

阶梯奥数

主编 / 陈国强

本书适用于八、九年级

脑筋急转弯

无论什么时候，
所有人都要做的同一
件事是什么？



答案：

呼吸。

上海科学普及出版社

阶 梯 奥 数

3

(本书适用于八、九年级)

陈国强 主编

上海科学普及出版社

图书在版编目(CIP)数据

阶梯奥数. 3/陈国强主编. —上海:上海科学普及出版社, 2003. 7

ISBN 7-5427-2459-2

I. 阶… II. 陈… III. 数学课—初中—教学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 051202 号

责任编辑 郭子安

特约编辑 赵 毅

阶梯奥数 3

陈国强 主编

上海科学普及出版社出版发行

(上海中山北路 832 号 邮政编码 200070)

各地新华书店经销 上海华成印刷装帧有限公司印刷

开本 640×935 1/16 印张 20 字数 400000

2003 年 7 月第 1 版 2003 年 7 月第 1 次印刷

印数 1-8100

ISBN 7-5427-2459-2/O · 85 定价: 22.00 元

本书如有缺页、错装或损坏等严重质量问题
请向出版社联系调换

内 容 提 要

本书是为小学高年级和初中阶段在数学学习上学有余力的优秀学生提供的竞赛培训教材或数学较好者自学的课外读物。

该书是一些长期在第一线从事数学竞赛数学的教师多年实践的知识积累和总结。按照学生所学基础知识的程度,由浅入深、从易到难、分门别类地把内容归纳成许多专题,在每个专题中力求简炼地介绍知识的由来、要点和重要定理及公式,再通过典型的例题和练习来展开知识的探究,并进行归纳和总结。从而使学生一级一级地沿着知识的阶梯循序渐进,这种做法将有利于培养学生学习数学和兴趣和自信心。

主 编：陈国强

副主编：夏钟英

编 委：夏钟英 唐清成 朱 瑞 李岚雄
郑曾波 张 达 朱文革 陈慧珍
魏新魁 刘淑珍 常文武 郭震渔
施 斌 田廷彦 魏 磊 王之任

序

现在我们常说的一个名词是“素质教育”。到底素质教育指的是什么？是不是简单地指那些课外的活动？学生除了正常的文化课学习以外，再搞一些舞蹈、书法班的训练，就算是得到素质教育了？不可否认，艺术教育也提高学生的素质。但是素质教育的内容也许应该更加广一些，我们学生现在所需要的素质也应该包括文化课的素质。

我对中学的教育也很感兴趣。曾经认识了几位中学的校长，我们对学校素质教育的看法在很大程度上有相同之处，大家认为素质教育也应该体现在文化课的教育中，特别是数学教育中。在进华中学陈国强校长的倡导下，几十位多年从事中学数学提高教育的大学教授、数学博士、奥数教练员、中学资深数学教师聚集一起，开始了在数学课程教育中的实验。我们的主要想法是通过数学课程的教育让学生认识数学、理解数学、掌握数学，这就是学生所需要的素质。这个实验已经进行了六年多了，收到了不错的效果，培养出一大批有扎实数学基础的初中毕业生。

现在的这套书，是实验的一部分，希望暨此能够提高学生学习数学的兴趣。很小的时候我也读过一些有趣的数学小册子，但现在这些小册子很难找了，不敢说现在的这套书十全十美了，但是对于希望理解数学、学习奥数的小学高年级和初中学生，应该是有帮助的。我

SiWeiXunLian

很希望这套书能够受到学生们的喜欢,也希望看到有更多的这类书能够出版。

上海交通大学数学系教授 周 青

2003. 3. 25

目 录

第一讲	二次函数(一)	1
第二讲	二次函数(二)	7
第三讲	函数的最值	19
第四讲	二次不等式	26
第五讲	一元二次方程根的分布(一)	32
第六讲	一元二次方程根的分布(二)	39
第七讲	锐角三角函数	49
第八讲	解直角三角形	55
第九讲	正弦定理及其应用	61
第十讲	余弦定理及其应用	66
第十一讲	三角函数的几何应用	71
第十二讲	圆的有关性质	78
第十三讲	直线与圆的位置关系	87
第十四讲	两圆的位置关系	99
第十五讲	圆中的比例线段	112
第十六讲	面积问题及面积方法	122
第十七讲	四点共圆(一)	130
第十八讲	四点共圆(二)	139
第十九讲	托勒密定理	147
第二十讲	三角形的“四心”	154
第二十一讲	几何计算与几何定值问题	163
第二十二讲	几何不等式与几何极值问题	173
第二十三讲	几何中的著名定理	184
第二十四讲	抽屉原理(三)	192
第二十五讲	反证法	202

 脑筋急转弯

一家商店里老板和客人正在讲价,老板拼命杀价,客人却拼命长价,这是怎么回事?

 答案:

因为这是一家回收旧汽车的商店。

第二十六讲	极端原理	209
第二十七讲	不定方程的常用解法	215
第二十八讲	数的进位制	222
第二十九讲	综合练习(一)	229
第三十讲	综合练习(二)	232
附	参考答案及提示	235

 智力魔方

联合国儿童基金会“儿童健康大使”是由哪位香港女演员担任的?

 答案:

梁咏琪。

第一讲 二次函数(一)

二次函数是初中代数中的重要内容,它是几个“二次”知识点(二次函数、二次方程、二次不等式以及二次多项式)的核心内容.

一般定义 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 为二次函数.

二次函数的解析式有不同的表述形式,主要有以下三种形式:

(1) 一般式: $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$;

(2) 顶点式: $f(x)=a(x-n)^2+m(a\neq 0)$ 其中 (n, m) 为二次函数的顶点坐标;

(3) 交点式: $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$ x_1, x_2 为 $f(x)=0$ 的解.

如果我们选取恰当的解析式,可以简化运算.

在这一讲和下一讲,我们将研究两方面的问题:A. 已知函数的解析式,求其的性质;B. 知道函数的性质,求其解析式.

【例1】 已知函数 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 $(1,1)$, $(2,3)$, $(-1,9)$, 求其解析式.

解:将之代入一般式,可得到一个三元一次方程组:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+2b+c=3, \\ a-b+c=9 \end{cases}$$

解这个三元一次方程组,得到 $\begin{cases} a=2 \\ b=-4, \\ c=3 \end{cases}$

即原二次函数是 $y=2x^2-4x+3$.



脑筋急转弯

睡美人最怕什
么?



答案:

失眠。

智力魔方

2002 年是中
韩两国建交几周
年?

答案:

10 周年。

【例 2】已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 图象的顶点是 $(2, -10)$, 它还经过 $(5, 17)$, 求其解析式.

分析: 已知顶点, 若用顶点式应该可以简化运算.

解: 将 $(5, 17)$ 代入顶点式 $y=a(x-2)^2-10$, 得到方程 $17=a(5-2)^2-10$,

解这个方程, 得到 $a=3$,

即原二次函数为 $y=3(x-2)^2-10=3x^2-12x+2$.

【例 3】已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过点 $(-6, 0)$, $(5, 0)$, $(6, 24)$, 求其解析式.

分析: 已知二次函数与 x 轴的两个交点, 因此想到可以使用交点式.

解: 将 $(6, 24)$ 代入交点式 $y=a(x+6)(x-5)$, 得到方程 $24=a(6+6)(6-5)$,

解这个方程, 得到 $a=2$,

即原二次函数为 $y=2(x+6)(x-5)=2x^2+2x-60$.

√【例 4】已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过点 $(18, 2)$, $(10, 2)$, $(13, 32)$, 求其解析式.

分析: 由于 x 的值都较大, 如用一般式进行求解将涉及系数很大的多元一次方程组, 求解过程将较为繁琐. 由于注意到其中有两个点的连线平行于 x 轴, 因此可以使用变形后的交点式.

解: 将 $(13, 32)$ 代入交点式 $y-2=a(x-18)(x-10)$, 得到方程 $32-2=a(13-18)(13-10)$,

解这个方程, 得到 $a=-2$,

即原二次函数为 $y=-2(x-18)(x-10)+2=-2x^2+56x-358$.

【例 5】设二次函数 $y=ax^2+bx+c$, 当 $x=4$ 时取得最大值 16, 且它的图象在 x 轴上截得的线段长 4, 求其解析式.

分析: 这道题有很多解法, 如何发现其隐含的条件

将成为快捷解题的关键.

解:由于抛物线的对称轴是 $x=4$, 它的两个根的差是 4, 所以它的两个根是 2 和 6. 将 $(4, 16)$ 代入交点式 $y=a(x-2)(x-6)$, 得到方程 $16=a(4-2)(4-6)$,

解这个方程, 得到 $a=-4$,

即原二次函数为 $y=-4(x-2)(x-6)=-4x^2+32x-48$.

【例 6】 对于二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$, 若 $f(x_1)=f(x_2)$, $(x_1 \neq x_2)$, 试证明: $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ 是这个二次函数的对称轴.

证明: $\because f(x_1)=f(x_2)$,

$$\therefore ax_1^2+bx_1+c=ax_2^2+bx_2+c,$$

$$\therefore (x_1-x_2)(ax_1+ax_2+b)=0,$$

$$\therefore (x_1-x_2) \neq 0,$$

$$\therefore x_1+x_2=-\frac{b}{a}.$$

即 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ 是这个二次函数的对称轴.

【例 7】 求抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 关于直线 $x=m$ 对称的曲线与 x 轴的交点坐标. *不求出方程的根*

解: $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的交点坐标是

$$\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0\right),$$

若抛物线 y' 与 y 关于 $x=m$ 对称, 则 y' 与 x 轴的交点和 y 与 x 轴的交点也关于 $x=m$ 对称, 根据对称的有关性质, 易知 y' 与 x 轴的交点坐标是

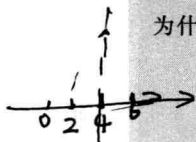
$$\left(2m + \frac{b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0\right).$$

【例 8】 已知关于 x 的方程 $\sqrt{x-p}=x$ 有两个不相等的实根, 求实数 p 的取值范围.

解: 原方程等价于方程 $x^2-x+p=0 (x \geq 0, x-p)$

脑筋急转弯

匹诺曹有一天说了一句大谎话, 鼻子却没有变长, 为什么?



$-\frac{b}{2a}$ 对称轴

答案:

因为他说: “如果我没有说谎话, 鼻子就会变长。”

≥ 0) 有两个不同的解.

将原方程改写为由顶点式表示的二次函数 $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(p - \frac{1}{4}\right)$, 显然此二次函数与 x 轴有两个在 x 轴正方向上不同的交点要求满足: $f(0) \geq 0$; $f(0.5) < 0$.

由于 $p = f(0) \geq 0$, $p - 0.25 = f(0.5) < 0$, 所以 $0.25 > p \geq 0$.

说明: 细心的同学会发现, 当解题结束以后, 我们没有对 $(x - p \geq 0)$ 这个条件进行分析, 请思考为什么.

【例 9】 设 p 是实数, 二次函数 $y = x^2 - 2px - p$ 的图象与 x 轴有两个不同的交点 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$. (1) 求证: $2px_1 + x_2^2 + 3p > 0$; (2) 若 A, B 两点之间的距离不超过 $|2p - 3|$, 求 p 的最大值.

解: (1) $2px_1 + x_2^2 + 3p = 2px_1 + 2px_2 + p + 3p = 2p(x_1 + x_2) + 4p = 4p^2 + 4p$.

而 $\Delta = (-2p)^2 - 4(-p) = 4p^2 + 4p > 0$.

(2) $|AB| = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right| = \sqrt{4p^2 + 4p} \leq |2p - 3|$.

解以上不等式得 $p \leq -1$ 或 $0 \leq p \leq \frac{9}{16}$, 经验证 $p =$

$\frac{9}{16}$ 时满足题意, 所以就是 p 的最大值.

说明: 在解题过程中, 我们使用了公式 $|AB| =$

$\left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right|$, 请同学们自行推导上述公式.

【例 10】 已知二次函数的图象的对称轴平行于 y 轴, 顶点为 $(2, 3)$, 且与直线 $y = 2x + k$ 相交于 $(3, 0)$, 求: (1) 二次函数的解析式; (2) k 的值; (3) 该二次函数的图象与直线 $y = 2x + k$ 的另一个交点的坐标.

解: (1) 此二次函数顶点为 $(2, 3)$, 并且过 $(3, 0)$, 将

智力魔方

干细胞的神奇
主要在于它能够做
什么?

答案:

分化。

点(3,0)代入顶点式: $0 = a(3-2)^2 + 3$, 解得 $a = -3$, 所以二次函数的解析式为 $y = -3(x-2)^2 + 3$.

(2) $y = 2x + k$ 过点(3,0), 将点(3,0)代入 $y = 2x + k$: $0 = 2 \times 3 + k$, 解得 $k = -6$.

(3) 将 $y = 2x - 6$ 代入 $y = -3(x-2)^2 + 3$, 得到 $2(x-2) - 2 = -3(x-2)^2 + 3$, 解得 $x = \frac{1}{3}$, 3(舍去), 所以另外一个交点是 $(\frac{1}{3}, -5\frac{1}{3})$.

练习題

1. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点横坐标是 1, 且经过点 $A(1, 5)$, $B(3, 1)$, 求此抛物线的解析式.

2. 若干函数 $y = ax^2 + bx + c$ 中 $a : b : c = 2 : 3 : 4$, 且函数 y 有最小值 $\frac{23}{4}$, 试求其解析式.

3. 已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 的对称轴在 y 轴右侧, 且抛物线与 y 轴交于 $Q(0, -3)$, 与 x 轴交于 A, B , 顶点为 P , 三角形 PAB 的面积为 8. 求函数 y 的解析式.

4. 已知 $f(x) = ax^2 - \sqrt{2}$, a 为一个正常数, 如果

$f(f(\sqrt{2})) = -\sqrt{2}$, 求 a .

5. 已知抛物线 $y = (a-1)x^2 - 2(a-2)x + a$ (a 为常数), a 为何值时:

- (1) 抛物线的对称轴在 y 轴的右侧;
- (2) 抛物线的顶点在第三象限内;
- (3) 抛物线在 x 轴上截得的线段长为 3.

6. 函数 $f(x) = x|x| - (4\cos 30^\circ)x + 2$ 与 x 轴的交点个数是 2.

7. 若函数 $y = \frac{1}{2}(x^2 - 100x + 196 + |x^2 - 100x +$

脑筋急转弯

有两只恐龙在决斗, 请问谁先死掉?

答案:

它们脚下的小草.

草.

$$1 = a + 5 \Rightarrow a = -1$$

$$3 \times AB = 16$$

$$AB = \frac{16}{3}$$

$$y = x^2 + bx - 3$$

196|), 则当自变量 x 取 $1, 2, 3, \dots, 100$ 这 100 个自然数时, 函数值的和是 97.

8. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的系数 a, b, c 都是整数, 并且 $f(19) = f(99) = 1999, |c| < 1000$, 则 $c =$.

9. 已知点 $P_1(x_1, 1994), P_2(x_2, 1994)$ 是在二次函数 $y = ax^2 + bx + 7$ (a 不等于 0) 图像上的两个点, 试求当 $x = x_1 + x_2$ 时 y 的值.

10. 若二次函数 $f(x) = ax^2 + bx$ 有 $f(x_1 - 1) = f(x_2 + 1), (x_1 - x_2 \neq 2)$, 求 $f(x_1 + x_2)$.

11. 已知实数 a, b, c 满足 $(a+c)(a+b+c) < 0$, 求证 $(b-c)^2 > 4a(a+b+c)$.

智力魔方

科学研究发现, 一个成人脑重约多少千克?

答案:

1.5。

第二讲 二次函数(二)

在上一讲中,我们发现如果适当的选取二次函数的解析式,可以充分控制计算量.

在这一讲中,我们将主要研究二次函数的图像.研究其性质以及对解题的辅助作用.适当的对二次函数的图像进行分析,很多通过计算得出的结论可以通过分析图像得到同样的结果.

另外,本讲还将研究关于二次函数图像的平移:

对于二次函数图像的平移,应先将函数解析式改写成顶点式,然后对图像的平移进行分析.有一句简单的口诀能概括二次函数图像的平移:上加下减、左加右减.

【例1】 抛物线 $y=ax^2+bx+c$, ($a \neq 0$) 的图像如图 2-1.

(1) 判断 a, b, c, b^2-4ac 的符号;

(2) 当 $|OA|=|OB|$ 时,求 a, b, c 的关系.

解:(1) 因为抛物线开口向上,知道 $a>0$; 由于抛物线与 y 轴相交于 y 轴的负方向,可以知道 $c<0$; 由于抛物线的对称轴 $x=-\frac{b}{2a}>0$, 同时因为 $a>0$, 可以知道 $b<0$; 由于抛物线与 x 轴有两个不同的交点, 所以 $\Delta=b^2-4ac>0$

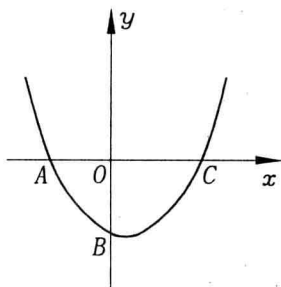


图 2-1

脑筋急转弯

阿明家的照片,只有他和他妈妈的,他爸爸在哪里?

答案:

在给他们照相。

智力魔方

中国人的体重指数在多少以内为正常?

(2) 由于 B 点的坐标是 $(0, c)$, 所以 A 点的坐标是 $(c, 0)$, 因此可以得到 $f(c) = 0$, 即: $ac^2 + bc + c = 0$, 由于 c 不为 0, 所以 $ac + b + 1 = 0$.

【例 2】 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像的一部分如图 2-2 所示, 求 a 的取值范围.

解: 根据二次函数的图像的知识, 知道 $a < 0$.

另外由于图像经过 $(1, 0)$, $(0, 1)$, 我们知道 $a + b + c = 0$ 和 $c = 1$.

由此可以得到 $b = -(1 + a)$, 将此代入原二次函数得到: $y = ax^2 - (1 + a)x + 1$.

根据图像我们知道对称轴 $x = -\frac{-(1+a)}{2a} < 0$, 可以得到 $a > -1$.

综上所述: 有 $-1 < a < 0$.

【例 3】 小明在同一个直角坐标系中画出了 $y = ax^2 + bx + c$, $y = bx^2 + cx + a$, $y = cx^2 + ax + b$ 三个二次函数的图像, 如图 2-3 所示. 请你判断小明画的图像是否正确, 如果正确举出三个合乎条件的二次函数, 并画图验证; 如果不正

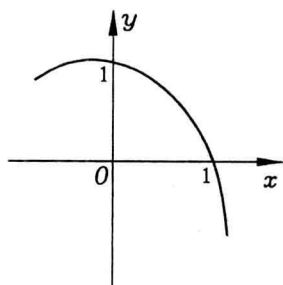


图 2-2

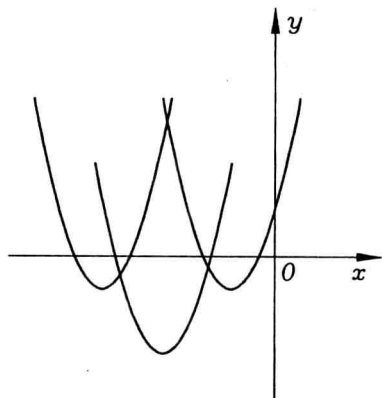


图 2-3

答案:

24.