r}
三甲^{二}\perp甲乙\top四乙^{二})\,一二甲^{二}\top一五甲乙\perp三乙^{二}\,(四 \\
\underline{一二甲^{二}\perp四甲乙\top一六乙^{二}} \\
\top一九甲乙\perp一九乙^{二}
\end{array}
$$

將此餘數 $\top一九甲乙\perp一九乙^{二}$ 以各項公共數 $\top一九$ 約之則得 $甲\top乙$ 以爲法而以前次之法 $三甲^{二}\perp甲乙\top四乙^{二}$ 爲實則約式如下

$$
\begin{array}{r}
甲\top乙)\,三甲^{二}\perp甲乙\top四乙^{二}\,(三甲\perp四乙 \\
\underline{三甲^{二}\top三甲乙\qquad\quad} \\
\perp四甲乙\top四乙^{二} \\
\perp四甲乙\top四乙^{二}
\end{array}
$$

其式已減盡而末次之法其式爲 $甲\top乙$ 由此可見所求得之公約數即爲 $甲\top乙$ 再以前所寄之公約數乙乘之得 $乙(甲\top乙)$ 即爲原兩式之最大公約數

第二十一款 前題之理可以分款證之

一任有兩式可以一多項式之公約數度之適盡者則

任取他單項式或乘其兩原式或約其兩原式仍可以多項之公約數度之

如 (天丅甲)巳 及 (天丅甲)午 此兩式俱可以 天丅甲 約之　設式變為 (天丅甲)巳卯 及 (天丅甲)未 則仍可以 天丅甲 約之

二凡約法之中無論何式能度其法實二式者亦能度其法實相較之餘數

設天為能約法實二式之幾何則法與實可以 天甲 與 天乙 命之若其約得數為午則其末約盡之時餘數必為 天甲午丅天乙 觀此式則易知可以天約之

三凡幾何式能度法與餘數者則此式亦能度其實

如命 天甲 為法 天未 為餘數午為約得數則實數之式必為 天未⊥天午甲 此式及法與餘數俱可以天度之

前款之末式可以此三分款之理證之

從第一分款之理易知公約數所度之式任以他單項數乘之仍可度盡

從第二分款之理易知無論何式若能度前款二式中之法 乙丄乙甲五丅甲四 及實 乙四丅乙甲四⊥乙甲二丅甲二一 者則必能度其第一餘數 乙四丅乙甲⊥乙甲三 亦能度其第二餘數 乙九丄乙甲九丅一 但此餘數式中所能有之公約數不過一箇即 乙丅甲 是也而 乙丅甲 亦為 乙四丅乙甲⊥乙甲三 及 乙四丅乙甲⊥乙甲三 之公約數

所以從第三分款之理知末次餘數 乙丅甲 必為 乙三⊥乙甲三丅甲二一 及原法 乙丄乙甲五丅甲四 之公約數亦必為原實 乙四丅乙甲四⊥乙甲二丅甲二一 之公約數所以知 乙丅甲 必為所求之最大公約數

代數約分　此為第二題

第二十二款　凡化分數式為最簡之項式法取法實二式之最大公約數（最大公約數如前題之法求之）約其母子即得

一式有 $\frac{\text{丙丁甲四二}}{\text{丙乙甲六五}}$ 欲約為最簡之式此視其母子即知其最

大之公約數爲八甲丙以此約其原式之母子$\frac{\text{二四甲丁丙}}{\text{五六甲乙丙}}$卽得$\frac{\text{三丁丙}}{\text{七甲乙}}$爲最簡之式。

二式有$\frac{\text{甲}^{三}\text{丅二甲}^{二}\text{天丄甲天}^{二}}{\text{甲天丅天}^{二}}$欲約爲最簡之項式，觀前題一式，已知其最大公約數爲$\text{甲丅天}$以此約其原式之母子$\frac{\text{甲}^{三}\text{丅二甲}^{二}\text{天丄甲天}^{二}}{\text{甲天丅天}^{二}}$卽得$\frac{\text{甲}^{二}\text{丅甲天}}{\text{甲天丄天}^{二}}$爲最簡之多項式。

又如有式$\frac{\text{八甲乙丅一〇甲乙}^{二}\text{丄二乙}^{三}}{\text{九甲}^{二}\text{乙丅九甲乙}^{二}\text{丄三甲}^{二}\text{乙丅三甲乙}^{三}}$可約之令等于$\frac{\text{八甲乙丅二乙}^{二}}{\text{九甲}^{二}\text{丄三甲乙}}$約此式所用之最大公約數其式爲$\text{乙(甲丅乙)}$見第一題第二式。

代數通分納子 此爲第三題

第二十三款　凡化帶分式爲全分數法，將帶分式中之整數以分數之母乘之，與其分子相加減，爲所得之分子，以其分母爲公分母，卽全成分數式。

一式有$\text{天丄}\frac{\text{甲}}{\text{甲丅天}}$欲全化之爲分數式，則依法得$\frac{\text{甲}}{\text{甲丅天}}$

又如$\text{天丅}\frac{\text{天}}{\text{甲丅天}}$欲全化爲分數式，則依法得$\frac{\text{天}}{\text{天丅甲丄天}}$卽$\frac{\text{天}}{\text{二天丅甲}}$

二式有$\text{甲丅天}\frac{\text{甲丄天}}{\text{天}}$欲全化爲分數式，則先得$\frac{\text{甲丄天}}{(\text{甲丅天})(\text{甲丄天})\text{丄天}}$卽$\frac{\text{甲丄天}}{\text{甲}^{二}}$。

化全分數爲整數式及帶分式 此爲第四題

第二十四款　凡化全分數爲整數式及化爲帶分式法，以分母約其分子，得整數，如有餘數，則爲所帶之分子，而以原分母爲其所帶之分母。

一式有$\frac{\text{天}}{\text{甲天丄甲}}$欲化爲整數或帶分式，則依法得$\text{甲丄}\frac{\text{天}}{\text{甲}}$。

二式有$\frac{\text{甲丄天}}{\text{甲天丄二天}^{二}}$欲化爲整數或帶分式，則依法得$\text{天丄}\frac{\text{甲丅天}}{\text{天}}$。

又式有$\frac{\text{天丅地}}{\text{天}^{二}\text{丅地}^{二}}$依法化之得$\text{天丄地}$此爲整數式。

代數齊同通分 此爲第五題

第二十五款　凡化數項不同母之分數爲同母同值（同值者謂其所代之數仍與原代之數相同也）之分數法，各以本項之分子與他項之分母連乘，爲本項之新分子，以各項之原分母連