俄罗斯数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

Numbers and Polynomials

数与多项式

[俄罗斯]勃罗斯库列亚柯夫 著　吴品三 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

数与多项式

Numbers and Polynomials

[俄罗斯] 勃罗斯库列亚柯夫 著

吴品三 译

HITP

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书系根据苏俄教育科学院出版社(Иэдателвство Академии Педаяогических наук РСФСР)出版的勃罗斯库列亚柯夫(И. В. ПРОСКУРЯКОВ)著《数与多项式》(Числа и Мноочлены)1949年版译出.

本书共分八章,前两章介绍集合、环、体的基本概念,后六章依次论述自然数、整数、有理数、实数、复数、多项式及代数分式.

本书可作为我国师范学院数学系初等数学复习及研究"数的概念"一科的教学参考书,也可供中学数学教师参考用.

图书在版编目(CIP)数据

数与多项式/(俄罗斯)勃罗斯库列亚柯夫著;吴品三译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016.1

(俄罗斯数学精品译丛)

ISBN 978-7-5603-5665-5

Ⅰ.①数… Ⅱ.①勃…②吴… Ⅲ.①数论②多项式 Ⅳ.①O156②O174.14

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 253792 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 王勇钢
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 16.5 字数 320千字
版 次 2016年1月第1版 2016年1月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-5665-5
定 价 38.00元

序言

数和多项式，初看来，彼此是不同的，但是有很多共同之点.它们都定义有同样性质的加、减、乘、除的运算，并且都是近世代数基本概念之一环的特殊情形.因此，有可能在一种共同理论的范围内来研究数和多项式.这样就可以清晰地看出它们各种性质的相互联系和意义，而且在建立各种数域和多项式时免得多次地、重复同样的论证.

本书目的在于严密地定义数、多项式和代数分式，并且论证它们在中学已经知道的性质，而不是要介绍给读者一些新的性质.因此，读者在这里找不到一些更新的事实(或许实数和复数的某些性质是例外的)，但是，他们将可能知道如何证明那些已经熟悉的东西，从“二乘二等于四”开始，直到多项式和代数分式的运算法则为止.

另一方面，读者将对代数上起着重要作用的许多基本概念具有进一步的认识.

本书是为中学高年级数学教师写的，但没有谈到教学法的问题，然而也可以把它介绍给师范学院和师范专科学校的学生，以及在中学高年级中对于数与多项式的理论有兴趣的学生.

在本书的前两章引入了理解全书所必需的一般概念. 其余各章依次论述自然数、整数、有理数、实数、复数、多项式和代数分式. 这些章次，在阅读时是可以任意变动的，因为在这里所证明的数的性质都是在中学已经熟知的.

在阐明新概念的一些例子中常常利用到某些数的性质，而这些性质要到以后才能证明，好在这些性质是读者已经知道的.

在写这本书时，我得到了 С·А·雅诺夫斯卡娅、А·Н·柯模哥洛夫、П·С·阿克山大洛夫、А·Я·欣钦以及 И·Р·沙发列维奇的许多宝贵的指示.

我对他们表示衷心的感谢.

И·勃罗斯库列亚柯夫（Проскуряков）

◎目录

第一章 集合

§1 集合的概念

数学的任何部门都不是研究在孤立状态下的各个物体，而是在它们之间的联系中去研究它们.具有某种共同性质的物体，可联合在一个集体内，一块地被研究.这样，在算术内并不研究单独的数 3 和 5，而研究所有素数的集体，即具有这样共同性质的数的集体，除了本身和单位以外，被任何别的(自然) 数都除不尽的.

所有自然数的全体，包括在更广的整数集体内.扩张已得到的数域，我们进而得到有理数，实数，最后得到复数.在代数中也讨论这样的一些集体，如多项式，代数分式.在几何中，研究三角形的性质，不管它们在平面上的位置或者甚至不管它们的大小，得到一些对于所有全等的或者相似的三角形全都正确的定理，以及讨论具有某种共同性质的点的集体(轨迹)，等等.

创造这种集体的一般理论，是康脱儿(Георг Кантор，1845—1918) 的不巧贡献，这种理论叫作集合论，现在是所有数学的基础.

这里，我们仅限于介绍集合论的初步知识，如果希望更详细地知道它，读者可参看黑斯道夫的“集合论”，俄译本的译者为维金尼索夫，1937 年国家科学技术出版局出版.

集合，这是被看作一个整体的物体的集体. 这句话不应该当作是集合这个概念的定义来理解，因为“集体”这个字，不见得比“集合”这个字更好理解. 集合这个概念，被采取作为基本概念，即不再用另外的概念来说明它. 组成一已知集合的物体，称之为集合的元素. 元素 a 和包含它的集合 A 之间的基本关系表为：$a \in A$（用话来表示：a 是集合 A 的元素，a 属于 A，A 含有 a）. 如果 a 不是集合 A 的元素，那么就写成 $a \overline{\in} A$（用话来表示：a 不属于 A，A 不含有 a）. 集合可以用指出它的所有元素的办法来给出，而且应用花括号来表示. 例如，$\{a,b,c\}$ 表示含有三个元素的集合. 类似的写法也可以用来表示无穷集合，这时，未被写出的元素用一些点来代替. 当然，点的意义应该补充说明. 例如，自然数的集合表成$\{1,2,3\cdots\}$；偶数的集合表成$\{2,4,6,\cdots\}$，这里的点所表示的与上面点所表示的已不是同一意义.

两个集合 A 和 B 叫作相等的，如果它们由同样的元素所组成，亦即，如果集合 A 的每一个元素都属于 B，而且，反过来，集合 B 的每一个元素也属于 A. 这时写为 $A=B$. 因此，集合是由它的元素所唯一确定的，而与其元素的顺序无关. 例如，三个元素 a,b,c 所成的集合可以写成 6 种形式

$$\{a,b,c\}=\{a,c,b\}=\{b,a,c\}=\{b,c,a\}=\{c,a,b\}=\{c,b,a\}$$

为了形式上方便起见，把不含任何元素的唯一的集合，也归于集合之列. 这个集合称为空集，以符号 $\varnothing$ 来表示它（不会与数 0 的符号相混淆，因为每一次符号的意义都是很明显的）.

如果集合 A 的每一个元素都属于集合 B，则称 A 为 B 的子集；这时，称 B 为 A 的扩集. 写成 $A \subseteq B$，$B \supseteq A$（用话来表示：A 被包含在 B 内，或者说 B 包含着 A）. 显然，如果 $A \subseteq B$，且 $B \subseteq A$，则 $A=B$. 按照定义，空集是任何集合的子集.

如果集合 A 的每一个元素均属于集合 B，但集合 B 中至少有一个元素不属于 A，即是：如果 $A \subseteq B$，且 $A \neq B$，则称 A 为 B 的真子集，B 为 A 的真扩集，这时写成 $A \subsetneqq B$，$B \supsetneqq A$. 例如，记号 $A \neq \varnothing$ 和 $A \supsetneqq \varnothing$ 表示同样的意义，即集合 A 非空集.

让我们再指出，应该区分开元素 a 和含有唯一元素 a 的集合$\{a\}$之间的差别. 除此以外，元素与集合的基本关系的意义也说明了这样的差别，在这里，元素和集合是起着不同作用的（关系 $a \in A$ 非对称的，即如果 $a \in A$，则写出 $A \in a$ 是没有意义的），混淆它们，足以导致矛盾. 例如，设有一含有两个元素的集合 $A=\{a,b\}$. 让我们考虑含有集合 A 作为其唯一的一个元素的集合$\{A\}$. 这时 A 含有两个元素，而$\{A\}$仅含有一个元素，因此，这两个集合不可能相等. 故以后

我们将不写 $a \subsetneqq A$，而保持记号 $a \in A$.

集合的例子 很明显的，集合的例子，要多少可以有多少. 例如，可以谈到关于这本书的所有字的集合，这时在不同页上或者在同一页的不同行上的两个同一字算作集合的两个不同元素；关于地球上所有人的集合，这时应该假定在所讨论的一瞬间没有出生的人也没有死去的人；关于某一个杯子内水的分子的集合，等等. 所有这些都是有穷集合的例子. 前面已经提到的自然数集，偶自然数集，有理数集，实数集等都是无穷集合的例子，除此以外，让我们再引进几个无穷集合的例子.

设 a,b 是两个实数，而且 $a < b$. 所有合乎条件 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数 x 的集合称之为以 a,b 为端点的闭区间，以符号$[a,b]$ 表示. 所有合乎条件 $a < x < b$ 的实数 x 的集合称之为以 a,b 为端点的开区间，以符号(a,b) 表示. 其次称这样的 x 的集合$[a,b)$ 和$(a,b]$ 为半开区间，对于前者，$a \leqslant x < b$，对于后者，$a < x \leqslant b$.

我们还引进两个符号 $+\infty$(正无穷大) 和 $-\infty$(负无穷大). 不能把它们认为是数，引进它们仅是为了写法的方便. 虽然如此，为了更容易处理它们，可以认为$+\infty$ 大于任何实数，$-\infty$ 小于任何实数. 这样一来，就可以与上面相类似，引进无穷半开区间和无穷开区间的符号表示法. 即：$[a,+\infty)$ 是 $a \leqslant x$ 的所有元素 x 的集合，$(-\infty,b]$ 是 $x \leqslant b$ 的所有元素 x 的集合，$(a,+\infty)$ 是 $a < x$ 的所有元素 x 的集合，$(-\infty,b)$ 是 $x < b$ 的所有元素 x 的集合，$(-\infty,+\infty)$ 是所有实数的集合.

§2 集合的运算

设给出两集合 A,B，由至少属于 A,B 之一的(即或者属于 A，或者属于 B，或者同时属于 A 及 B) 所有元素所组成的集合叫作 A 及 B 两集合的并，以符号 $A \cup B$ 表示，读作 A 并 B.

由既属于A 又属于B 的所有元素所组成的集合叫作A 及B 两集合的交，以符号 $A \cap B$ 表示，读作 A 交 B.

由属于A 而不属于B 的所有元素所组成的集合叫作A 及B 两集合的差，以符号 $A \backslash B$ 表示，读作 A 减 B[①].

例 1 设A 为闭区间$[1,3]$，B 为闭区间$[2,4]$. 这时$A \cup B$ 为闭区间$[1,4]$，$A \cap B$ 为闭区间$[2,3]$，$A \backslash B$ 为半开区间$[1,2)$，$B \backslash A$ 为半开区间$(3,4]$.

---

① 某些作者采用 $A+B$，AB，$A-B$ 的符号，但是在代数学中由于易与代数运算相混，觉得不便.

例 2 设 A 是所有矩形的集合，B 是所有菱形的集合. 这时，$A \cap B$ 是所有正方形的集合，$A \backslash B$ 是不等边矩形的集合，$B \backslash A$ 是不等角菱形的集合.

例 3 设给出集合 A,B，并已知 $A \subseteq B$. 则

$$A \cup B = B \quad A \cap B = A$$

例 4 设 A 是所有被 k 除得尽的整数的集合，B 是所有被 l 除得尽的整数的集合. 则 $A \cap B$ 是被 k 与 l 的最小公倍数除得尽的整数的集合.

显然，当且仅当 A 与 B 无共同元素时，$A \cap B = \varnothing$；当且仅当 $A \subseteq B$ 时，$A \backslash B = \varnothing$.

集合的并与交的运算具有数的加法和乘法的许多性质，即：

Ⅰ. 并的交换性（交换律）

$$A \cup B = B \cup A$$

Ⅱ. 并的结合性（结合律）

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

Ⅲ. 交的交换性

$$A \cap B = B \cap A$$

Ⅳ. 交的结合性

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Ⅴ. 交关于并的分配性

$$A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$$

在利用括号时，我们采取与数的情形同样的规则，即，在没有括号时，认为交的运算在并的运算之先施行，有括号，则它指示出这种顺序的改变，例如在性质 Ⅴ 中就是这样，或者括号指示出不是按照写出的顺序运算，例如在性质 Ⅱ 和 Ⅳ 中.

除此以外，集合的运算还具有数的运算所没有的另一性质，即：

Ⅵ. 并对于交的分配律

$$A \cup B \cap C = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

因此，集合的并与交是对称的，亦即在性质 Ⅰ ～ Ⅵ 中扮演着同样角色. 换言之，在性质 Ⅰ ～ Ⅵ 中，交换并和交的运算的位置，我们仍然得到一组这样的性质，仅是顺序改变了.

我们仅证明性质 Ⅵ 作为这一类议论的例子，其余的证明，当作练习留给读者. 按照集合相等的定义，应该证明，属于等式左端的任意元素 x 都属于右端. 反之，属于右端的任何元素 x 也都属于左端.

a) 设 $x \in A \cup B \cap C$. 按照并的定义，或者 $x \in A$，或者 $x \in B \cap C$. 如果 $x \in A$，那么由于 $A \subseteq A \cup B$，$A \subseteq A \cup C$，故 $x \in A \cup B$，且 $x \in A \cup C$. 由此得 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. 如果 $x \in B \cap C$，那么按照交的定义 $x \in B \subseteq$

$A \cup B$,且 $x \in C \subseteq A \cup C$,亦即,又有 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

b) 反过来,设 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. 于是,$x \in A \cup B$,且 $x \in A \cup C$. 因此,或者 $x \in A \subseteq A \cup B \cap C$,或者 $x \overline{\in} A$;但由于 $x \in A \cup B$ 且 $x \in A \cup C$,故应有 $x \in B$ 和 $x \in C$,因之,$x \in B \cap C \subseteq A \cup B \cap C$.

集合的并和交的概念,都可以应用到多于两个的甚至是任意个(有穷的或者无穷的)集合的集合上.

为了说话方便起见,我们以后将把元素是其他集合的集合叫作组. 于是,所谓某个组内集合的并,我们指这样的集合,其元素至少属于这个组内的一个集合. 某个组内集合的交,我们指元素属于组内每一个集合的集合.

对于有穷个集合所成的组,其内集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并 S 和交 D,采取下面的符号来表示

$$S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$D = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

对于集合的无穷序列 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$,的情形,写成

$$S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$D = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

最后,对于任意组 $\{A_m\}$ 的情形,其中集合 A_m 的下标组成某个集合 M,写成

$$S = \bigcup_{m \in M} A_m, D = \bigcap_{m \in M} A_m$$

在另外的情形,采取类似于上面所指出的符号(例如,参考习题 1).

习题 1　设 A_n 是在一平面上位于以原点 O 为圆心,2^n 为半径的圆内的点的集合,而且 n 取从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的所有整数值. 求并 $\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} A_n$ 和交 $\bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} A_n$.

习题 2　设 A, B 是任意集合,$S = A \cup B$,$D = A \cap B$. 证明等式 $S \backslash A = B \backslash D$,$S \backslash B = A \backslash D$.

习题 3　设 $\{A_m\}$ 是集合 R 的一些子集所成的组,M 是下标 m 的集合. 证明等式

$$R \backslash \bigcup_{m \in M} A_m = \bigcap_{m \in M} (R \backslash A_m), R \backslash \bigcap_{m \in M} A_m = \bigcup_{m \in M} (R \backslash A_m)$$

§ 3　函数,映射,浓度

在数学中,函数的概念和集合的概念一样,也起着非常重要的作用. 函数究竟是什么呢? 人们时常说,函数是依另一变量(自变数)而变的变量. 把它应用

到中学中所学的通常的函数，例如 $y=\sin x$，这是完全合适的，而且可以适应教学. 然而，我们的任务在于更加精确地阐明函数这个概念的本质，并且得出这个概念的近代定义. 首先，如果取函数 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$ 来看，那么它的值已经不是依 x 的值而变的了. 其次，所谓量，通常理解为这样的东西，它们之间是可以相互比较的，亦即它们之间存在着大于和小于的关系. 其实，在数学上所讨论的函数，不一定就能建立起这样的关系，例如复数；或者更一般的，某个集合的元素. 仔细地研究起来，就可发现在函数的概念里，主要的并不是它随着自变数的变化而变化，而是一个对应的规则，根据它，对于每一个自变数值，唯一地确定与之对应的函数值. 例如，函数 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$，可以简单地这样定义，对于每一个实数值 x，函数值 1 与之对应. 对应是一个规则，它可以对于某个集合 X 的每一元素 x，唯一地指出某一个物体（与这个已知元素对应的）. 这句话仅是说明对应的概念，但不应理解为是它的定义. 对应的概念和集合的概念一样，被采取作为以下定义的基本概念. 于是，最一般的函数定义，可以这样给出：

定义 1 给出在（或者定义在）某个集合 X 上的函数，是指这样的一个对应，根据它，对于集合 X 中的任一元素 x，确定某个（对应于 x 的）对象 $f(x)$. 集合 X 称之为函数的定义域，而对应于集合 X 的所有元素的对象的集合 Y，称之为函数值域.

例 1 $y=\sin x$. 可以取所有实数的集合作为函数的定义域. 于是，函数值域为闭区间 $[-1,+1]$.

例 2 $y=\tan x$. 可以取所有异于形式 $n\pi+\frac{\pi}{2}$ 的实数作为函数的定义域，此处 n 取得所有整数值（因为对于这样 x 的值，函数未被定义）. 于是函数值域为所有实数的集合.

例 3 狄利克来函数

$$f(x)=\begin{cases}0\text{，当 } x \text{ 是有理数时}\\1\text{，当 } x \text{ 是无理数时}\end{cases}$$

函数的定义域是所有实数的集合，函数值域是两个元素所组成的集合 $\{0,1\}$.

与函数的概念非常接近的是映射的概念.

定义 2 设给出两个集合 X 和 Y. 集合 X 到集合 Y 里的一个映射是指这样的对应，由于它，对于每一个元素 $x\in X$，有（唯一的）元素 $y\in Y$ 与之对应；特殊情形，如果每一个元素 $y\in Y$ 至少对应于一个元素 $x\in X$，那么这样的对应就叫作集合 X 到集合 Y 上的一个映射. 如果 y 对应于 x，则称 y 为 x 的象，x 为 y 的原象，写为 $x\rightarrow y$ 或者 $y=f(x)$. 所有有同一象 $y\in Y$ 的元素 $x\in X$ 的集合 A，叫作元素 y 的完全的原象.

例 1 设 D 是所有实数的集合. 对应 $x\rightarrow|x|$ 是集合 D 到自身里的一个映射，而且是集合 D 到所有不负的数集合上的一个映射. 0 的原象是一个 0，$y>0$

的数有两个原象 $+y$ 与 $-y$.

例 2 设使正方形的每一点与这个点在底上的正射影相对应. 于是得到正方形到线段(闭区间)上的一个映射. 底上每一点的原象是这一点在底上所作的垂线在正方形上的所有点的集合.

这两个例子指出,对于集合 X 到 Y 里的映射来说,一方面,Y 的某些元素可能完全没有原象,而另一方面,又可能有一些元素各有某些个(甚至无穷多个)原象. 如果这两种情形都不发生,那么映射就叫作一对一的. 因此,我们导出下面的定义.

定义 3 具有下面三个性质的对应(或者映射)叫作集合 X 与 Y 之间的一一对应(或者一对一的映射):

1) 对于集合 X 的每一元素,集合 Y 有一个且仅有一个元素与之对应.

2) 对于 X 的两个不同元素,Y 永远有两个不同元素与之对应.

3) 集合 Y 的每一个元素至少是 X 的一个元素的象.

让我们注意,前两个性质给出集合 X 到集合 Y 的某个子集上的一对一的映射;在这种情形,我们说关于 X 到 Y 里的一对一的映射(或者 X 到 Y 里的一一对应).

如果 $y=f(x)$ 是 X 到 Y 上的某个一对一的映射,那么,对于每一个元素 $y\in Y$,可以对应到这个唯一的元素 $x\in X$,这个 x 就是在映射 f 之下它的象是 y 的. 这个对应叫作对于映射 f 的逆映射,用符号 f^{-1} 表示. 作为一个容易的练习,留给读者证明:f^{-1} 也是 Y 到 X 上的一对一的映射,且 f^{-1} 的逆映射就是原来的映射 f.

定义 4 可以建立起一一对应的两个集合 X 和 Y,叫作等价的,用符号 $X\sim Y$ 表示. 关于等价的集合,我们也说它们有相同的浓度,或者说它们浓度相等. 空集仅仅与它自身等价.

附注 我们已经说到何时两个集合有相同的浓度,亦即给出了浓度相等这个概念的定义,但并没有给出浓度概念的定义. 我们可以说浓度是所有互相等价的集合共有的一般性质,然而这太不确定了. 把浓度相等的集合的类的本身叫作浓度以后,就可避免这种不确定性(虽然,这好像是将不确定性归诸于非常不自然的抽象化).

等价的关系,具有下面三个基本性质:

1) 反射性:$X\sim X$;

2) 对称性:如果 $X\sim Y$,那么 $Y\sim X$;

3) 推移性:如果 $X\sim Y$,并且 $Y\sim Z$,那么 $X\sim Z$.

对于第一个性质的证明,只要命每一个 $x\in X$ 对应到它自身(恒等映射)就

得出集合 X 到它自身上的一对一的映射. 其余性质的证明,留给读者[①].

集合的浓度描述出它的元素的所谓"数量". 然而,在这里可以看到部分等于全体,亦即,一个集合可以与它的真子集有相同的浓度.

例 1 函数 $y=10x$(此处 x 是实数) 给出闭区间 $[0,1]$ 和比它长 10 倍的闭区间 $[0,10]$ 的等价性. 因此,就浓度来说,两个闭区间的点的数量是相同的.

例 2 其次,任意两个闭区间 $[a,b]$ 和 $[c,d]$,以及任意两个开区间 (a,b) 和 (c,d) 都是等价的. 只要考虑函数 $y=c+\dfrac{d-c}{b-a}(x-a)$ 就足够了. 第一,对于每一实数 x,有唯一的 y 与之对应,而且,很容易看出,$a\to c$,$b\to d$. 其次,设 $x_1\to y_1$,$x_2\to y_2$ 且 $x_1<x_2$. 按照闭区间和开区间的定义(§1 末),$a<b$ 且 $c<d$. 因之,$\dfrac{d-c}{b-a}>0$. 故 $y_1<y_2$. 故如果 $a\leqslant x\leqslant b$(或者 $a<x<b$),则有 $c\leqslant y\leqslant d$(或者,$c<y<d$). 亦即闭区间 $[c,d]$ 的点对应于 $[a,b]$ 的点,而且不同的点对应于不同的点(对于开区间的情形也同样正确). 最后,逆映射 $x=a+\dfrac{b-a}{d-c}(y-c)$ 也具有相同的性质,由此得到,对于 $[c,d]$ 中的每一 y,求出 $[a,b]$ 中的一个(且仅有一个) 原象 x(对于开区间的情形也如此). 由这些,证明了 $[a,b]\sim[c,d]$(相应的 $(a,b)\sim(c,d)$).

例 3 函数 $y=\tan x$ 给出所有实数的集合与开区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 间的等价性.

例 4 考虑下面在同一行里互相对应的数

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\
2 & 4 & 6 & \cdots & 2n & \cdots \\
1 & 3 & 5 & \cdots & 2n-1 & \cdots \\
10 & 100 & 1\,000 & \cdots & 10^n & \cdots \\
2 & 3 & 5 & \cdots & p_n & \cdots
\end{array}$$

(p_n 是第 n 个素数),我们得出结论,所有自然数的集合,偶数的集合,奇数的集合,10 的方幂的集合,素数的集合都有着同一的浓度,虽然后者都是第一个集合的真子集.

例 5 自然数的集合是与有理数的集合等价的. 事实上,任何异于零的有理数都可以唯一地表成既约分数 $\dfrac{p}{q}$ 的形式,此处 $q>0$(亦即正负号是算作在分子上的).

---

① 关于这些性质的意义,详见第四章 §20.

由于零可以写成:$0=\frac{0}{1}=\frac{0}{2}=\cdots$,我们选择一个写法,例如,$\frac{0}{1}$. 于是对于所有有理数来说,$\frac{p}{q}$ 形式的写法唯一地被确定(特殊情形,当 $q=1$ 时,得到所有整数).

我们称自然数 $|p|+q$ 为有理数 $\frac{p}{q}$ 的高,此处 $|p|$ 是 p 的绝对值. 于是,所有有理数可以按照其高的渐增的顺序排成一列,而相同高的数按数本身的渐增顺序排列. 这样一来得到序列

$$0,-1,+1,-2,-\frac{1}{2},+\frac{1}{2},+2,-3,-\frac{1}{3},+\frac{1}{3},+3$$

$$-4,-\frac{3}{2},-\frac{2}{3},-\frac{1}{4},+\frac{1}{4},+\frac{2}{3},+\frac{3}{2},+4,\cdots$$

因为对于一定高 n,仅有有限多个数(即不多于 $2(n-1)$,因为分子从 $-(n-1)$ 变到 $+(n-1)$,其中不包括 0),故在任一已知数前面,仅有有限多个数. 因此按照自然数的顺序标出序列的数的番号,我们实际上就标出所有有理数的番号,这就是要证的等价性.

§4 有穷集和无穷集

在前节我们指出了的所有与其真子集等价的集合,都是无穷集合. 现在我们将看到,这不是偶然的现象(参考下面定理 1). 然而,开始必须给出有穷集和无穷集的严密的定义. 这里我们主要地利用自然数的性质,而关于自然数的严密基础仅在第三章才给出. 读者应该确信,在我们的议论里没有犯循环论证的毛病. 为此,只要检查一下在第三章论述归纳证明,归纳定义和自然数顺序(这些我们在前两章利用过)时,我们从未利用第一章和第二章的定理,就已足够了. 这些问题的基础在第三章 §11 ~ §15 中给出. 在那里将指出(参考 §15 的附注)在前两章应用自然数的理论是合理的,亦即不致发生循环论证的毛病.

定义 1 小于和等于某个自然数 n 的自然数的集合,叫作自然数列的一个断片,并且用符号 $|1,n|$ 表示.

定义 2 与自然数列的一个断片等价的集合,叫作有穷集. 非有穷集,叫作无穷集. 空集也叫作有穷集.

换言之,有穷集(如果它不是空集)是这样的集合,它的元素可以"列举",亦即可以这样排出

$$a_1,a_2,\cdots,a_n$$

而且所有元素都被标出番号. 无穷集是这样的集合,它的元素是不能“列举”的.

由前节所谈到的等价的性质2)和3),显然应该有:与有穷(或者无穷)集等价的集合,仍为有穷(无穷)集.

定理 1(关于有穷集的基本定理) 有穷集不能与其任一真子集和真扩集等价.

证明 定理的两个论断(关于子集的和关于扩集的)的任一个很容易由另一个推出,因为,如果 $A \sim B$,那么 A 和 B 中的任一个是有穷的,由上面所指出的,就应得到另一个也是有穷的. 现在,让我们来证明,例如,有穷集 A 不能与其真子集等价. 对于空集 $A=\varnothing$ 的情形,定理是正确的,因为空集完全没有真子集. 设 $A \neq \varnothing$. 于是,按照有穷集的定义,A(至少)与自然数列的一个断片 $|1,n|$ 等价. 我们对于自然数 n①,用归纳法证明 A 不能一对一地映射于其真子集 B 上. 对于 $n=1$ 的情形,这是很显然的,因为此时 $A \sim |1,1|$,仅包含有一个元素. 它的唯一的真子集是 $B=\varnothing$,此时 A 不能与 B 等价.

假设定理对于自然数 n 的情形被证明. 让我们来证明定理对于 $n+1$ 的情形. 设 $A \sim |1,n+1|$,并设 f 是 A 到 B 上的一对一的映射. 标出 A 的元素,得: $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}\}$. 对于 $B=\varnothing$ 的情形,论断是正确的. 如果 $B \neq \varnothing$,那么,不失其普遍性,可以假定元素 $a_{n+1} \in B$. 否则,取元素 $b \in B$,作一新集 B_1,由 B 中以 a_{n+1} 代替 b 而得出,并作一新的映射 f_1,它与 A 到 B 上的映射完全一致,除了对于具有性质 $f(a)=b$ 的元素 a 的象不同,而是代以 $f_1(a)=a_{n+1}$. 于是 f_1 是集合 A 到其真子集 B_1 上的一对一的映射,而且 B_1 是含有 a_{n+1} 的. 其次,不失其普遍性,可以认为 $f(a_{n+1})=a_{n+1}$. 否则,设 $f(a_i)=a_{n+1}$ 和 $f(a_{n+1})=a_i$. 于是,作一新的映射 f_1,它与 A 到 B 上的映射 f 完全一致,除了对于 a_i 和 a_{n+1} 的象不同,而是代以 $f_1(a_i)=a_j$, $f_1(a_{n+1})=a_{n+1}$.

因此,设 $a_{n+1} \in B$ 且 $f(a_{n+1})=a_{n+1}$. 让我们考虑集合 $A'=A\backslash\{a_{n+1}\}$,和 $B'=B\backslash\{a_{n+1}\}$. 显然,映射 f 在集合 A' 和 B' 之间建立起等价关系. 因为 B 是 A 的真子集,故存在一元素 $a' \in A\backslash B$,而且因为 $a_{n+1} \in B$,故 $a' \neq a_{n+1}$. 因此,$a' \in A'\backslash B'$. 即 B' 是 A' 的真子集. 但

$$A'=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\} \sim |1,n|$$

我们得到与归纳假定矛盾的论断,因而定理被证明.

定理 2 任一非空有穷集与自然数列的一个且仅一个断片等价.

证明 按照定义 2,一个非空有穷集 A 至少与自然数列的一个断片等价.

---

① 让我们指出,此处不能按照集合 A 的元素个数用归纳法证明,因为,关于元素个数的概念是在下面利用定理 1 才引出的.