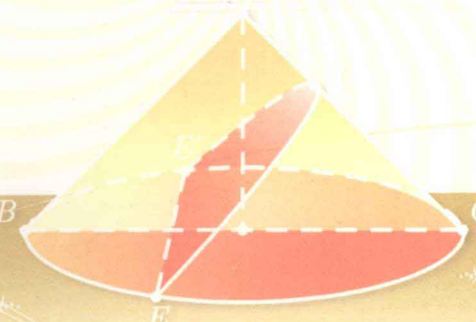
美妙数学花园

Meimiao Shuxue Huayuan



李建华 著

射影几何入门

科学出版社

美妙数学花园

Meimiao Shuxue Huayuan

射影几何入门

李建华 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书以圆锥曲线的直观认识为起点，阐释了仿射变换、射影变换等射影几何的基础理论知识，论述上尽量做到既朴实直观又系统严谨，并注意数学思想和方法的渗透，是一本射影几何学的入门读物.

本书读者对象为中学生，也可以供数学教师、师范院校数学专业的大学生和数学爱好者阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

射影几何入门/李建华著. —北京：科学出版社，2011
(美妙数学花园)

ISBN 978-7-03-031751-3

Ⅰ. ①射… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①射影几何-普及读物 Ⅳ. ①O185.1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011) 第 118875 号

责任编辑：陈玉琢 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：钱玉芬 / 封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2011 年 6 月第 一 版　开本：B5(720×1000)
2011 年 6 月第一次印刷　印张：8 1/4
印数：1—5 000　字数：146 000

定价：25.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《美妙数学花园》丛书序

今天, 人类社会已经从渔猎时代、农耕时代、工业时代, 发展到信息时代. 科学技术的巨大成就, 为人类带来了丰富的物质财富和越来越美好的生活. 而信息时代高度发达的科学技术的基础, 本质上是数学科学.

自从人类建立了现行的学校教育体制, 语文和数学就是中小学两门最主要的课程. 如果说文学因为民族的差异, 在各个国家之间有很大的不同, 那么数学在世界上所有的国家都是一致的, 仅有教学深浅、课本编排的不同.

我国在清末民初时期西学东渐, 逐步从私塾教育过渡到现代的学校教育, 一直十分重视数学. 从清朝与近代科技隔绝的情况下起步, 迅速学习了西方的民主与科学. 在 20 世纪前半叶短短的几十年间, 在我们自己的小学、中学、大学毕业, 然后留学欧美的学生当中, 不仅产生了一批社会科学方面的大师, 而且产生了数学、

物理学等自然科学领域对学科发展做出了重大贡献的享誉世界的科学家. 他们的成就表明, 有着五千年灿烂文化的中华民族是有能力在科学技术领域达到世界先进水平的.

在20世纪五六十年代, 为了选拔和培养拔尖的数学人才, 华罗庚与当时中国的许多知名数学家一道, 学习苏联的经验, 提倡和组织了数学竞赛. 数学家们为中学生举办了专题讲座, 并且在讲座的基础上出版了一套面向中学生的"数学小丛书". 当年爱好数学的中学生十分喜爱这套丛书. 在经历过那个时代的中国科学院院士和全国高等院校的数学教授当中, 几乎所有的人都读过这套丛书.

诚然, 我国目前的数学竞赛和数学教育由于体制的问题备遭诟病. 但是我们相信, 成长在信息时代的今天的中学生们, 会有更多的孩子热爱数学; 置身于社会转型时期的中学里, 会有更多的数学教师渴望培养出优秀的科技人才.

数学家能够为中学生和中学教师们做些什么呢？数学本身是美好的, 就像一个美丽的花园. 这个花园很大,

我们并不能走遍她,完全地了解她.但是我们仍然愿意将自己心目中美好的数学,将我们对数学的点滴领悟,写给喜爱数学的中学生和数学老师们.

张英伯

2011 年 5 月

前　言

射影几何学的肇始可以追溯到古希腊时代, 公元前 3 世纪, 古希腊学者阿波罗尼斯 (Apollonius) 在他的著作《圆锥曲线》(*Conics*) 中, 系统研究了圆锥曲线, 但这部著作并没有流传下来. 15~16 世纪的文艺复兴时期, 在绘画、雕塑和建筑学中, 人们开始在实际应用中遇到一些射影问题, 在这些实际需要的刺激下, 透视法原理等应用性的理论应运而生, 投影和截影问题被广泛研究. 然而, 系统的理论体系的建立却经历了 200 多年的时间, 从 17 世纪的法国数学家德萨格 (G. Desargues)、帕斯卡 (B. Pascal), 到 18 世纪的彭赛列 (J. V. Poncelet)、19 世纪的冯 · 施陶特 (von Staudt), 数学家们经过持续的探索, 建立起射影几何完美的理论体系.

射影几何一方面与欧氏几何、解析几何有着密切的联系, 其研究方法以几何变换为核心, 研究几何变换的不变性, 对近代几何学的发展起到了很重要的作用. 正是基于对射影几何的研究, 1872 年, 德国数学家克莱因

(F. Klein) 提出了著名的爱尔兰根纲领, 即将几何学定义为在某一类几何变换群下不变性质的命题系统. 他的观点在随后的半个世纪的几何学研究中影响深远.

本书的目的是希望从几何的角度, 以联系的观点, 直观地切入射影几何的核心概念: 仿射变换与射影变换. 同时, 以美妙的圆锥曲线作为线索, 按照从易到难, 从仿射变换到射影变换, 从几何方法到代数形式, 逐步展开.

假设读者已经比较好地掌握了中学解析几何的主要内容, 简单线性方程组和行列式的基本知识作为附录列在最后. 为减少读者阅读的畏惧心理, 只是在某些地方设置了 "思考" 或 "练习" 问题, 而射影几何学的主要定理几乎都涵盖在各章节的定理或例题中.

本书的写作素材主要来自于著者在北京四中开设的选修课程 "直观几何" 的讲义, 以及在北京师范大学数学科学学院课程论方向研究生选修课程 "高观点下的中学数学" 中几何部分的内容, 前后各开设过 2 次. 在写作过程中, 对一些不合理的设计顺序进行了调整. 我想特别提到参加选修课学习的北京四中的高希和董艳同学, 以及北京师范大学数学科学学院的黄雪莹同学, 她们认真而详细的笔记对著者写作很有帮助. 教学和写作过

程中主要还参考了冯克勤先生的《射影几何趣谈》(上海教育出版社, 1987) 和梅向明等先生的《高等几何 (第三版)》(高等教育出版社, 2008).

特别感谢张英伯教授的关心和鼓励, 感谢科学出版社陈玉琢老师的耐心和帮助, 也感谢家人的理解和支持.

李建华

2011 年 5 月于北京师范大学

目录

引　言

回顾在中学学习过的几何,三角形、四边形,乃至多边形、直线与圆都是我们所熟知的. 初中几何课上,老师带领同学们用综合几何的方法,证明了很多有趣的定理,比如,勾股定理,正、余弦定理,三角形重心定理,圆幂定理等. 在高中的解析几何课上,又掌握了用代数形式研究几何问题的方法——坐标法,同学们不仅学习了直线方程、圆方程,学会用方程来研究直线与圆的性质,还学习了椭圆、双曲线、抛物线等非常优美的圆锥曲线. 这些圆锥曲线有很迷人的性质,但同学们被这些性质所吸引的同时,也一定会有很多困惑,比如,为什么椭圆和双曲线可以有2个定义,而抛物线只有1个定义?为什么经常会发现三类圆锥曲线具有共同的性质,比如,它们的极坐标方程就具有统

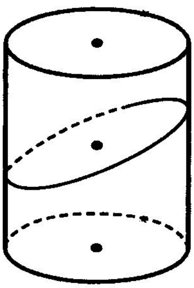


图 0.1

一的形式等等. 要弄清楚这些问题, 需要从熟悉的几何对象开始, 找到其中的**联系**, 从而一步步揭开它们的神秘面纱. 为此, 让我们从下面熟悉的图形 (图 0.1) 起步, 开始我们的探索之旅.

第1章

仿射变换

1.1 透视仿射对应与仿射变换

设图 0.1 所示的几何体是一个底面半径为 r 的圆柱, 与圆柱底面成 30° 二面角的平面与该圆柱相交, 截口曲线是一个什么图形? 同学们一定很快就会回答: "椭圆!" 且慢, 我们知道, 按照中学数学教科书当中椭圆的定义, 椭圆是同一平面内到两定点 (焦点) 距离之和等于一个定值的所有点的集合 (当然, 通常要求这个定值大于两定点的距离), 那你能证明, 这个截口曲线恰是符合教科书定义的椭圆吗? 如果是, 两个焦点在哪里?

现在借助直观做以下事情 (图 1.1):

想象在圆柱的两侧放入两个半径为 r 的球, 称为丹德林球 (Dandelin spheres), 使这两个球尽可能向截面靠近, 不难理解, 这两个球将分别与截面相切于一点, 不妨设为 F_1, F_2, 这两个球也分别与圆柱侧面相切, 切点恰好

形成两个圆,这两个圆所在平面与圆柱底面平行,如图 1.1 所示,不妨设为圆柱的两个底面上的 $\odot Q$, $\odot O$.

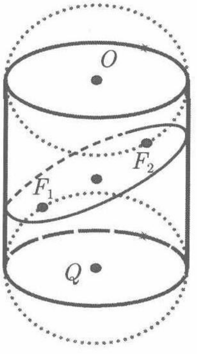


图 1.1

下面证明:F_1, F_2 正是我们要寻找的两个焦点,从而证得截口曲线为椭圆.

设点 M 是截口曲线上任意一点,过点 M 的母线 AB 交 $\odot Q$, $\odot O$ 于 A, B(图 1.2).

由于点 A 和点 F_1 是以 Q 为球心的丹德林球的切点,从而,$MA = MF_1$.

同理,点 B 和点 F_2 是以 O 为球心的丹德林球的切点,$MB = MF_2$.

于是,$MF_1 + MF_2 = MA + MB = AB$.

但线段 AB 的长恰为 $\odot Q$, $\odot O$ 所在两个平行平面的距离 (定值),这就证明了截口曲线上任意一点到 F_1, F_2

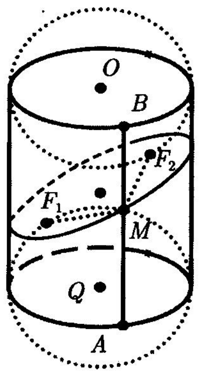


图 1.2

的距离之和为定值. 而又不难利用截口曲线是一个闭合曲线 (直观) 的性质, 证明截口曲线所在平面上满足到 F_1, F_2 的距离之和为定值的点均在截线上, 故截口曲线为椭圆.

思考 通过以上讨论, 我们证明了截口曲线是椭圆, 焦点恰是两个丹德林球与截面的切点, 而截口曲线上任意一点到这两个焦点的距离之和 (定值), 等于两个丹德林球与圆柱面相切所形成的两个圆所在平行平面的距离. 进一步, 可以思考这个椭圆的准线在哪里? 如何确定离心率?

好了, 稍事休整, 回到本章开始提出的问题: 以上结果对于研究椭圆有帮助吗?

实际上，我们找到了联系圆与椭圆的一个方法 (图 1.3)：

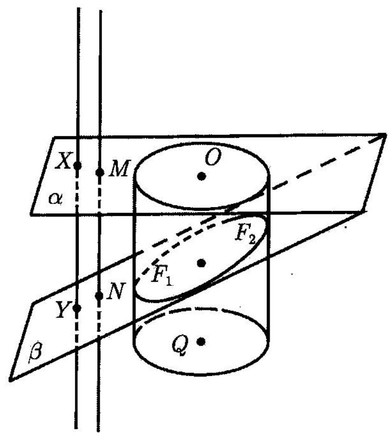


图 1.3

设 $\odot O$ 所在平面为 α，截线所在平面为 β. 令点 M 是平面 α 上的任意一点，过 M 作圆柱母线的平行线 MN，可设直线 MN 与平面 β 相交于点 N，这样，我们建立了平面 α 到平面 β 的一个 1-1 映射，这个映射把平面 α 上的 $\odot O$ 映射为平面 β 上的椭圆 (即截线)，反之也对！

不难理解，任何一个椭圆都可以用这种方式映射为一个圆. 圆的性质是熟知的，是否可以通过对这样的 1-1 映射的研究，将椭圆和圆联系起来，进而，将椭圆的问题转化为圆的问题来研究呢？