全国高职高专教育“十一五”规划教材

应用数学基础

主编　王玉华　彭秋艳

高等教育出版社
Higher Education Press

全国高职高专教育“十一五”规划教材

应用数学基础

Yingyong Shuxue Jichu

主　审　高世贵
主　编　王玉华　彭秋艳
副主编　杨晓冬　王小强　吴丽华

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本教材是全国高职高专教育“十一五”规划教材。本书基于高等职业教育层次的特点，结合高等职业学生数学基础，体现高等职业教育理念，符合应用型技术人才的教育培养目标，注重学生的数学素质的培养，尤其注重基本计算能力和应用能力的培养。

全书共分七章，主要内容包括极限与连续、导数与微分、导数的应用、一元函数积分学、微分方程、线性代数初步和数学文化等。在前六章均编写应用模型与数学实验内容，主要介绍数学的应用模型和数学软件 MATLAB7.0 的使用。

本书将教材与实训融为一体，每节末设有同步训练，每章末设有综合训练和自主训练，旨在提高学生分析问题、解决问题的能力。

本书适用于高职高专院校、成人高校、继续教育学院和民办高校数学教学，也可作为有关人员学习数学知识的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

应用数学基础 / 王玉华，彭秋艳主编．—北京：高等教育出版社，2010.3
ISBN 978－7－04－028631－1

Ⅰ．①应… Ⅱ．①王… ②彭… Ⅲ．①应用数学－高等学校：技术学校－教材 Ⅳ．①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 023491 号

策划编辑 邓雁城 **责任编辑** 李 陶 **封面设计** 赵 阳 **责任绘图** 尹文军
版式设计 张 岚 **责任校对** 俞声佳 **责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400－810－0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	北京中科印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×1092 1/16	版 次	2010年3月第1版
印 张	13.5	印 次	2010年3月第1次印刷
字 数	330 000	定 价	20.50元

物料号 28631－00

高职高专院校数学课程教材

编　写　组

总召集人：高世贵（辽宁广播电视大学、辽宁装备制造职业技术学院）
经管类数学组召集人：于桂萍（黑龙江农业经济职业学院）
工科类数学组召集人：王玉华（辽宁广播电视大学、辽宁装备制造职业技术学院）
编写组成员（以姓氏笔画为序）：
王小强（辽宁铁道职业技术学院）
石业娇（大连水产学院职业技术学院）
田浩鹏（黑龙江工商职业技术学院）
刘红（哈尔滨金融高等专科学校）
刘颖（辽宁经济职业技术学院）
李甜甜（辽宁职业技术学院）
杨晓冬（哈尔滨职业技术学院）
吴坤（长春金融高等专科学校）
吴丽华（辽源职业技术学院）
何剑宇（辽宁现代服务职业技术学院）
季霏（黑龙江工商职业技术学院）
彭秋艳（黑龙江工商职业技术学院）
程庆龙（辽宁职业技术学院）
程敬松（吉林交通职业技术学院）

前　　言

应用数学基础是高职高专院校各专业必修的一门公共基础课，本书是面向这门课程的教、学一体的教材，是全国高职高专教育“十一五”规划教材。

本书基于高职教育层次的特点，结合高职教育学生数学基础，努力体现高职教育理念，符合高职教育目标，突出基本计算能力和应用能力的训练，注重学生数学思想和文化素养的培养。在编写思路上，着重以体现数学思想、掌握数学基础知识为基本点，使学生通过学习数学知识，提高解决专业课中所涉及数学问题的能力，真正做到教师的“教”与学生的“学”结合起来，能够用数学知识解决问题，努力做到为后续课程的学习服务。在编写过程中，对以往的教学内容进行了认真的探讨，参考了国内外有关专著、教材，结合近几年数学教学和改革的经验与成果，突出了时代性、应用性和可操作性，以一种新的“工具课”模式出现，使本教材具有较鲜明的特点。具体体现在以下几个方面：

1. 在内容体系设计上，本着“必需”和“够用”的原则，淡化了数学理论的证明和复杂公式的推导；在内容安排设置上，以基本概念、基本计算为主，突出培养计算能力和解决问题的能力；在教学过程设计上，贴近学生与教师的实际，采用数形结合方法，尽量用图形和数表直观地描述定义、定理，使之易教好学，具有可操作性。

2. 蕴含丰富的数学思想，重视数学思想的渗透与应用，将数学知识、数学思想和数学方法融入工程实例中。引例源于实际，贴近生活，渗透数学思想，体现数学原理。

3. 以数学应用为主线，体现了数学教学的应用性。本教材从知识的引入，到思想方法的形成，再到其具体应用都体现了应用数学这条主线。在引例、解释和应用方面尽量多地联系与实际相关的问题，着力体现数学在不同领域中的应用，特别是在工程技术、现代科学等方面的应用。具体实例既能贴近学生感兴趣的知识，又能够很好地启发学生的思维，从而发挥学生自主学习的积极性。

4. 注意到数学教育的特点，在每章开始，给出学习目标，引导学生学什么，列出导学提纲，告诉学生怎样学。在学习每个知识点后，配有同步训练，利于学生理解教学内容，在学习每个知识模块后，设有综合训练和自主训练，帮助学生检查学习效果，起到深刻理解和熟练掌握课程内容的作用。

5. 注重“工具课”特性，增加数学应用模型和数学实验部分。数学的广泛应用性使得各个领域都用到数学这一工具，用所学知识，建立数学模型，解决实际问题，是数学教学的目的。考虑到学生都会使用计算机，我们增设了数学软件 MATLAB7.0 版，在高职教材中属于时尚，彰显时代性。将手工计算转化为计算机计算，降低了数学计算的难度，起到为专业课程服务、为生产实践服务的作用，提高了学生学习效率和计算的准确性。

6. 数学文化素养是当今社会不可或缺的文化素养之一，培养与提高数学文化素养旨在分析问题逻辑严谨，解决问题理性灵活。通过数学之美，数学的应用广泛性，展示数学的魅力，增强学

生学习数学课程的兴趣。

本教材在写作上力求概念描述准确,语言简洁精炼,重点明确突出,引例源于实际,难易程度适宜。

本教材由王玉华(辽宁广播电视大学、辽宁装备制造职业技术学院)、彭秋艳(黑龙江工商职业技术学院)任主编,杨晓冬(哈尔滨职业技术学院)、王小强(辽宁铁道职业技术学院)、吴丽华(辽源职业技术学院)任副主编。具体编写人员和编写分工如下:彭秋艳编写第1章,吴丽华编写第2章,程庆龙(辽宁职业技术学院)编写第3章,杨晓冬编写第4章,王小强编写第5章,刘颖(辽宁经济职业技术学院)编写第6章,王玉华编写第7章;其中季霏(黑龙江工商职业技术学院)编写第1、2、4章数学实验,田浩鹏(黑龙江工商职业技术学院)编写第3、5、6章数学实验;季霏、田浩鹏、程娜(辽宁广播电视大学、辽宁装备制造职业技术学院)三位老师还对各章训练题目校对了答案;全书的设计及统稿由王玉华完成。

高世贵教授(辽宁广播电视大学、辽宁装备制造职业技术学院)对本书进行了仔细的审阅,提出了许多有价值的建议和修改意见,高等教育出版社的有关领导和编者所在学校领导在本书编写、出版过程中提供了许多帮助和支持,在此对他们表示感谢!

由于编者水平所限,不妥方面在所难免,恳请广大读者批评指正,我们将不胜感激。

编　者

2009年12月

目　　录

第 1 章

极限与连续

【学习目标】

1. 理解函数的概念，会求函数的定义域，能建立简单实际问题的函数关系；
2. 理解极限的概念，熟练掌握极限的运算方法；
3. 了解函数连续性的概念，会求函数的间断点；
4. 了解数学实验的基本知识，会利用 MATLAB 数学软件求函数的极限.

【导学提纲】

1. 极限定义中关键是把哪两个变量的变化趋势表述清楚？
2. 两个重要极限的结构特征是什么？
3. 极限的运算方法有哪几种？
4. 函数连续性指的是什么？

函数是客观世界中反映变量之间相依关系的数学模型，是微积分研究的主要对象. 极限是微积分学的重要基本概念，极限思想贯穿微积分的始终，而连续函数也是微积分学研究的主要对象. 本章在复习和加深函数有关知识的基础上重点讨论函数的极限，并介绍函数的连续性.

1.1 函数

在考察某些自然现象和社会现象时，常常会遇到各种不同的量，其中保持数值不变的量称为**常量**；可以取不同数值的量称为**变量**. 例如，计算匀速直线运动的位移公式 $s=vt$，v 是常量，而 s，t 是变量，这两个变量之间有一定的对应关系，这种对应关系正是函数概念的实质.

1.1.1 函数的概念与性质

1. 函数的概念

引例 1 已知圆半径为 r,则其面积为 $S=\pi r^2$,其中 π 是圆周率. 当半径 r 给定一个数值时,按上式 S 总有唯一确定的数值与其对应.

引例 2 对某厂甲产品一年内的月产量 q(单位:件)统计如下表:

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
产量 q	386	420	408	421	450	456	455	439	444	439	443	440

从表中很直观地看到月份 t 与月产量 q 之间的对应关系.

(1) 函数的定义

定义 1 设 x,y 是两个变量,若对非空数集 D 中每一个值 x,按照一定的对应法则 f 总有唯一确定的值 y 和它对应,则称 y 是 x 的**函数**,记为 $y=f(x)$,x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,数集 D 称为函数的**定义域**,$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的**值域**.

在函数 $y=f(x)$ 中,当 x 取值 x_0($x_0\in D$)时,则称 $f(x_0)$ 为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值.

函数 $y=f(x)$ 的对应法则 f 也可用 g,φ,F 等表示,相应的函数记作 $g(x)$,$\varphi(x)$,$F(x)$.

由函数定义易知,引例 1 和引例 2 中变量之间都有函数关系.

例 1 设引例 2 中月产量 q 与月份 t 的函数关系为 $q=f(t)$,求这个函数的定义域.

解 由函数的实际意义知,t 只能取 1 到 12 这 12 个整数,则函数定义域为:

$$D=\{t\mid 1\leqslant t\leqslant 12,t\in\mathbf{N}\}$$

若不考虑函数的实际意义,而抽象地研究用数学表达式确定的函数,我们规定函数的定义域是使数学表达式有意义的一切实数,通常需要注意以下几点:

① 分式函数的分母不能等于零;

② 偶次根式的被开方式必须大于或等于零;

③ 对数函数的真数必须大于零;

④ 正切函数(或余切函数)的定义域是不等于 $k\pi+\frac{\pi}{2}$(或 $k\pi$)($k\in\mathbf{Z}$)的一切实数;

⑤ 反正弦函数与反余弦函数的定义域为 $[-1,1]$;

⑥ 如果函数表达式中含有上述几种函数,则应取各部分自变量取值的交集.

例 2 求函数 $y=\frac{\sqrt{16-x^2}}{x+2}$ 的定义域.

解 要使函数 y 有意义,须有

$$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0\\ x+2\neq 0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4\\ x\neq -2\end{cases}$$

则函数定义域为 $[-4,-2)\cup(-2,4]$.

例 3 求函数 $y=\lg(x+3)+\arcsin(x+3)$ 的定义域.

解 要使函数 y 有意义,须有

$$\begin{cases} x+3>0 \\ -1\leqslant x+3\leqslant 1 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x>-3 \\ -4\leqslant x\leqslant -2 \end{cases}$$

则

$$-3<x\leqslant -2$$

于是函数定义域为 $(-3,-2]$.

例 4 求函数 $y=(x+1)\tan 3x$ 的定义域.

解 由正切函数定义域可以得到

$$3x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z})$$

即

$$x\neq\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\ (k\in\mathbf{Z})$$

则函数定义域为 $D=\{x\mid x\neq\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\}$.

例 5 设分段函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & -1<x\leqslant 0 \\ x^2, & 0<x\leqslant 1 \\ x+1, & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$$

① 画出函数图像;

② 求函数的定义域;

③ 求 $f\left(-\frac{1}{2}\right),f\left(\frac{1}{2}\right),f\left(\frac{3}{2}\right)$ 的值.

解 ① 函数图像如图 1-1 所示;

② 函数的定义域为 $(-1,2]$;

③ $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2}$.

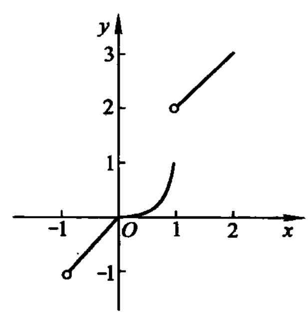


图 1-1

注意 分段函数的定义域是自变量各部分取值的并集.

(2) 函数的两个要素

定义域与对应法则称为**函数的两个要素**.如果函数的两个要素相同,那么它们一定是相同的函数,否则为不同函数.例如:函数 $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 的两个要素相同,故它们是相同函数,而函数 $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$ 的定义域不同,故它们为不同函数.

(3) 函数的表示法

表示函数的方法通常有三种:表格法、图示法和解析法.

如数学用表和引例 2 等都是用表格法表示的函数；心电图和某股票的价格在某天的走势图等都是用图示法表示的函数，虽然这些图对应的函数关系很难用数学式子来表示，但这并不影响它们成为函数；解析法就是用数学式子表示函数的方法. 例如，$y=\sin x$，$y=\frac{x-1}{2x+1}$ 都是用解析法表示的函数. 在以后的讨论中，函数多数是用解析法表示的.

2. 函数的性质

(1) 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即当 $x\in D$，就有 $-x\in D$），若对其定义域 D 内任意 x，恒有 $f(-x)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；若对其定义域 D 内任意 x，恒有 $f(-x)=-f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

例如，函数 $y=x^3$ 是奇函数，函数 $y=x^2-1$ 是偶函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

(2) 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，对于任意 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，若恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**，区间 I 称为单调增区间；若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**单调减少**，区间 I 称为单调减区间.

例如，函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

单调增加函数的图像是沿 x 轴正向逐渐上升的；单调减少函数的图像是沿 x 轴正向逐渐下降的.

(3) 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，若存在常数 $T\neq 0$，使得对于每一个 $x\in D$，有 $x+T\in D$，且总有 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则称函数 $y=f(x)$ 为**周期函数**，其中 T 叫做函数的周期，通常函数的周期是指它的最小正周期.

例如，正弦函数 $y=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数，正切函数 $y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

(4) 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在某区间 I 上有定义，若存在常数 $M>0$，使得对于 I 中任意 x，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**有界**，或称 $y=f(x)$ 在 I 上为**有界函数**，否则，称函数 $y=f(x)$ 在 I 上**无界**.

例如，因为 $|\cos x|\leqslant 1$，所以函数 $y=\cos x$ 在其定义域内有界，而函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内无界.

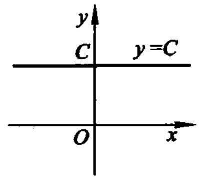
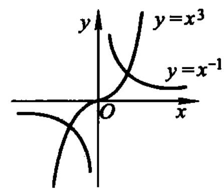
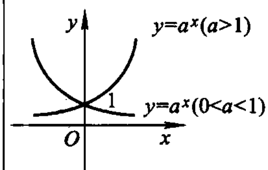
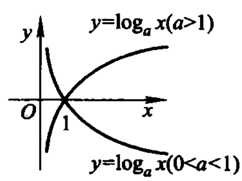
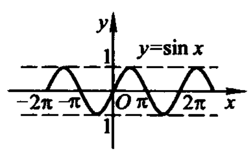
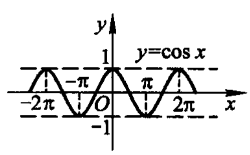
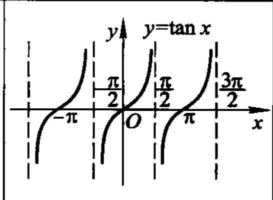
注意　函数的有界性是函数的性质，是限制函数 y 值的.

1.1.2　复合函数与初等函数

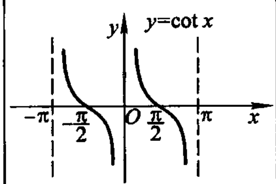
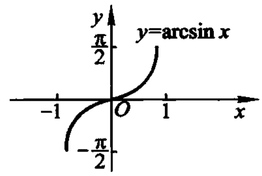
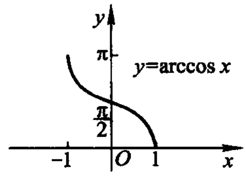
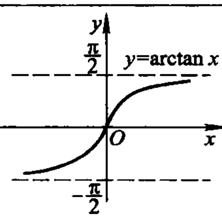
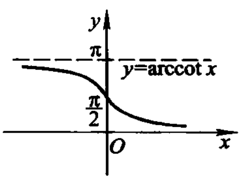
1. 基本初等函数

我们把常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这六类函数统称为基本初等函数，现将其表达式、定义域、值域、图像和性质列表 1-1 如下：

表 1-1　基本初等函数表

函数		定义域与值域	图像	性质
常值函数 $y = C$ （C 为常数）		$x \in (-\infty, +\infty)$ $y = C$		在 y 轴上的截距为 C 图像平行 x 轴
幂函数 $y = x^{\alpha}$ （α 为常数）		当 α 取不同的值时，幂函数的定义域和值域可能不同，但在 $(0, +\infty)$ 内都有定义		过 $(1,1)$ 点 当 $\alpha > 0$ 时，函数在第一象限单调增加 当 $\alpha < 0$ 时，函数在第一象限单调减少
指数函数 $y = a^{x}$ $(a > 0, a \neq 1)$		$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in (0, +\infty)$		过 $(0,1)$ 点 当 $a > 1$ 时，单调增加 当 $0 < a < 1$ 时，单调减少
对数函数 $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$		$x \in (0, +\infty)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		过 $(1,0)$ 点 当 $a > 1$ 时，单调增加 当 $0 < a < 1$ 时，单调减少
三角函数	正弦函数 $y = \sin x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [-1,1]$		奇函数，周期为 2π，有界 在 $\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ $(k \in \mathbf{Z})$ 内单调增加 在 $\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)$ $(k \in \mathbf{Z})$ 内单调减少
三角函数	余弦函数 $y = \cos x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [-1,1]$		偶函数，周期为 2π，有界 在 $(2k\pi - \pi, 2k\pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$ 内单调增加 在 $(2k\pi, 2k\pi + \pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$ 内单调减少
三角函数	正切函数 $y = \tan x$	$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数，周期为 π 在 $\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ $(k \in \mathbf{Z})$ 内单调增加

续表

函数		定义域与值域	图像	性质
三角函数	余切函数 $y=\cot x$	$x \neq k\pi\ (k \in \mathbf{Z})$ $y \in (-\infty,+\infty)$		奇函数,周期为 π 在 $(k\pi,(k+1)\pi)\ (k \in \mathbf{Z})$ 内单调减少
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$	$x \in [-1,1]$ $y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数,有界,单调增加
	反余弦函数 $y=\arccos x$	$x \in [-1,1]$ $y \in [0,\pi]$		有界,单调减少
	反正切函数 $y=\arctan x$	$x \in (-\infty,+\infty)$ $y \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数,有界,单调增加
	反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$	$x \in (-\infty,+\infty)$ $y \in (0,\pi)$		有界,单调减少

2. 复合函数

设函数 $y=e^u$,而函数 $u=\sqrt{x}$,用 $\sqrt{x}$ 代替 e^u 中的 u,得函数 $y=e^{\sqrt{x}}$. 显然,y 是 u 的函数,u 是 x 的函数,通过 u 把 y 和 x 间接地联系起来.

定义 2 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_φ,值域为 W_φ. 如果 $D_f \cap W_\varphi \neq \varnothing$,那么 y 通过 u 构成 x 的函数,把 y 叫做 x 的**复合函数**,记作 $y=f[\varphi(x)]$,其中 u 叫做**中间变量**.

例 6 试求由函数 $y=u^3$,$u=\sin x$ 复合而成的函数.

解 将 $u=\sin x$ 代入 $y=u^3$ 中,即得所求复合函数 $y=\sin^3 x$.

有时,一个复合函数也可以由三个或更多个函数复合而成. 例如,由函数 $y=\ln u$,$u=\cos v$ 和 $v=2x^2+1$ 可以复合成函数 $y=\ln\cos(2x^2+1)$,其中 u 和 v 都是中间变量.

注意 只有满足定义 2 中条件的函数才能复合，否则是不可以复合的. 例如，函数 $y=\arcsin u$ 与函数 $u=x^2+2$ 就不能复合成一个函数，因为 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 与 $u=x^2+2$ 的值域 $[2,+\infty)$ 的交集为空集，即 $y=\arcsin(x^2+2)$ 没有意义.

对于一个复合函数，我们经常需要知道它是由哪几个函数复合而成的，这就是复合函数的分解问题.

例 7 分析下列函数的复合过程：

(1) $y=\sqrt{\ln \ln x}$； (2) $y=\cot^3 \dfrac{x}{2}$；

(3) $y=e^{\sin\sqrt{2x-1}}$； (4) $y=\ln(\cos 2^{3x+1})$.

解 (1) $y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=\ln x$.

(2) $y=u^3$，$u=\cot v$，$v=\dfrac{x}{2}$.

(3) $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=\sqrt{w}$，$w=2x-1$.

(4) $y=\ln u$，$u=\cos v$，$v=2^w$，$w=3x+1$.

注意 对复合函数分解的过程相当于对复合函数从外向内逐层“剥皮”的过程，并且要求每层函数都是基本初等函数或基本初等函数的四则运算式，否则还需要分解.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次函数复合所构成的，并且可用一个数学式子表示的函数，称为**初等函数**.

例如，$y=\cos^2(\sqrt{x}+1)$，$y=e^{\sqrt{x+1}}\sin x$ 等都是初等函数. 后边我们讨论的函数多数是初等函数.

分段函数一般不是初等函数，但分段函数 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x\leqslant 0\end{cases}=|x|=\sqrt{x^2}$ 却是初等函数.

同步训练 1.1

1. 判断下列各组函数是否表示同一函数？并说明理由.

(1) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$； (2) $f(x)=x$，$g(x)=(\sqrt{x})^2$；

(3) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg|x|$； (4) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$，$g(x)=x-1$.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-4x+3}+\sqrt{2x+1}$； (2) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$；

(3) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$； (4) $y=\dfrac{1}{\lg(x+3)}$；

(5) $y=\ln(2x+1)+\dfrac{1}{x^2-1}$； (6) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}+\sqrt{9-x^2}$.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}4x, & x<0\\ 1, & x=0,\\ x^2, & 0<x\leqslant 5\end{cases}$ 求函数的定义域及 $f(-1)$，$f(3)$ 的值，并作出函数图像.

4. 设 $f(x)=e^x$，$g(x)=\sin x$，求 $f(t^2+1)$，$g\left(\frac{1}{t}\right)$，$f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

5. 指出下列函数的复合过程：

(1) $y=\sin(5x^2-6)$；　　(2) $y=e^{1-x^2}$；

(3) $y=\cos^2 e^x$；　　(4) $y=\tan\sqrt{2x^2+1}$；

(5) $y=2^{\sin(2x^2+1)}$；　　(6) $y=\log_2 \sin e^x$.

1.2 函数的极限

在实际问题中，有时除了要讨论变量之间的函数关系外，还需要进一步讨论自变量在某一变化过程中，函数随之变化的趋势，这里蕴含的是极限思想.

1.2.1 极限的概念

引例 1 将一盆 100℃ 的水放在室温为 25℃ 的房间里，水温 T 将逐渐降低，随着时间 t 的推移，水温会越来越接近室温 25℃ .

引例 2 用计算器对数 3 连续开平方，随着开平方次数 n 的逐渐增大，开方后得到的值 y 越来越接近数 1（n 大到一定程度）. 可以验证：上面的结论对任何正数都成立.

这两个引例从表面上看完全不同，但它们有一个共同的特征：自变量在某一变化过程中，相应的函数值接近于某一常数，这正是函数极限的本质.

为方便起见，我们规定：当 x 取正值且无限增大时，记作 $x\to+\infty$；当 x 取负值且 $|x|$ 无限增大时，记作 $x\to-\infty$；当 $|x|$ 无限增大时，记作 $x\to\infty$（包括 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$）；当 x 从 x_0 的左侧无限接近于 x_0 时，记作 $x\to x_0^-$（或 $x\to x_0-0$）；当 x 从 x_0 的右侧无限接近于 x_0 时，记作 $x\to x_0^+$（或 $x\to x_0+0$）；当 x 从 x_0 的左右两侧无限接近于 x_0 时，记作 $x\to x_0$（包括 $x\to x_0^-$ 和 $x\to x_0^+$）.

1. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

先考察当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的变化趋势.

通过图 1-2 可以看出，当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的值都无限接近于确定的常数 0，即当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的值无限接近于确定的常数 0，此时，我们称 0 为函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时的极限.

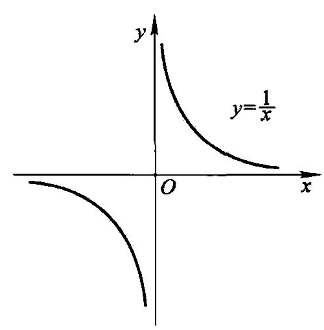


图 1-2

定义 1 如果当 $|x|$ 无限增大（即 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为**函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限**，

记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\ (\text{或当}\ x\to\infty\ \text{时},f(x)\to A\ )$$

类似可得,当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限定义.

注意 极限定义中关键是把自变量和函数的变化趋势表述清楚.

由上述定义知,$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

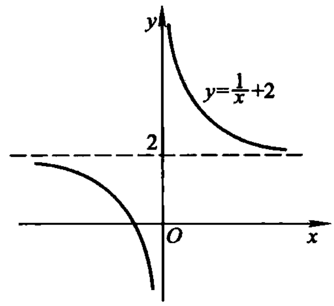


图 1-3

例 1 讨论当 $x\to\infty$ 时,函数 $y=\dfrac{1}{x}+2$ 的极限.

解 如图 1-3 所示,当 $x\to\infty$ 时,函数 $y=\dfrac{1}{x}+2$ 的值无限接近于 2,所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+2\right)=2$$

例 2 讨论当 $x\to\infty$ 时,函数 $y=\arctan x$ 的极限.

解 由基本初等函数表 1-1 中函数 $y=\arctan x$ 的图像容易看出,当 $x\to+\infty$ 时,函数 $y=\arctan x$ 无限接近于 $\dfrac{\pi}{2}$,即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$;当 $x\to-\infty$ 时,函数 $y=\arctan x$ 无限接近于 $-\dfrac{\pi}{2}$,即 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$,而当 $x\to\infty$ 时,函数 $y=\arctan x$ 不能无限接近于同一个确定的常数,所以,当 $x\to\infty$ 时,函数 $y=\arctan x$ 的极限不存在.

由上述极限定义容易得到结论:$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

2. 当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

先考察当 $x\to0$ 时,下列三个函数的变化趋势:

(1) $y=x^2$ (图 1-4);(2) $y=x^2(x\neq0)$ (图 1-5);(3) $y=\begin{cases}x^2, & x\neq0\\ 1, & x=0\end{cases}$ (图 1-6).

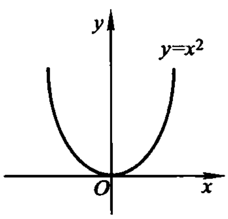


图 1-4

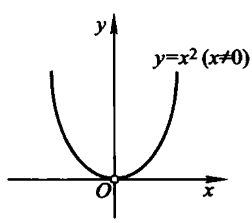


图 1-5

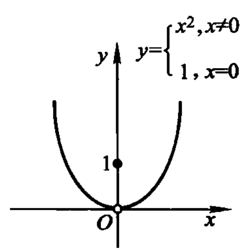


图 1-6

通过图 1-4 看出,当 $x\to0$ 时,函数 $y=x^2$ 的值无限接近于 0;通过图 1-5 看出,当 $x\to0$ 时,函数 $y=x^2(x\neq0)$ 的值也无限接近于 0;通过图 1-6 看出,当 $x\to0$ 时,函数 $y=\begin{cases}x^2, & x\neq0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 的值也无限接近于 0. 我们称当 $x\to0$ 时,这三个函数的极限是 0.