普通高等教育“十二五”重点规划教材

国家工科数学教学基地　国家级精品课程使用教材

Nucleus 新核心

理工基础教材

数学物理方法

第二版

上海交通大学数学系　组编

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”重点规划教材
国家工科数学教学基地　国家级精品课程使用教材

Nucleus
新核心
理工基础教材

数学物理方法

第二版

上海交通大学数学系　组编

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书作为"工程数学"系列课程教材,包含"复变函数""数学物理方程""积分变换"三篇. 全书分 12 章,内容包括: 复数和复变函数;解析函数;复变函数的积分;解析函数的级数展开;留数及其应用;保角映射;数学物理方程的导出及定解问题;分离变量法;初值问题;傅里叶变换;拉普拉斯变换;积分变换的应用.

本书在编写上力求由浅入深,对重点知识注重理论导出和方法应用,特别加强了数学物理方法在实际中应用的实例.

本书可供各高等院校理工科专业作教材. 另配有 PPT 教案供教师使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/上海交通大学数学系组编. —2 版.
—上海: 上海交通大学出版社,2016
新核心理工基础教材
ISBN 978-7-313-15637-2

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①上… Ⅲ. ①数学物理方法—高等学校—教材 Ⅳ. ①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 187228 号

数学物理方法
(第二版)

组　　编: 上海交通大学数学系
出版发行: 上海交通大学出版社
地　　址: 上海市番禺路 951 号
邮政编码: 200030
电　　话: 021-64071208
出 版 人: 韩建民
印　　制: 上海天地海设计印刷有限公司
经　　销: 全国新华书店
开　　本: 787 mm×960 mm　1/16
印　　张: 22.75
字　　数: 428 千字
版　　次: 2011 年 8 月第 1 版　2016 年 9 月第 2 版
印　　次: 2016 年 9 月第 6 次印刷
书　　号: ISBN 978-7-313-15637-2/O
定　　价: 48.00 元

第二版前言

本教材是在《数学物理方法》(上海交通大学出版社,2011)第一版的基础上修订而成.

本书第一版自出版以来作为上海交通大学“数理方法”课程教材使用,多年的教学实践说明,本书第一版的取材深度、主要内容以及结构安排还是比较合理.随着教学改革的不断深入,课程设置的改变导致“数理方法”课时的进一步削减,从而面临教学内容的进一步整合.在这种情况下,再版编写一本突出基本思想方法、简明扼要、便于学习和适应教学新形势的数学物理方法教材显得十分必要.

本教材在保持第一版特点的基础上,努力将数学物理方法的基本思想和方法融入各部分内容的阐述之中,力求做到科学性与通俗性相结合,理论与应用相结合,在内容的处理上由具体到一般,由直观到抽象,由浅入深,循序渐进.其主要特点是:

(1) 为了使读者更好地理解数学物理方法的实质,对教材内容的难点作了适当的分解和叙述的改进.在阐述基本问题和解决方法时,更注重处理问题的基本思想.

(2) 进一步强调了数学物理方法的应用.例如,利用傅里叶变换求解(常)微分、积分方程;利用拉普拉斯变换求广义积分等.

(3) 修订了第一版中的部分例题,增加了例题讲解,并对解决它们的思路和方法作了一定的分析,各种典型例题的介绍有助于读者对数学物理方法基本知识内容的领会和基本方法的掌握.

(4) 对每一章的习题作了分类.第一部分为基本习题,可作为课堂作业布置,用来检验对基本内容和基本方法的掌握程度;第二部分为补充习题,有助于学习能力的培养和增强.

虽然本书从整体框架而言保持了第一版的基本内容和结构，但是上述特点体现了编者在数学物理方法课程改革方面的一些探索，同时也反映上海交通大学数学物理方法课程的特色和定位.

限于编者的水平，书中存在的不妥及疏漏之处，恳请专家及广大读者提出宝贵的意见.

本书的再版得到了上海交通大学出版社鼎力帮助，上海交通大学教务处及数学科学学院领导的关心和支持，在此深表感谢.

编　者

2016 年 8 月于上海交通大学

前　言

“工程数学”系列课程涵盖“复变函数”“数学物理方程”和“积分变换”，是大学本科数学教学中继“高等数学”“线性代数”和“概率论与数理统计”等课程后，为各理工科专业开展后续教育而开设的课程.“工程数学”强调理论与实际结合，它是数学与其他学科之间的一座桥梁.

近年来，大学基础课程的内容和教学有了很大的变化.根据课程改革的要求，原工程数学系列课程被整合为“数学物理方法”课程，教学大纲与教学要求有较大的改动，本书就是为适应此改革编写的.

本书力图在教学内容的组合及教学重点的选择方面有新的突破，并体现以下特色：

(1) 优化调整原教材的部分内容，编排体系上突破原有框架.如：将积分变换应用独立成章，详细介绍其在求解常微分方程的定解问题及数学物理方程定解问题中的应用.

(2) 课程内容按照由浅入深、由具体到抽象、由特殊到一般的原则来组织，对重点知识注重理论导出、方法的应用，强调其应用条件.

(3) 既保持了数学教材传统的严谨，又针对数学物理方法强调计算与应用的特点，将数学训练与生动的物理意义相结合，加强计算，强调应用.在保证数学知识严密性的基础上，减少部分繁琐的理论推导.

本书中加 * 的章节，可供教师在教学上选用.

本书由上海交通大学数学系组织编写，第 1 篇由贺才兴和王健编写；第 2 篇由王纪林编写；第 3 篇由王健编写.本书配有 PPT 教案，可供教师参考.

编　者

2011 年 5 月

目　　录

第1篇　复变函数

第2篇 积分变换

第 1 篇　复变函数

第 1 章　复数和复变函数

16 世纪中叶，G. Cardano(1501—1576)在研究一元二次方程时引进了复数的概念. 复变函数是以研究复变量之间的相互依赖关系为主要任务的一门数学课程. 它与高等数学中的许多概念、理论和方法有相似之处，但又有其固有的特性. 本章主要介绍复数的概念、性质及运算，然后引入平面点集、复变函数以及复球面等概念.

1.1　复数及其表示

1.1.1　复数的定义

定义 1.1　形如

$$z = x + \mathrm{i}y,\quad x,\ y \in \mathbf{R} \tag{1-1}$$

的数称为复数，其中 $\mathbf{R}$ 表示实数集合 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ 称为虚数单位. 称实数 x、y 分别为复数 z 的实部和虚部，常记为

$$x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z. \tag{1-2}$$

当实部 $x = 0$ 时，称 $z = \mathrm{i}y\ (y \neq 0)$ 为纯虚数；当虚部 $y = 0$ 时，$z = x$ 就是实数. 因此，全体实数是复数的一部分，复数是实数的推广. 特别，$0 + \mathrm{i}0 = 0$.

两个复数之间不能比较大小，但可以定义相等. 两个复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 及 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 相等，是指它们的实部与实部相等，虚部与虚部相等，即 $x_1 + \mathrm{i}y_1 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 当且仅当 $x_1 = x_2$，$y_1 = y_2$.

1.1.2　复数的表示

1.1.2.1　代数表示

由式(1-1)所给出的即为复数的代数表示.

1.1.2.2　几何表示

由复数的定义可知，复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 与有序数对 (x, y) 建立了一一对应关系. 在平面上建立直角坐标系 xOy，用 xOy 平面上的点 $P(x, y)$ 表示复数 z，这样复数与平面上的点一一对应，称这样的平面为复平面. 若用向量 $\overrightarrow{OP}$ 表示复数 z，如图 1-1 所示. 该向量在 x 轴上的投影为 $x = \mathrm{Re}\, z$，在 y 轴上的投影为 $y = \mathrm{Im}\, z$，这样复数与平面上的向量也一一对应.

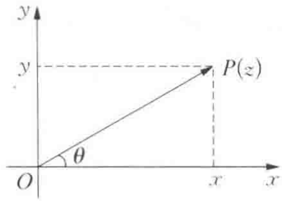

图 1-1　复数的几何表示

向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度称为复数的模，记为 $|z|$，从而有

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1-3}$$

显然

$$|x| \leqslant |z|,\ |y| \leqslant |z|,\ |z| \leqslant |x| + |y|. \tag{1-4}$$

向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 x 轴正向的夹角 θ 称为复数 z 的辐角，记为 $\theta = \mathrm{Arg}\, z$. 由图 1-1 知：

$$\begin{cases} x = |z| \cos\theta,\ y = |z| \sin\theta, \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}. \end{cases} \tag{1-5}$$

若 θ 为 z 的辐角，则 $\theta + 2n\pi$ 也是其辐角，其中 $n \in \mathbf{Z}$，$\mathbf{Z}$ 为整数集. 因此，任何一个复数均有无穷多个辐角. 若限制 $-\pi < \theta \leqslant \pi$，所得的单值分支称为 $\mathrm{Arg}\, z$ 的主值，记为 $\arg z$.

当 $z = 0$ 时，辐角没有定义；当 $z \neq 0$ 时，其辐角主值 $\arg z$ 可由下式求得：

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0,\ y \geqslant 0 \text{ 或 } y \leqslant 0, \\ \pi + \arctan \dfrac{y}{x}, & x < 0,\ y \geqslant 0, \\ -\pi + \arctan \dfrac{y}{x}, & x < 0,\ y < 0. \end{cases} \tag{1-6}$$

例 1.1　求 $\mathrm{Arg}(2 - 2\mathrm{i})$ 及 $\mathrm{Arg}(-3 + 4\mathrm{i})$.

解　由式(1-6)可得

$$\begin{aligned} \mathrm{Arg}(2 - 2\mathrm{i}) &= \arg(2 - 2\mathrm{i}) + 2k\pi = \arctan\left(\frac{-2}{2}\right) + 2k\pi \\ &= -\frac{\pi}{4} + 2k\pi. \end{aligned}$$

$$\operatorname{Arg}(-3+4\mathrm{i}) = \arg(-3+4\mathrm{i}) + 2k\pi = \left[\arctan\left(\frac{4}{-3}\right) + \pi\right] + 2k\pi$$

$$= (2k+1)\pi - \arctan\frac{4}{3}.$$

例 1.2 已知平面上流体在某点 P 处的速度为 $\boldsymbol{v} = 2-2\mathrm{i}$，求其大小和方向.

解 $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$；$\arg\boldsymbol{v} = \arctan\frac{-2}{2} = -\frac{\pi}{4}$.

1.1.2.3 复数的三角表示与指数表示

利用直角坐标与极坐标之间的关系：$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，可将式(1-1)改写为

$$z = r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta), \tag{1-7}$$

其中，$r = |z|$，$\theta = \operatorname{Arg} z$. 称式(1-7)为复数 z 的三角表示.

利用欧拉公式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta, \tag{1-8}$$

式(1-7)又可写为

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \tag{1-9}$$

上式称为复数 z 的指数表示.

例 1.3 试分别将复数 $z_1 = -1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 和复数 $z_2 = 1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ $(-\pi < \theta \leqslant \pi)$ 化为三角表示式和指数表示式.

解 由于

$$r = |z_1| = 2,\ \arg z_1 = \arctan(-\sqrt{3}) = \frac{2}{3}\pi,$$

从而

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{2}{3}\pi\right),\ z_1 = 2\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}.$$

类似地

$$r = |z_2| = \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = 2\cos\frac{\theta}{2},$$

$$\arg z_2 = \arctan\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \arctan\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2},$$

$$z_2 = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\right),\ z_2 = 2\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}.$$

例 1.4 已知 $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1| = 2$，求 θ.

解 由于

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1| = |\cos\theta - 1 + \mathrm{i}\sin\theta| = \sqrt{(\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta} = 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| = 2,$$

从而

$$\frac{\theta}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

所以

$$\theta = (2k+1)\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

1.2 复数的运算及其几何意义

由于实数是复数的特例，因此复数运算的一个基本要求是：复数运算的法则施行于实数时，能够和实数运算的结果相符合，同时也要求复数运算能够满足实数运算的一般定律.

1.2.1 复数的四则运算

定义 1.2 设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$，$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，复数的加、减、乘、除四则运算定义如下：

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2), \tag{1-10}$$

$$z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1), \tag{1-11}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2},\ z_2 \neq 0. \tag{1-12}$$

由定义 1.2 知，复数的四则运算可理解为利用 $\mathrm{i}^2 = -1$ 和实数的四则运算所得.

利用定义 1.2 容易验证，复数的加法满足交换律与结合律，且减法是加法的逆运算；复数的乘法满足交换律与结合律，且满足乘法对于加法的分配律.

全体复数并引进上述运算后就称为复数域. 在复数域内，我们熟知的一切代数